韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 125-132

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 125-132

대학수학에서 증명문제의 다양한 평가

김 병 무 (충주대학교)

대학 교양수학 과정에서 수학적 명제를 증명하는 과정은 중요하다. 선행 연구들은 주관식 증명문제의 시험이 어려워 증명문제를 피하고 더 나아가 포기하게 만든다고 한다. 여기서는 대학 교양수학 과정에서 필요하고 중요한 기본 개념이나 정리를 선정하여 선택형 또는 참, 거짓 평가문항으로 개발하고 학생들에게 시험을 보게 하여 결과를 분석하고 이를 통해 증명문제의 두려움을 조금이라도 줄여주고 기본개념의 확실한 이해를 위해 도움을 제공하려고 한다.

I. 서론

대학수학에서 증명문제는 중요한 부분이다. 이를 통해 학생들은 논리적인 훈련과 합리적인 사고를 하게 되며 새로운 명제의 개발이나 발견에 대한 방법을 익히게 된다. 증명문제의 이해를 평가하는 주관식 문제는 학생들이 너무 어려워하고, 채점의 공정성에 많은 문제점을 가지고 있어 다양한 문제를 통해 증명문제를 다루어 학생들이 주관식의 경우보다 더 좋은 점수를 받고 가까이 할 수 있다는 느낌을 주려고 한다. 또 1학년에서 배운 기본적 내용(James Stewart, 1999/Paul A. Forester, 1998/R, Decker & D. Varberg, 1996/Thomas Stewart, 1999)을 얼마나 알고 있나 이를 알아보기 위해 충청지역의 A대학교 수학교육학과(29명), B대학교 수학교육학과(35명), C대학교 수학과(35명), D대학교 수학교육학과(30명) 3,4학년 129명의 학생에게 1학년에서 배우는 대학수학의 중요한 정리나 정의를 이용하여 만든 일부 증명 문제(Miriam Berezina & Abraha Berman, 2000)를 갖고 분석해 보려고 한다. 실제 문제 해결에서 수학의 이론적 지식이 필요하고 중요하다. 정리와 공식의 증명이 학생들에게 수학에 대해 더 깊고 좋은 이해를 주지만 어려움 때문에 기피할 수가 있으므로 이것을 막고 가까이 하게 할 필요가 있다. “수학의 학습목표를 측정하는데 주관식문제와 마찬가지로 선다형문제도 효과적인가? 1) 선다형문제는 주관식문제보다 쉽다. 2) 선다형문제는 학생들의 수학적 성취를 평가하는데 주관식문제만큼 효과적이다(Larry C. Elbrink & Bert K. Waits, 1970).”라는 연구 결과가 학업성취도를 높이고 평가에 대한 불안감 극복을 위해 어려운 증명 문제를 접근이 쉬워 보이는 객관식 문항으로 바꾸는 시도가 필요하다. 시험은 학습과정의 중요한 부분이므로 이를 이용하여 도움을 주도록 한다(김병무 · 김규상, 1998).

선다형문제와 사지선다형, O,X 문제는 채점의 공정성과 객관성이 있다. 선다형문제와 O,X 문제를 통해 이론적인 이해의 정도를 알아보기 위해 예제를 제시하여 평가를 한 다음 정리하고 증명문항 개발에 이용하려고 한다.

II. 본론

주관식 증명 문제를 선다형문제와 O,X(T/F) 문제를 만들어 제시하고 평가를 해본다.

1. 선다형문제

예제 1,2에서 정리와 증명이 주어지고 정리와 정의가 따라나온다. 각 증명은 몇 단계를 거치고 각 단계에서 사용된 정리 또는 정의를 지적하도록 요구받는다. 답은 한 개가 아니고 여러 개일 수 있다.

[예제 1]

(정리) 함수 $f(x)$는 구간 (a,b)에서 연속이고 $c\in(a,b)$일 때, $g(x)=\int_c^x f(t)dt$ ($x\in(a,b)$)로 정의된 함수 $g(x)$는 f의 원시함수이다. (즉, $g'(x)=f(x)$)

(증명) $x+\Delta x\in(a,b)$라 하자. g의 정의에 의해,

$$g(x+\Delta x)-g(x)=\int_c^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_c^x f(t)dt$$

Step 1. $=\int_c^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_c^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$

Step 2. $=f(d)\,\Delta x$, (d는 x와 $x+\Delta x$ 사이에 있다.)

이것은 $g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(d)$

Step 3. $=\lim_{d\to x} f(d)$

Step 4. $=f(x)$

* 다음 정리와 정의 어느 것이 증명과정(Step 1-Step 4)에서 이용되었는지 주어진 표에 O표 하여라.

T1. 함수 $f(x)$가 구간 [a,b]에서 연속이고 구간 (a,b)에서 미분가능하면, $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 인 c가 구간 (a,b)에 존재한다.

T2. 함수 $f(x)$가 구간 [a,b]에서 연속이면, $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$인 c가 구간 [a,b]에 존재한다.

T3. 함수 $f(x)$가 구간 [a,b]에서 적분가능하면, 모든 실수 k에 대해 함수 $kf(x)$는 구간 [a,b]에서 적분가능하고 $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ 이다.

T4. 함수 $f(x)$가 구간 [a,b], [b,c]에서 적분가능하면, 함수 $f(x)$가 구간 [a,c]에서 적분가능하고 $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$이다.

T5. 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 x_0의 근방에서 정의되고 근방의 모든 점 x에 대해 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$이고 $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$이면, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$이다.

D6. 함수 $f(x)$가 x_0에서 연속이면, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 이다.

T7. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ 이고 g가 y_0에서 연속이면, $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y)$이다.

	A대학	B대학	C대학	D대학	계
Step 1	30(86)	26(74)	26(90)	25(83)	107(83)
Step 2	16(46)	23(66)	15(52)	15(50)	69(53)
Step 3	**3(9)**	**5(14)**	**0(0)**	**2(7)**	**10(8)**
Step 4	31(89)	16(46)	24(83)	29(97)	100(78)
계	80(57)	70(50)	65(56)	71(59)	286(55)

예제1에 대한 학생들의 채점 결과는 다음 <표 1>과 같다.

<표 1> 예제 1의 정답 학생 수(괄호안은 %)

	T1	T2	T3	T4	T5	D6	T7
Step 1							
Step 2							
Step 3							
Step 4							

Step 3의 정답율이 낮은 것은 답을 두 개 골라야 하는 것(T5와 T7이 정답)이 이유가 될 수 있다.

[예제 2]

(정리) 함수 $f(x)$가 구간 [a,b]에서 연속이고 구간 (a,b)에서 미분가능하면 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 인 c가 구간 (a,b)에 존재한다.

(증명) 함수 g(x)를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Step 1. 함수 $g(x)$는 구간 [a,b]에서 연속이다.

Step 2. 함수 $g(x)$는 구간 (a,b)에서 미분가능하고 $g(a)=g(b)=0$이다.

Step 3. $g'(c)=0$ 인 c가 구간 (a,b)에 존재한다.

Step 4. $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

따라서, $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$이고, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 이다.

* 다음 정리와 정의 어느 것이 증명과정(Step 1-Step 4)에서 이용되었는지 주어진 표에 O표하여라.

T1. 함수 $f(x)$가 x_0에서 연속이면, 모든 실수 k에 대해 함수 $kf(x)$는 x_0에서 연속이다.

T2. 함수 $f(x)$가 x_0에서 미분가능하면, 모든 실수 k에 대해 함수 $kf(x)$는 x_0에서 미분가능하고 $(kf(x))' = kf'(x)$이다.

T3. 함수 $f(x)$, $g(x)$가 x_0에서 연속이면,함수 $f(x)+g(x)$는 x_0에서 연속이다.

T4. 함수 $f(x)$, $g(x)$가 x_0에서 미분가능하면, 함수 $f(x)+g(x)$는 x_0에서 미분가능하고 $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$이다.

T5. 함수 $g(x)$가 x_0에서 미분가능하고 $f(x)$가 $g(x_o)$에서 미분가능하면, $g(f(x))$는 x_0에서 미분가능하다.

T6. 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 우함수이면, $(f+g)(x)$도 우함수이다.

T7. 함수 $f(x)$가 구간 [a,b]에서 연속이고, 구간 (a,b)에서 미분가능하고, f(a)=f(b)이면 f'(c)=0인 c가 구간 (a,b)에 존재한다.

T8. 함수 $f(x)$가 구간 [a,b]에서 연속이고, $f(a)f(b)<0$이면 $f(c)=0$ 인 c가 구간 (a,b)에 존재.

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Step 1								
Step 2								
Step 3								
Step 4								

예제 2에 대한 학생들의 채점 결과는 다음 <표 2>와 같다.

<표 2> 예제2의 정답 학생 수(괄호안은 %)

	A대학	B대학	C대학	D대학	계
Step 1	4(11)	8(23)	3(10)	10(33)	25(19)
Step 2	0(0)	1(3)	2(7)	1(3)	4(3)
Step 3	**21(60)**	**15(43)**	**25(86)**	**28(93)**	**89(69)**
Step 4	3(9)	3(9)	1(3)	1(3)	8(6)
계	28(20)	27(19)	31(27)	40(33)	126(24)

Step 3는 정답이 하나 고르는 것이어서 상대적으로 정답율이 높았다고 할 수 있고, 나머지는 정답이 두 개 고르는 것이어서 정답율이 낮다고 볼 수 있는 이유가 된다.

2. 사지선다형 문제

* 다음 예제 3은 앞의 것과 다르다. 어느 단계(Step 1-Step 4)에서 연속성이 이용되었는가? (　　)

(예제 3)

(정리) 함수 $f(x)$, $g(x)$가 x_0에서 미분가능하면, 함수 $f(x)g(x)$는 x_0에서 미분가능하고

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$이다.

(증명) $h(x) = f(x)g(x)$라 하자. 도함수의 정의에 의해 $h'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x}$ 이다.

Step 1. $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}$

Step 2. $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)g(x_0) + f(x_0 + \Delta x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}$

Step 3. $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)[g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0)[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]}{\Delta x}$

Step 4. $= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$

* 다음 예제 4는 참인 명제이다. 주어진 명제를 증명하는데 이용된 문장을 (a-d)에서 골라라.

(예제 4) 수열 $[\ (1+\frac{1}{n})^n\ ]_{n=1}^{\infty}$ 의 수렴은 다음 어느 것으로부터 나오는가?

(a) 수열은 감소하고 2에 의해 아래로 유계이다.

(b) 수열은 증가하고 3에 의해 위로 유계이다.

(c) 수열은 증가하고 2에 의해 아래로 유계이다.

(d) 수열은 감소하고 3에 의해 위로 유계이다.

예제 3, 4에 대한 학생들의 채점 결과는 다음 <표 3>과 같다.

<표 3> 예제 3,4의 정답 학생 수(괄호안은 %)

	A대학	B대학	C대학	D대학	계
예제3	13(37)	11(31)	20(69)	20(67)	64(50)
예제4	7(20)	5(14)	17(59)	27(90)	56(43)
계	20(35)	16(23)	37(64)	47(78)	120(47)

'함수 f(x)가 x=a에서 연속이다.'의 정의는 $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$ 또는 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$를 이용하고, 위로(아래로) 유계이고 증가(감소)인 수열은 수렴하는 명제를 이용하여 푸는 문제이다. 정답율은 50%를 밑돌고 있다.

3. O, X문제

* 다음 예제들은 O, X문제이다. ( )에 표시하여라.

(예제 5) (a) f(x)가 x_0에서 연속이면, 그 점에서 f(x)는 미분가능하다.( )

(b) f(x)가 x_0에서 미분가능하면, f(x)는 x_0에서 연속이다.( )

(c) f(x)가 x_0에서 미분가능하기 위한 필요충분조건은 f(x)가 x_0에서 연속인 것이다.( )

(예제 6) (a) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.( )

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.( )

(c) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.( )

(예제 7) $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 이면, $F'(x) = f(x)$이다.( )

(예제 8) (a) f(x)가 우함수이고 연속이면, $\int_{-1}^{1} x^3 f(\cos x)dx = 0$이다.( )

(b) f(x)가 기함수이고 연속이면, $\int_{-1}^{1} x^3 f(\cos x)dx = 0$이다.( )

(c) f(x)가 연속이면, $\int_{-1}^{1} x^3 f(\cos x)dx = 0$이다.( )

예제 5, 6, 7, 8에 대한 학생들의 채점 결과는 다음 <표 4>와 같다.

<표 4> 예제 5, 6, 7, 8의 정답 학생 수(괄호안은 %)

	A대학	B대학	C대학	D대학	계
예제5-a	29(83)	34(97)	25(86)	30(100)	118(91)
예제5-b	29(83)	34(97)	26(90)	30(100)	119(92)
예제5-c	33(94)	35(100)	28(97)	30(100)	126(98)
예제6-a	22(63)	27(77)	19(66)	18(60)	86(67)
예제6-b	21(60)	27(77)	21(72)	18(60)	87(67)
예제6-c	31(89)	35(100)	27(93)	30(100)	123(95)
예제7	**7(20)**	**21(60)**	**3(10)**	**10(33)**	**41(32)**

	A대학	B대학	C대학	D대학	계
예제8-a	14(40)	32(91)	22(76)	19(63)	87(67)
예제8-b	23(66)	20(57)	17(59)	27(90)	87(67)
예제8-c	**4(11)**	**6(17)**	**19(66)**	**12(40)**	**41(32)**
계	213(61)	271(77)	207(71)	224(75)	915(71)

예제 7이 정답율이 낮은 것은 $f(x)$가 연속함수(또는 적분가능한 함수)라는 조건이 있어야 참인데 조건을 생각하지 않은 많은 학생들이 0라고 답했기 때문이다. 예제8은 모두 정답이 0이다. $f(cosx)$는 어느 함수에 대해서나 우함수임을 알고 있으면 답을 쉽게 알아낼 수 있었다. f가 연속함수라는 조건이 혼동을 초래하여 예제 8-c의 정답율이 낮았다고 생각한다.

III. 결론

증명 문제를 주관식으로 평가할 경우 낮은 성적과 채점의 공정성에 문제점이 지적될 수 있다. 선다형의 경우에도 사지선다형은 좋은 반응을 유도할 수 있으나 선다형 중 두 개 이상의 정답이 있는 경우는 정답율이 낮아 조심스럽게 접근해야 한다. O,X문제는 조건의 제시에 따라 정답율이 낮아질 수 있으므로 주의를 기울여야 한다. 증명문제의 여러 가지 유형 만들기는 쉬운일이 아니지만 주관식 중 서술형에 부담을 느끼는 경우 문제를 충분히 이해시키면서 알고 있는 것을 정확히 평가할 수 있는 문항개발에 노력을 기울일 기회를 가졌으면 한다. 수학이나 수학교육을 전공하는 학생과 교양으로서 대학수학을 배우는 전공을 하지 않는 학생을 비교하려 했으나 전공을 하지 않는 학생은 성적이 나오지 않을 것으로 여겨 담당 교수들이 조사를 하지 않는 것이 좋다는 의견을 제시했다. 교양으로서 수학을 가르치는, 같은 수준의 대학에서 증명문제를 다루는 것이 무리임을 보여주는 사례라 할 수 있다. 대학수학의 내용이 개념의 이해나 설명보다 간단한 계산문제를 다루어야 하는 현실을 보여주었다. 그래도 이들 학생에게 개념의 이해와 정리와 정의에 접근하는 방법으로 주관식 증명문제와 선다형 문제보다는 T/F문제를 이용하여 우선 접근이 용이하고 쉽다는 느낌을 주어서라도 도움을 주어야 한다. 우리 대학과 같은 수준의 대학학생, 수학이나 수학교육을 전공하는 학생 모두에게 수준에 맞는 증명 문제에 대한 객관식 문항개발은 채점의 공정성과 두려움을 주지않는 접근, 좋은 성적에 대한 기대감 등 긍정적인 면을 줄 수 있으므로 장려되어야 한다.

같은 문제에 대해 선다형 시험문제와 주관식 시험문제가 학생들에게 좋은 성적을 받도록 하는가? 선다형시험 문제는 너무 쉬운가? 선다형시험이 신뢰할만한 평가 목적에 이용될 수 있는가? 이러한 질문에 대답하는데 도움을 줄 수 있는 증거를 제공하기 위해 2004학년도 충주대학교 신입생 459명(주간256명, 야간 203명)을 임의로 선정하여 개강 첫째 주 시험(시험문제는 기초 수학능력을 측정)을 보고 정리한 것이 다음 <표 5>에 주어진다.

<표 5> 주,객관식 성적분포(주간 256명, 야간 203명, 33점 만점

	주관식문제			선다형문제		
	주간(197)	야간(59)	계(256)	주간(142)	야간(61)	계(203)
점수	1358	165	1523	2123	430	2553
평균	6.89	2.80	5.95	14.95	7.05	12.58

선다형시험이 주관식시험만큼 수학적성취의 측정에서 효과적이다. 선다형문제를 푼 학생이 충분한 시간이 주어졌는데 미도착 문제가 있고, 그것을 임의로 찍은 경우는 놀랍게도 한 명도 없었다. <표 5>에서 객관식시험을 본 학생들이 주관식 시험을 본 학생들보다 점수가 높게 나타났다. 중요한 것은 선다형시험이 주관식시험만큼 수학적성취의 측정에서 효과적이라는 것이다. 추측 요인 때문에 주관식과 비교하여 선다형문제가 의미있게 더 높은 점수를 받으리라는 것은 기대되었다. 그래도 대학수학 학습 능력이 부족한 학생에게 수학을 가까이 하는데 도움을 주고 불안감을 씻어주는 기회를 제공한다고 생각한다.

수학을 전공하고 연구하는 모든 사람은 수학 자체의 발전에만 관심을 기울이는 것도 중요하지만 소외된 영역이라 생각하는 대학 교양수학의 연구에도 관심을 갖고 노력을 기울여야 한다. 그들은 마지막으로 수학을 배우고 사회에 진입하면서 수학을 어떻게 생각하겠는가? 그들이 수학을 좋아하게 만들면서 증명문제를 다룰 수준까지 끌어올리는 작업에 수학교육에 종사하는 모두가 함께 노력하는 장이 마련되고, 좋은 이론만큼 실용적인 것은 없다고 하니 학생들에게 수학이 실용적임을 보이는 유용한 기회를 객관식 증명문제를 통해 마련해 주었으면 한다.

참 고 문 헌

김병무 · 김규상 (1998). 대학수학 학업 성취도에 영향을 미치는 요인 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 제**37**권 제**2**호, pp.159-172.

James Stewart (1999). *Calculus with Edition*, Brooks Cole Publishing Company.

Larry C. Elbrink & Bert K. Waits(1970). A Statistical Analysis of Multiple-Choice Examihations in Mathematics, *Two-Year College Mathematics Journal*, Vol.**1**, No.**1**, pp.25-29.

Miriam Berezina & Abraha Berman(2000), Proof reading and multiple choice tests, *Int. J. Math Science Technol.* Vol. **31**, No. **4**, pp.613-619.

Paul A. Forester (1998). *Calculus Concepts and Applications*, Key Curriculum Press.

R, Decker & D. Varberg (1996), *Calculus*, John Wiley, New York.

Thomas Stewart (1999). *Calculus*, 9th Edition, Addison Wesley Publishing Company.