韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 93-108

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 93-108

선형 대수의 가르침에 고려하여야 할 사항에 관한 연구

최 영 한 (한국과학기술원)

Wassily Leontief가 미국 경제의 모델에 선형 대수를 적용한 이론으로 1973년에 노벨 경제학상을 받은 후로는 인문·사회 과학(특히 상경(商經) 분야)을 전공하는 사람에게도 선형 대수는 큰 관심 분야가 되었다. 그래서 1980년대 부터는 대학의 기초 과목으로써 선형 대수를 가르치는 것은 유행처럼 퍼졌고 또 가르침에 관한 연구도 활발하여졌다.

현행 우리나라의 초·중·고등 학교의 수학과 교육과정(이른바 "제 7차 개정") 속에는 선형 대수의 내용이 어느 정도 있으나 학생들에게 확실한 개념을 갖도록 가르치고 있지 않다. 수직선, 순서 쌍, n-겹수, 직교 좌표, 벡터 등 해석기하적인 내용과 선형 방정식계의 풀이법(가우스·조르단 소거법을 쓰지 않는 풀이법) 등 일반 대수적인 내용은 다루지만 선형 변환, 벡터 공간의 구조 등은 다루지 않는다. $m \times n$ 행렬은 수학II에 나와 있긴 하나 소개하는 정도에 그친다. 한편 과학 계열 고등학교 학생을 위한 "고급 수학"에는 비교적 많은 양의 선형 대수의 내용이 있다.

일반 계열 고등 학교의 수학에서도 선형 대수의 내용을 확장하고 학생들에게 확실한 개념을 갖도록 가르쳐서 이들이 대학에 진학하여 전공 분야에서 아무 어려움이 없도록 하는 것이 바람직하다.

ZDM 분류: C34, C35, D74, D75, H64, H65.
MSC2000 분류: 97C50, 97D70.
주제어: 수직선, n-겹수, 직교 좌표, 벡터, 벡터 공간, 행렬, 선형 변환, 선형 방정식계, 가우스·조르단 소거법, 인식론적 분석, 기호 언어적 표현, 기본 행 변형, 기본 행 변형 행렬.

I. 서 론

지난 수십년간 컴퓨터의 발달로 이공학에서 다루는 많은 문제들을 연속적인 대상으로 다루기 보다는 이산적(discrete)인 대상으로 다루게 되었다. 즉, 많은 데이터를 연속 함수로 다루기보다는 벡터로 생각하는 경향이며, 그 동안 연속적인 진행(process)을 미분방정식계를 이용하여 정성적(qualitative)으로 다루던 것을 이제는 차분(difference) 방정식으로 바꾸어 수치적 풀이(numerical solution)를 찾는 경향이 생겼다.

한편 대학 이공계의 기초 과목으로 또는 고등학교의 과목으로 미분적분은 100 여년이 넘도록 가르쳤고(김성숙 2004, p. 430) 이를 가르치는 방법도 눈에 띄게 발달하였지만 선형

다무라 사부로(1989, 2000)에서

그림 1. 구장산술(九章算術)의 "쓸어내기 방법(消去法)"

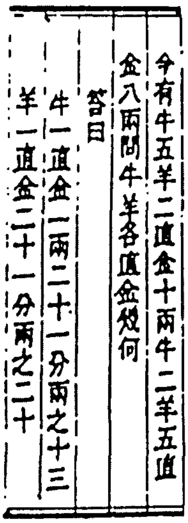
대수를 대학의 기초 과목으로 채택하기 시작한 것은 불과 20~30 년 밖에 되지 않았고 가르침에 관한 연구도 상대적으로 많지 않다.

Wassily Leontief가 미국 경제의 모델에 선형 대수를 적용한 이론으로 1973년에 노벨 경제학상을 받은 후로는 인문·사회 과학(특히 상경(商經) 분야)을 전공하는 사람도 관심을 갖게 되었고, 1980년대 부터는 인문·사회 과학 계열에서도 기초 과목으로 채택하기 시작하였다. 오늘날 많은 나라에서 선형 대수를 기초 과목으로 대학에서 꼭 배워야 하는 과목으로 여기고 있다.

순서 쌍, n-겹수[1], 선형 방정식계[2], 평면 좌표, (3차원) 공간 좌표, 직교 좌표, 벡터, 좌표 평면, 좌표 공간, n-차원 유클릿 공간, 벡터 공간, 스칼라 배(倍), 내적(內積), 선형 변환, 행렬 등을 다루는 선형 대수는 비교적 간단한 개념에서 시작하지만 변수의 개수가 조금만 많아지거나, 차원이 조금만 커지거나, 행렬의 크기가 조금만 커지거나 요소가 조금만 복잡하여도 계산이 매우 까다로워지고, 변환을 따라가면서 설명하기가 힘들어서 선형 대수를 가

1) "직교 좌표" 또는 "벡터"는 평면, 공간 또는 일반 n-차원 공간에 이미 직교 좌표를 도입되었거나 벡터 공간의 개념이 이미 구체화되었을 때 쓰는 용어들이다. 아직 좌표 평면, 좌표 공간, n-차원 유클릿 공간 또는 벡터 공간의 개념이 제대로 형성되지 않은 상태에서 평면 좌표, 공간 좌표, 직교 좌표, 벡터 등의 용어를 쓰면 직관력이 풍부하지 못한 학생들에게 자칫 잘못된 개념을 갖게 할 수도 있다. 이 때는 "n-겹수"가 무난하다. "순서 쌍"(ordered pair)은 "순서 2-겹수"와 같은 것이다.

2) 현행 교육과정(이른바 제7차 개정)에서는 "선형 방정식계"(system of linear equations)를 아직도 "연립일차방정식"(simultaneous linear equations)이라고 한다(교육부 1998, p. 532; 교육인적자원부 2003, p. 65). "연립 방정식"(simultaneous equations)이라는 용어는 이제 세계적으로 거의 쓰지 않는다. "방정식계"(system of equations) 또는 더욱 간단히 "계(系: system)"라는 용어를 쓴다.


今有牛五羊二直金十兩牛二羊五直
金八兩問牛羊各直金幾何
荅曰
牛一直金一兩二十一分兩之十三
羊一直金二十一分兩之二十

왼쪽의 한자로 된 문장을 번역하면
"소 5 마리와 양 2 마리의 값은 10 兩,
소 2 마리와 양 5 마리의 값은 8 兩이다.
소와 양 한 마리의 값은 각각 얼마인가?
답: 소 한 마리 $1\frac{13}{21}$ 兩, 양 한 마리 $\frac{20}{21}$ 兩"
이다.

이화영(1996) 208쪽에서

그림 2. 구장산술의 "제 8장 방정(方程)"에 있는 선형 방정식계의 문제

르칠 때 필수적으로 필요한 보기 문제와 학생들에게 이해를 돕기 위한 연습 문제를 만들기가 쉽지 않다. 그래서 선형 대수를 가르치는 것은 그렇게 단순하지 않다.

II. 역사적 고찰

평면의 점을 좌표로 나타내는 것은 이미 중국의 진(秦: BC 221~BC 207) 나라 때 썼으며 선형 방정식계, 또 선형 방정식계를 덧붙인 행렬로 나타내는 방법과 선형 방정식계의 풀이법으로 쓰는 "가우스·조르단 소거법"(消去法)은 중국의 한(漢: BC 202~AD 220) 나라 때 쓰여진 구장산술(九章算術)[3]에 나와 있는 것(다무라 사부로 (1989, 2000), 이화영 (1996) 참조: 그림 1과 그림 2도 참조)으로 미루어 보아 그 이전부터 썼을 것으로 추정한다.

이렇듯 선형 대수는 구장산술(九章算術)에서 나타난 오래된 수학의 한 분야이지만 한꺼번에 많은 변수를 다루고 이 많은 변수들에 작용하는 변환을 나타내는 효과적인 방법(즉, 행렬로 나타내는 방법)이 서양에서는 19세기 중엽까지 나타나지 않았다. 아이러니하게도 현재 우리가 선형 변환의 표현으로 쓰는 행렬도 19세기 중엽에 수 체계의 확장에 따른 복소수와 사원수(quaternion)의 표현으로 만들었다.[4] 그래서 그때부터 비로소 벡터 공간에

[3] 구장산술(九章算術)은 진(秦)·한(漢) 시대의 여러 산술(算術) 책을 계승하였을 것으로 추측한다. 이 책을 쓴 사람의 이름은 알려져 있지 않고, 책도 전해지지 않는다. 263년에 중국 위(魏: AD 220~265) 나라의 유휘(劉徽)가 구장산술에 주석을 붙여 구장산술주(九章算術註)로 펴냈다.

[4] $n \times n$ 정사각 행렬에 값(행렬식)을 부여하는 아이디어는 1683년에 일본 수학자 Seki Takakazu가 생각하였다(Lay 2003).

Lay(2003) 1쪽에서

그림 3. Wassily Leontief (1973년 노벨 경제학상 수상자)

관하여 이론적으로 연구하기 시작하였고, 선형 대수의 공리화는 1930년 이후에야 이루어졌다.

그 후로도 한꺼번에 많은 변수를 다루어야 하고 또 많은 계산을 필요로 하기 때문에 학교 수학의 교과 내용에 포함되지 못하였고 또 20세기 중반까지는 대학의 기초 과목으로도 채택되지 않았다. 그러던 것이 20세기 중반부터 급속히 발달한 컴퓨터에 힘입어 최근에야 교과목으로써의 그 중요성을 인식하게 되었다. 1973년에 Wassily Leontief가 선형 대수를 응용한 이론으로 노벨 경제학상을 받은 후로는 대학 기초 과정의 수학 교육에서 선형 대수를 가르치는 것에 관한 연구가 활기를 띄기 시작하였다.[5)]

미분적분의 가르침에 대한 연구는 백 여년에 걸쳐 꽤 오랜 동안 이루어진 데 비하여 선형 대수의 가르침에 관한 적극적인 연구는 상대적으로 짧은 역사를 갖고 있다. 그러나 지난 30여년 동안 대학의 기초 과목으로 선형 대수를 가르치는 것에 관한 연구는 차츰 늘어났고 이제는 아주 활동적인 연구 분야가 되었다.

[5)] Leontief가 1973년에 노벨 경제학상을 받은 연구는 1949년으로 거슬러 올라간다. 1949년 그는 미국의 경제 전반에 관한 데이터를 500개의 변수와 500개의 방정식으로 된 선형 방정식계로 나타내었으나 당시 이 정도의 선형 방정식계를 다룰 수 있는 컴퓨터가 없었으므로 그는 이를 다시 42개의 변수와 42개의 방정식으로 된 방정식계로 정제하여 하바드 대학교의 "마크 2"라는 컴퓨터에 입력하였다. 이 컴퓨터는 56시간의 긴 계산 끝에 마침내 방정식계의 풀이를 내어 놓았다(Lay, 2003, p. 1).

대학의 기초 과목으로 선형 대수를 가르치는 것에 관한 연구는 최근에 많이 이루어졌다(Artigue, Chartier & Dorier 2000; Choe 2004; Dorier 1995, 2000, 2002; Dorier, Robert, Robinet & Rogalski 2000a, 2000b; Harel 2000; Harel, Hillel, Rogalski, Robinet, Sierpinska & Dorier 1997; Hillel & Sierpinska 1994; Pavlopoulou 1994a, 1994b, 1994c; Robert 1987; Rogalski 1991, 1994, 1996, 2000).

Dorier (1995, 2002)는 선형 대수에 관련한 초창기의 역사[6]에 대한 인식론적(epistemological) 분석은 학생들이 선형 대수를 어려워 하는 근원적인 이유를 찾을 수 있을 뿐만 아니라 "학습 활동 계획"(design of activity)을 세우는데 어떤 영감(inspiration)을 찾을 수 있다고 하였다. Dorier (1995, 2000)와 Moore (1995)는 이러한 관점에서 연구하였다. 그러나 이들의 연구는 모두 서양의 수학사에서만 국한되었다.

다음에 소개하는 이론은 Dorier (2002)가 International Congress of Mathematicians (Beijing: August 20–28, 2002)에서 초청강연으로 발표한 내용[7]에서 발췌한 것이다.

III. 선형 대수의 가르침에 관한 연구

선형 대수의 가르침에서 일어나는 어려움과 미분적분의 가르침에서 일어나는 어려움은 근본적으로 다른 점이 많다. 미분적분에서는 자연 현상에서 일어나는 현상을 그대로 추상화하였기 때문에 학생들이 어떤 개념을 이해하느냐 못하느냐가 큰 관건이 되지만, 선형 대수에서는 이산적인 값(데이터)의 변화에서 추상적인 구조(선형 구조)를 찾아 내고 그 변화를 형식(추상)화하였기 때문에 학생 개개인이 어느 정도의 개념은 갖고 있지만 많은 새로운 용어들의 정의를 이미 알고 있는 개념에 연관시켜 생각하는 일은 그리 쉽지 않다. 학생마다 조금씩 다른 개념을 갖고 있는 것도 가르칠 때 큰 장애가 된다. 그래서 전체 강의에서는 학생들이 모두 이해하였다고 생각하였는 데 나중에 개별적인 질문에서 기본적인 쉬운 개념조차 이해하지 못하고 있는 것을 알게 되는 수가 자주 있다. 많은 선생들은 학생들이 아주 기초 적인 개념조차 이해하지 못하는 데 대해서 의아해 하고 잘못 대처하는 수가 종종 있다.

많은 학생들은 선형 대수를 처음 배울 때 이전에 배운 수학과 다소 거리감을 느끼게 되고, 새롭게 소개되는 많은 개념들과 새로운 정의, 정리, 공리들로 둘러싸여 있어 마치 낯선 세계에 있는 느낌을 갖게 된다. 선생들은 아주 간단하다고 생각하는 개념이나 대상에 대해서도 학생들이 쉽게 적응하지 못하는 경우가 흔히 있다. 많은 선생들은 학생들의 이러

[6] Dorier (2002)가 말하는 "선형 대수에 관련한 초창기의 역사"는 서양에서 19세기 중반부터 1930년대까지 나타난 선형 대수에 관련한 개념 내지는 지식 형성의 과정을 일컫는다.

[7] Dorier(2000)가 편집한 책에 있는 글(Artigue, Chartier & Dorier 2000; Dorier, Robert, Robinet & Rogalski 2000b; Harel 2000; Hillel 2000; Rogalski 2000)들로써 최근의 연구 동향을 소개하였다.

한 느낌을 기초적인 "집합과 논리"에 대한 연습 부족으로 선형 공간 또는 선형 변환에 대한 올바른 개념을 형성하지 못하고 또 다차원 공간에 대한 직관력의 부족으로 인하여 머리 속에 상상이 잘 떠 오르지 않기 때문이라고 여기고 있다. Dorier (2002, p. 876)는 선생들의 이런한 지적이 틀리지는 않다고 하였다. 그렇다고하여 이러한 문제는 선형 대수를 가르치기 전에 직교 좌표, 집합과 논리 등을 미리 가르치는 것으로 쉽게 고칠 수 있는 것은 아니라고 하였다.

1. 선형 대수의 가르침의 두 방향

선형 대수를 가르침에 있어서 크게 다른 양극의 두 접근 방향을 들 수 있다. 추상적인 벡터 공간에 초점을 맞추어 대수적 구조에서 공리적으로 접근하는 방향과 유클릿 공간 $\mathbb{R}^n$과 행렬의 연산에 바탕하여 해석기하적으로 접근하는 방향이 있다. 실제적으로는 이 두 방향의 접근을 적당히 섞어서 만든 여러 가지의 가르침의 계획(teaching design)이 있다. 어떤 방향에서 어떤 내용을 가르칠가를 쉽게 결정할 수 없는 이유 중의 하나는 대학 기초 과정에서 다루는 많은 문제들은 공리적인 이론을 사용하지 않고도 풀 수 있기 때문이다. 이러한 이유로 추상적인 벡터 공간의 이론을 아예 가르치지 말자는 사람도 있다.

함수로 이루어진 베터 공간 또는 무한 차원의 벡터 공간을 다루지 않는다면 공리적인 접근 방향은 필요하지 않다. 그러나 전문가들은 대학의 기초 과정에서 학생들이 벡터 공간의 공리적인 접근 방향에 대해서도 어느 정도의 개념을 가져야 한다고 주장한다. 공리적인 접근을 필요로 하는 어느 정도의 형식적인 문제를 다룸으로써 학생들에게 이미 가지고 있는 지식에서 새로운 문제를을 다룰 수 있는 "대처 능력"(reflection)과 새로운 개념을 이미 갖고 있는 개념과 관련시켜 생각할 수 있는 "대응 능력"(competency)을 모두 길러 주어야 한다고 주장한다.

이러한 관점에서 Dorier, Robert, Robinet & Rogalski (2000a, 2000b)는 "초월적 수준의 학습 활동"(meta level activities 또는 meta lever)이라는 것을 소개하였다. 이들의 글은 선형 대수 이론을 처음 배울 때 형성되는 개념의 중요성과 또 형성된 개념을 일반화하고 특성화 하는 것에 대하여 기술하였다. "초월적 수준의 학습 활동"은 선형 대수의 개념과 방법(methods) 등을 사용하여 얻어지는 새로운 가능성과 개념적인 이득에 관한 것으로 "초월적 질문"(meta-question)에 깔려 있는 어떤 "상수"(constant)[8]를 이끌어 내는 학습 활동은 대부분 선생들에 의존하다고 하였다. 또 어떤 대상에 대한 관점의 변화와 이론의 원용,

[8] 선형 대수의 이론에서 처음 배울 때나 전문가가 되어도 바뀌지 않는 개념과 정의, 즉, 선형 독립, 선형 종속, 선형 결합 등 지속적으로 쓰이는 개념, 정의, 정리 등을 뜻하는 듯 하다.

그리고 일반적인 방법의 형태 등 선생들이 학습 활동에서 이끌어 가는 것에 대하여 반드시 알아야 할 부분에 대해서도 논하였다.

2. 인지적 유연성(COGNITIVE FLEXIBILITY)

Dorier, Robert, Robinet & Rogalski (2000b)는 선형 대수를 가르칠 때 일어나는 문제점들에 대한 진단에 관한 것으로 역사적으로 모든 시대의 학생들에게 또 거의 모든 방향의 가르침에서 나타나는 하나의 장애물[9]에 초점을 맞추었다. 선형 대수를 배울 때 어려운 부분은 비슷비슷하면서도 다른 뜻을 가지는 혼돈하기 쉬운 용어들, "기호 언어적 표현"(semiotic representation), 그리고 같은 대상을 다른 관점에서 바라볼 때 달라지는 표현 등이다. 하나의 표현에서 다른 표현으로 바꿀 때 혼돈을 일으키지 않고 바꿀 수 있는 능력을 "인지적 유연성"이라고 하는 데 선형 대수를 배우고 이해하는 데 매우 중요하다고 하였다. 인지적 유연성에 관련한 연구는 사람들이 연구하였다(Harel et al. (1997), Dorier (1997, 1998), Rogalski (1996) 참조).

형식적인 관점(formal aspect)에서 벡터 공간의 이론을 이해하는 데 학생들이 겪는 어려움은 대체로 형식주의에 관련되어 일어나는 문제가 아니고 벡터 공간의 이론을 어떤 형식으로 어떻게 적용해야 하는 지 몰라서 일어난다고 하였다. 즉, 기하학이나 선형 방정식계와 같이 직관적인 내용을 일반적인 개념을 적용하여 설명하는 데에서 생기는 문제 등이다.

Hillel (2000)은 선형 대수에서 사용되는 기본적인 언어를 일반적인 추상 이론(abstract theory)에서 생긴 "추상 언어", 유클릿 공간 $\mathbb{R}^n$ 이론에서 생긴 "대수 언어", 그리고 평면 또는 (3차원) 공간에서 생긴 "기하 언어"의 세 가지로 구분하였다. 그는 "인지적 유연성"은 학생들에게 주의를 끌지 못하였으며 연속적으로 표현의 방식과 기술의 방법을 바꾸는 강의에서는 마치 표현법이 무시되는 것처럼 보인다고 하였다. 학생들에게 가장 혼란스러운 것은 유크릿 공간 $\mathbb{R}^n$에서 추상 벡터 공간으로 표현을 바꾸는 경우이다. 또 한 기저(basis)에서 다른 기저(basis)로 바뀔 때 한 n-겹수(벡터 또는 행렬)에서 다른 n-겹수(벡터 또는 행렬)로 바꾸어 나타낼 수 있다는 것은 행렬에 의한 선형 변환의 값을 찾을 때 지속적인 오류를 불러 온다고 하였다. Hillel & Sierpinska (1994) 에 의해서 확인된 세 가지 언어와 비슷하게 사고를 세 가지 방식으로 구분하는 것은 이 언어들의 발전을 가져왔고 수학의 다른 영역에서 발생한 언어를 이해하는 데 꼭 필요하다고 하였다.

Duval (1995)은 기호 언어적 표현(semiotic representation)은 분야마다의 특징적 의미와 기능이 부여되어 있는 "표현 시스템"에 속하는 기호를 사용한 결과라고 하였다. 기호 언

---

[9] 그들은 이를 "형식주의의 장애물"이라 하였다. 가령 예로써 n차 이하의 다항식의 집합 $\mathbb{P}_n$에서 표준 기저(basis)가 아닌 기저는 매우 어렵게 여겨 잘 이해하지 못한다. 그리고 기저의 변화 따른 변환은 더욱 어려운 것으로 여긴다

어적 표현은 수학적인 활동에서는 대상을 직접적으로 알지 못하기 때문에 대상을 나타내는 방법으로 꼭 필요하다고 하였다. 더욱이 기호 언어적 표현은 새로운 지식을 갖게 하고, 생각의 표현, 다른 인지적 지식에 입각한 기능들(구체화, 계산 등)을 발전시키는데 중요한 역할을 한다고 하였다. Duval (1995)의 이론은 선형 대수의 배경으로 이미 Pavlopoulou (1994a, 1994b, 1994c)가 적용하고 시험하였다. 그는 벡터의 세 가지 기호 언어적 표현으로 구분하여 도식적 표현(화살표), 표(나열)를 사용한 표현(n-겹수와 열 벡터), 상징적 표현(벡터 공간에 대한 이론)으로 분류하였다. 그는 변환이라고 다루어지는 표현에 대한 의문은 교과서(수학 선생의 가르침)에 일반적으로 기술되어 있지 않다고 하였다. 그는 학생들이 일으키는 오류의 많은 예를 대상과 표현 사이의 혼란이나 한 표현에서 다른 표현으로 전환하는 어려움으로 해석할 수 있다고 하였다.

Pavlopoulou (1994a, 1994b, 1994c)의 연구를 확장한 Alves-Dias (1995, pp. 252-256)의 연구에서는 인지적 유동성으로 한 기호 언어적 표현에서 다른 기호 언어적 표현으로 전환하는 것을 배울 필요가 있다고 하였다. 더욱이 Rogalski (1991, 1994, 1996, 2000)의 연구를 기반으로 직교 좌표와 부분 공간을 매개변수로 표현하는 것 사이의 관계에 관하여 연구하였다. 이것은 단순한 기호 언어적 표현의 변화가 아니고 랭크(rank)와 상대성(duality)과 같은 인식론적인 과정으로 표현되어 있다고 하였다.

3. 선형 대수를 가르칠 때의 세 가지 원리

Harel (2000)은 개념 발달에 관한 피아제의 심리학적 이론에 따른 다음의 세 가지 원리를 내세웠다.

① 구체성의 원리(Concreteness Principle): 학생들은 제시된 대상의 원소를 "입력 데이터"(input)로 생각하는 정서적인 과정을 겪게 된다. 아직 구체적인 개념이 들어 있지 않은 학생들에게 벡터 공간의 일반적인 개념을 갖게 하려면 제시된 대상을 학생들의 관점으로 보았을 때 개념적인 실체가 있어야 한다. 학생들이 이와 다른 정서적인 과정을 겪게 되면 추상화는 제대로 이루어지지 않는다. 이런 상태에서 일반화된 벡터 공간의 개념을 가르친다면 "구체성의 원리"를 적용할 수 없다.

② 필요성의 원리(Necessity Principle): 만약 선생이 문제를 풀어 주고 학생으로 하여금 이것을 재생하도록 한다면, 학생들은 선생들의 풀이를 재생하는 능력은 발달하겠지만 어떻게 문제를 푸는 지는 배우지 못하게 된다. 예로써 $\mathbb{R}^n$의 공리적인 성질들로 부터 벡터 공간의 정의를 찾아내도록 한다면 이는 "필요성의 원리"에 따랐다고 할 수 없다.

③ 일반화 가능성의 원리(Generalizability Principle): 가르침이 구체성의 원리를 만족시키는 구체적인 대상과 관련될 때는 그 대상 내에서 일반화의 가능성이 있어야 하고, 학생

들로 하여금 일반화할 수 있도록 지도하여야 한다. 만약 제시된 대상이 구체성이 강하여 일반적인 개념과 공통 점이 별로 없다면 "구체성의 원리"는 적용되지 않는다. 가령 예로써 선형 종속의 개념을 다룰 때 같은 직선에서 정의된 어떤 내용을 다룬다거나 같은 평면에서 정의된 기하적인 내용을 대상으로 쓴다면 추상적인 벡터 공간으로 일반화하는 것은 쉽지 않다. 이 원리는 배우는 과정 자체 보다도 가르치는 대상을 선택하는 교육적인 결정에 의존한다.

4. 기하와 선형 대수

Robert, Robinet & Tenaud (1987)는 도형을 선형 대수의 가르침에 이용하여 선형 대수의 개념에 더욱 구체적인 의미를 줌으로써 형식화의 방해 요소를 없애려 하였다. 한 편 Harel (2000)은 선형 대수를 가르칠 때 형식화에 나타나는 저항을 극복하기 위하여 아주 정교한 벡터 공간에서 만든 도형들은 오히려 문제가 있음을 알았다. 대부분의 학생들이 생각하는 기하적인 공간은 3차원에 한정되기 때문에 "랭크"(rank)라던가 "선형 종속" 등은 아주 제한적으로 밖에 다룰 수 없었고 선형 부분 공간을 이야기할 때 어파인(affine) 부분 공간과 혼동하는 수가 흔히 있다고 하였다. 많은 선형 대수의 교재들(또는 선생들)은 기하적인 직관에 의하여 선형 대수의 공리를 유도하기도 한다. 어떤 학생들에게는 도형을 사용하는 것이 전연 도움이 되지 않는다. 그러나 또 어떤 학생들에게는 기하적인 표현이 선형대수를 이해하는데 크게 도움이 된다.

Artigue, Chartier & Dorier (2000, pp. 262–264)는 기하와 선형 대수의 관계에 대한 인식론적인 연구를 하였다. 일반적으로 기하를 선형 대수의 가르침에 이용한다면 매우 구체적으로 사용하여야 한다고 하였다.

IV. 초·중·고등 학교 교과에 들어 있는 선형 대수의 내용

이제까지의 우리나라 초·중·고등 학교에서는 수직선[10], 순서 쌍, n-겹수, 간단한 벡터, 평면 좌표, 공간 좌표 등 해석기하적인 요소들이 오랜 기간 동안에 걸쳐서 가르치기 때문에 학생들이 대학 기초과정에서 선형 대수를 배울 때 서양에서 처럼 심각한 문제를 일으키지는 않았다. 그러나 교육과정의 제7차 개정에서는 벡터 관련 내용이 2차원(수학I), 3차원(수학II)으로 제한되었고 선형 대수의 내용이 많이 줄었기 때문에 앞으로 서양에서 일어났던 현상이 일어나지 않을까 우려된다.

[10] Grow-Maienza & Beal (2004)는 한국의 수학에서는 수직선이 도처(ubiquitous)에 있다고 하였다(그림 4 참조).

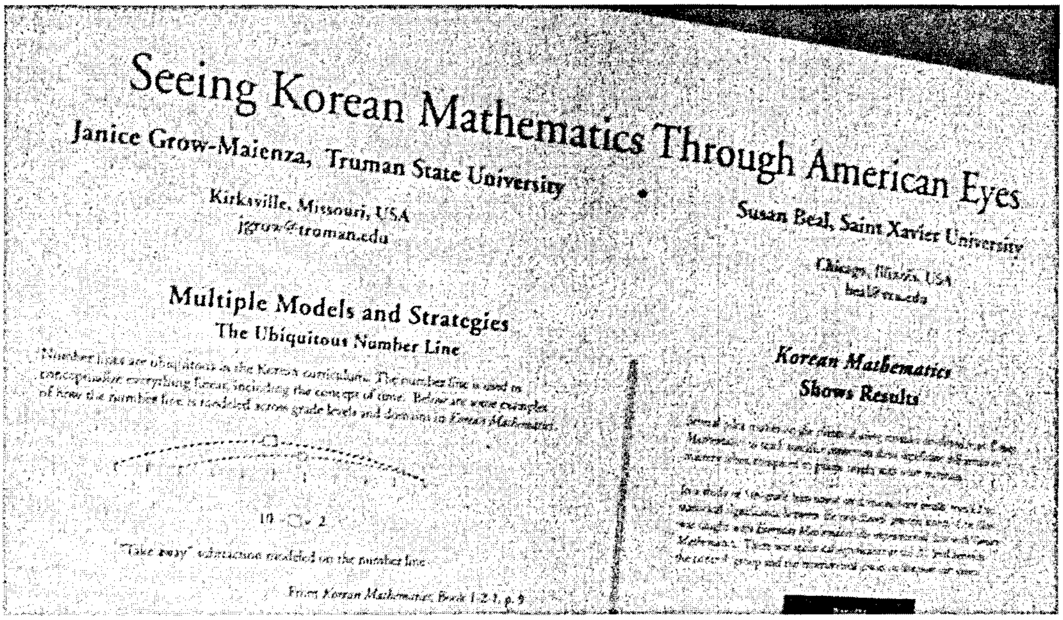


사진: ICME-10에서 이미옥 찍음

그림 4. Grow-Maienza와 Beal의 ICME-10 포스터

1997년 교육부는 수학 교육과정의 개정(이른바 "제 7차 개정")을 발표하였다(교육부, 1998). "제 7차 교육 과정의 개정"의 기본적인 의도는 이른바 "단계형 수준별 교육과정"이라 하여 학생들의 능력에 맞추어 가르치고 배우도록 하는 것이 그 의도이다. 그 동안 교육과정의 틀에서 초등학교, 중학교, 고등학교로 나누던 것을 하나로 합치고, 이를 다시 "국민 공통 기본 교육 과정"(1~10학년)과 "선택 중심 교육 과정"(11~12학년)의 두 단계로 나누었다. 특히 "선택 중심 교육 과정"의 수학에서는 실용 수학, 수학 I, 수학 II, 미분과 적분, 확률과 통계, 이산 수학의 여섯 교과를 선택 과목으로 두어 학생들의 능력, 적성, 흥미, 진로에 따라 선택하도록 하였다. 그러나 여섯 선택 교과의 어디에도 눈에 띌 만큼의 선형 대수의 내용은 들어 있지 않다.

"국민 공통 기본 교육 과정"(1~10학년)에서는 수직선, 순서 쌍, 직교 좌표(평면 좌표, 공간 좌표), 일차 함수, 단항식, 다항식, 선형 방정식, 선형 방정식계, 벡터 등 해석기하적인 내용과 선형 방정식계의 풀이법(가우스·조르단 소거법을 쓰지 않는 풀이법) 등 일반 대수적인 내용은 다루지만 선형 변환, 추상적인 벡터 공간의 선형 구조 등은 다루지 않는다. $m \times n$ 행렬은 "선택 중심 교육 과정"(11~12학년)의 선택 과목인 수학I에 있으나 행렬의 곱셈과 2×2 행렬의 역행렬을 구하는 것만 다룬다. 또 수학II에 공간 좌표, 좌표 공간, 정사영, 평면 벡터, 공간 벡터, 벡터 방정식, 벡터의 덧셈, 벡터의 스칼라 배 등도 소개되긴 하나 모두

해석기하적인 개념과 성질만 다룬다. 그리고 이산 수학에 있는 행렬에 관한 내용은 수학I에 있는 것보다도 빈약하다.

V. "수학III"과 "고급 수학"에 나타난 선형 대수의 가르침

정부는 1980년대에 중등 학교의 수학, 과학의 학력 저하의 보완책으로 특수 목적교인 "과학고등학교"를 만들고 이들 학교를 위하여 일반 고등학교보다 한층 심화된 교과과정을 만들었다. 그러나 교과과정은 실제로 시행되지 않고 있다.

1988년에 만들어진 교육 과정(이른바 "제5차 개정")에 맞추어 만들어진 과학 고등 학교의 수학 III의 목표(문교부, 1988)는

> "수학에 관한 깊은 지식을 가지게 하고, 수학적으로 사고하는 능력을 기르게 하며, 탐구 활동을 통한 창의적인 연구에 흥미와 자신감을 가지게 한다."

로 되어 있다. 이 목표에 따라 지은 교과서 (교육부, 1993)는 당시 고등 학교 이과 계열용 교과서 '수학 II(하)'의 내용을 그대로 연장하여 대학 이공계의 '미분 적분과 해석 기하', '선형 대수', '미분 방정식' 등의 일부분을 옮겨 놓은 것에 불과하여 "수학 III"의 목표가 제대로 반영되지 못했다.

그러나 이 교과서에서 한 가지 주목할 것은 "가우스·조르단 소거법"을 "가우스 소거법"[11]이라 하고, 비교적 상세히 소개하였으며 이의 응용으로

① 선형 방정식계에서 해를 구하는 과정(21–25쪽)과

② 정사각행렬의 역행렬을 구하는 방법(25–26쪽)

을 들었다 (교육부, 1993, 21–28쪽).

이 책의 개정판(이른바 "제6차 개정"에 따른 교과서)인 교육부 지음 "고등 학교 수학 III"에도 "(행렬의) 기본 (행)변형과 가우스 소거법"이라 하여 "가우스·조르단 소거법"에 관한 내용이 나와 있긴 하나 이의 내용 전개가 제대로 되어 있지 않다(교육부, 1997, pp. 52–54; 최영한 2001). 이 책의 내용만으로는 "가우스·조르단 소거법"을 이해하기는 쉽지 않으며 "가우스·조르단 소거법"이라는 것이 매우 어려운 것이라는 느낌을 학생들에게 갖게 하고 실제로 방법은 제시하지 않았다. 또 가우스·조르단 소거법을 어느 정도 알고 있는 교사에게도 많은 혼란을 일으키게 하고 있다.

---

[11] Zill & Cullen (2000, p. 355)은 가우스 (Gauss) 소거법과 가우스·조르단 (Gauss-Jordan) 소거법을 다른 것으로 소개하고 있다. 전자는 덧붙인 행렬을 행사다리꼴 (row-echelon form) 행렬로 고치는 과정까지를 일컫고, 후자는 기약 행사다리꼴 (reduced row-echelon form) 행렬로 고치는 과정까지를 일컫는다. 미지수가 많은 선형 방정식계를 풀 때 가우스·조르단 소거법은 가우스 소거법보다 50% 정도의 계산이 더 필요하다고 한다. 김응태·박승안 (1994, pp. 33–41)은 선형 방정식계의 풀이 과정으로 "가우스·조르단 소거법"만을 쓰고 있다.

교육부 지음 "고등 학교 수학 III"의 "(행렬의) 기본 (행) 변형과 가우스 소거법"에서는

"행렬의 기본 (행)변형만을 사용하여 주어진 행렬을 가장 간단한 행렬(단위 행렬) 로 바꾸는 방법을 가우스 소거법이라 한다."(교육부 1997, p. 53)

고 하고 "기본 행 변형"의 대상으로 정사각행렬만 다루었다.[12)]

이른바 "제7차 교육과정의 개정"과 함께한 과학 계열 고등학교 학생을 위한 "고급 수학"(교육인적자원부 2003)에서는 비교적으로 많은 양의 선형 대수 관련 내용을 다루었고, 앞서 지적한 많은 부분이 보완되었으나 아직도 고쳐야 할 곳이 많다.

n 개의 미지수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 에 대한 m 개의 선형방정식으로 이루어진 계(系)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

과 (1)에 대응하는 **덧붙인 행렬**

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right], \tag{2}$$

을 생각하자. 우선 선형방정식계 (1)에 대하여 "기본 변형"을 생각하자.

선형방정식계의 기본 변형에는 다음 세 가지가 있다.

(i) 두 방정식의 위치를 서로바꾸어놓는다.
(ii) 한 방정식을 a 배 한다.
(iii) 한 방정식에 다른 방정식의 a 배를 더한다.

한편, 선형방정식계에 위의 기본 "변형"을 시행하는 것은 덧붙인 행렬(2)에 다음의 **기본 행 변형**을 시행하는 것과 같다.

행렬의 기본 행 변형 행렬과 행렬의 기본 행 변형 행렬은 다음과 같이 표시한다.[13)]

$E_{[ij]}$: 주어진 행렬에서 i 행과 j 행을 바꾸어 놓는다.
$E_{[i(a)]}$: 주어진 행렬에서 i 행에 a 를 곱한다.

---

12) 예제로 정사각행렬을 단위행렬로 바꾸는 과정만 설명하고, 이것을 이용하면 "역행렬을 구할 수 있다."(교육부 1997, p. 54)고 하였다. 이 과정에서 "기본 (행) 변형은 왼쪽에서 적당한 행렬을 곱하는 것과 같음을 알 수 있다."고 하고 이것을 "$E_{21}(-2)\times$, $E_{41}(-1)\times$, $E_{12}(1)\times$, $E_{23}(2)\times$, $E_{34}(2)\times$로 나타낼 수 있다"고만 하고 구체적으로 이 행렬들이 어떤 모양을 하고 있는지 보이지 않았다.

13) 여기서 구체적인 기호 언어적 표현을 준 것은 수학교육의 구성주의에 입각하여 학생들에게 확실하고 구체적인 개념을 전달하기 위해서이다. "고급 수학"(교육인적자원부 2003, p. 69)에서는 (2행)+$(-2)\times$(1행), (3행)+(1행), (2행)$\times\frac{1}{2}$ 등으로 나타내었다.

$E_{[i+j(a)]}$: 주어진 행렬에서 j 행에 a 를 곱하여 i 행에 더한다.

덧붙인 행렬(2)에 기본 행 변형을 하여 행렬의 성분에 0이 많이 나타나게 하는 것은 주어진 선형 방정식계(1)에 "기본 변형" (변형 (i), (ii), (iii) 참조)을 시행하여 미지수가 나타나는 횟수를 줄이므로써 방정식계의 해집합을 쉽게 찾아 내도록 하기 위함이다. 교육부(1993, pp. 21–25)는 내용의 전개가 제대로 되어 있으나, 교육부(1997)에는 이에 관한 언급이 없다. 한편 교육인적자원부 (2003)는 3개의 미지수와 3개의 방정식으로 된 방정식계만 다루었기 때문에 일반성을 잃고 있다.

정사각행렬의 역행렬을 구하는 방법에서도 교육부 (1993, pp. 25–26)는 덧붙인 행렬에 가우스·조르단 소거법을 실제로 시행하였으나 교육부 (1997)와 교육인적자원부 (2003)는 덧붙인 행렬을 쓰지 않고 그 과정이 가우스·조르단 소거법과 같다는 것만 언급하였다. 이것은 여러 개의 선형 방정식계를 한꺼번에 푸는 것과 같으므로 덧붙인 행렬에 가우스·조르단 소거법을 실제로 사용하는 것이 편하다.

교육부(1997, p. 53)는 이러한 가우스·조르단 소거법의 원래의 취지를 잘 모르고 단순히 정사각행렬의 역행렬을 구하는 방법으로만 쓰는 것으로 가르치고 있다. 가우스·조르단 소거법을 이해하면 이것이 어떤 원리로 선형방정계의 풀이 과정이 됨을 금방 알 수 있으며, 또 정사각행렬의 역행렬을 구할 때 쓰이는 원리도 이해하게 된다.

현행 교육고과정에서 "선택 중심 교육 과정"(11~12학년)의 선택 교과인 "미분과 적분"을 좀더 확장하여 "수학 III"이라 고치고, "고급 수학"에 있는 선형 대수의 많은 내용을 옮겨 넣는 것도 한 방법이라 생각한다.

그리고 이러한 것을 포함하여 우리는 고등 학교 2~3학년 선택 과목으로써 또 대학의 기초 과목으로써 선형 대수의 가르침에 관한 연구를 지속적으로 이루어 가야 할 것이다.

VI. 결 론

앞에서 선형 대수를 가르칠 때 일어나는 여러가지 문제, 특히 학생들이 겪는 어려움의 진단과 치료, 인식론적인 분석 등의 연구 결과를 소개하였다. 그러나 이런 연구들의 결과나 치료법은 또 다른 의문과 문제점을 찾아 낸다. Dorier (2002, p. 882)는 수학 교육에 관한 연구만으로 선형 대수를 가르치고 배우는 데 일어나는 모든 어려움을 기적적으로 해결할 수는 없다고 하였다. 그러나 이러한 것은 결코 연구가 잘못되었다거나 치료법이 잘못된 것이라고 해석하여서는 안된다고 하였다. 모든 상황에 유효한 치료법이란 있지 않을 것이며 수학을 가르치고 배우는 방법을 향상시키는 것은 이러한 치료법만을 찾는 것은 아니다. 수학을 배우고 가르치는 것은 단순한 인지적 과정만을 포함하는 것이 아니다.

박한식 (2001, pp. 464–465)은 수학과 교육과정을 만들 때나 교과서를 만들 때는 다음과 같은 점을 충분히 알고 이러한 일을 할 것을 제언하였다.

1. 수학교육에 대한 철학이 있어야 한다.
2. 교직 수학에 대한 충분한 지식이 있어야 한다.
3. 학생들의 수학 개념에 대한 인지도를 알고 있어야 한다.
4. 현장 교사들의 수학에 대한 지식을 감안하여야 한다.
5. 실생활에 이용되는 수학의 지식을 알고 있어야 한다.
6. 새로운 교육 내용이나 학습 방법을 도입할 때는 (형식적이 아닌) 충분한 현장 실험이 먼저 이루어져야 한다.
7. 교수·학습 방법은 교육 내용에 상관없이 일률적일 수는 없다.

이제 다시 한 걸음 더 나아가 중·고등 학교 수학과 교육과정 속의 선형 대수의 내용을 더욱 확장하고 확실한 개념을 갖도록 가르쳐서 학생들이 대학 또는 각자의 전공 분야로 나아갔을 때 아무 어려움이 없도록 하여야할 것으로 여겨진다. 현행 교육과정(이른바 "제7차 개정")에 따른 "선택 중심 교육과정"(고등학교 2~3학년)의 수학 교과의 한 선택 과목으로써 선형 대수를 채택할 것을 신중히 고려하여 볼 때라고 여겨진다.

참 고 문 헌

강행고 (1998): 제 7차 수학과 교육 과정 개정의 기본 방향. 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학 교육 프로시딩 **7**, 7-19.

교육부 (1993): 과학고등학교 수학 III. 서울: 대한교과서주식회사.

______ (1997): 고등 학교 수학 III. 서울: 대한교과서주식회사.

______ (1998): 수학과 교육 과정 (교육부 고시 제 1997-15호 별책 8). 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육 프로시딩 **7**, 485–597.

교육인적자원부 (2003): 고등학교 고급 수학. 서울: 지학사.

김성숙 (2004): Felix Klein 상과 Hans Freudenthal 상. 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육 논문집 **18(2)**, 411–425.

김응태 · 박승안 (1994): 선형 대수학 제 2판. 서울: 청문각.

다무라 사부로 (1989): 방정식의 이해와 해법. 손영수 · 경익선 옮김. 서울: 전파과학사.

______ (2000): 구장산술의 쓸어 내기 방법. 경익선 · 손영수 옮김. 한국수학교육학회 뉴스레터 **16(2)**, 6–8.

문교부 (1992): 고등 학교 수학과 교육과정 해설 (문교부 고시 제 88-7호). 서울: 문교부.

박한식 (2001): 수학 교육의 회고와 제7차 교육과정 및 교직 수학 — 제7차 교육과정에 따른 수학 교과서 검정 심의와 관련하여. 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육 논문집 **11**, 451–468.

______ (1999b): 수학 I. 서울: 지학사.

이화영 (1996): 만화와 함께 수학의 신비를 찾아서. 서울: 교우사.

정창현 · 강행고 · 김수환 (1992). 제5차 교육과정에 따른 1종도서 수학 III (과학고등학교용)의 편찬 (연구, 개발). 한국수학교육학회지 **31(3)**, 93–101.

최영한 (2001): 고등 학교 수학 III"의 내용 중 가우스·조르단 소거법(消去法)의 잘못된 소개와 올바른 소개. 한국수학교육학회지 시리즈 F 수학교육학술지 6, 205–221.

Michèle Artigue, Ghislaine Chartier & Jean-Luc Dorier (2000): Representation of Other Research Works. In: J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 247–264). Dordrecht: Kluwer. MATHDI **2001a**.00360

Y. H. Choe (2000): Teaching Contents of Linear Algebra to High School Students. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education* **8(2)**, 107–144.

Jean-Luc Dorier (1995): A General Outline of the Genesis of Vector Spaces. *Historia Mathematica* **22(3)**, 227–261. MR **96m**:01002

——— (Ed.) (2000): *On the Teaching of Linear Algebra.* Mathematics Education Library, v. 23. Dordrecht: Kluwer. MATHDI **2001a**.00360

——— (2002): Teaching Linear Algebra at University. In: Tatsien Li (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing: August 20–28, 2002), Vol. III: Invited Lectures* (pp. 875–884). Beijing: Higher Education Press. MATHDI **2003b**.01882

Jean-Luc Dorier, A. Robert, J. Robinet & M. Rogalski (2000a): On a Research Programme concerning about the Teaching and Learning of Linear Algebra in the First Year of a French Science University. *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology* **31(1)**, 27–35. MATHDI **2000b**.00851

——— (2000b): The Obstacle of formalism in Linear Algebra. In: J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 85–94). Dordrecht: Kluwer. MATHDI **2001a**.00360

R. Duval (1995): *Semiosis et Pensée Humaine. Registres Séemiotiques et Apprentissages Intellectuels.* Bern: Peter Lang.

J. Grow-Maienza & S. Beal (2004): *Seeing Korean Mathematics Through American Eyes.* To Appear.

G. Harel (2000): Principle of Learning and Teching Mathematics, with Particular Reference to the Learning and Teaching of Linear Algebra: Old and New Obsetvations. In: J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teching of Linear Algebra* (pp. 177–189). Dordrecht: Kluwer. MATHDI **2001a**.00360

G. Harel, J. Hillel, M. Rogalski, J. Robinet, A. Robert, A. Sierpinska & J.-L. Dorier (1997): *L'Ensergnement de l'Algebre lineaire en question.* Grenoble: Editions la Pensee Sauvage. MATHDI **1997c**.02119

J. Hillel (2000): Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In: J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 191–207). Dordrecht: Kluwer. MATHDI **2001a**.00360

J. Hillel & A. Sierpinska (1994): Role and Nature of Knowledge in Logic and set Theory which Deal with Some Linear Problems. In: L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 18)* *held at Valencia Universidad, Spain, July 9-12, 1996*, vol. 4 (pp. 211–218). Valencia, Spain: International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME).

David C. Lay (2003): *Linear Algebra and its Application.* 3rd ed. Boston, MA: Addison-Wesley.

G. Moore (1995): The Axiomatization Linear Algebra: 1875–1940. *Historia Mathematica* **22(3)**, 262–303. MR **96g**:01028

Kalliopi Pavlopoulou (1994a): Propedeutique de l'algebre lineaire. La coordination des registres de representation semiotique (in French). These. Strasbourg, France: Institut de Recherche Mathematique, Universite Louis Pasteur. MATHDI **2002d**.03419

______ (1994b): L'interaction de trois types de representations en algebre lineaire (in French). In: A. Antibi & CIEAEM (Eds.), *Proceedings of Representations graphique et symbolique de la maternelle a l'universite (held at 10-16 Jul 1994, Toulouse, France).* Tome 2 (pp. 128–135). Toulouse, France: Toulouse Univ. MATHDI **1999d**.02900

______ (1994c): Le changement des registres dans la resolution d'exercises qui mettent en jeu la notion de "vecteur" (in French). In: A. Antibi & CIEAEM (Eds.), *Proceedings of Representations graphique et symbolique de la maternelle a l'universite. Tome 2.* (held at 10-16 Jul 1994, Toulouse, France) (pp. 229–233). Toulouse, France: Toulouse Univ. MATHDI **1999d**.02887

A. Robert, (2000): Level of Conceptualization and Secondary School Mathematics Education. In: J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 125–131). Dordrecht: Kluwer. MATHDI **2001a**.00360

A. Robert, J. Robinet & I. Tenaud (1987): *De la Géométrie à l'Algèbre Linéaire* — Brochure 72. Paris: IREM de Paris VII.

M. Rogalski (1991): *Un Enseignment de l'Algèbre Linéaire en DEUG A — Première Annèe*, Cahier de Didactique des Mathèmatiques n. 53. Paris: IREM de Paris VII.

______ (1994): L'Ensergnement de l'Algèbre Linéaire en Première Annèe de DEUG A. *La Gazette des Mathèmatiques* **60** (1994), 39–62.

______ (1996): Teaching Linear Algebra: Role and Nature of Knowledge in Logic and set Theory which Deal with Some Linear Problems. In: L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 20) held at Valencia Universidad, Spain, July 9-12, 1996*, vol. 4 (pp. 211–218). Valencia, Spain: International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME).

______ (2000): The Teaching Experimented in Lille. In: J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 133–149). Dordrecht: Kluwer. MATHDI **2001a**.00360

D. G. Zill & M. R. Cullen (2000): *Advanced Engineering Mathematics.* 2nd ed. Sudbury, MA: Jones and Bartlett Publishers.

대전광역시 유성구 구성동 373-1 한국과학기술원 자연과학부 우편번호 305-701
E-mail address: `yhchoe@cais.kaist.ac.kr`