韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 133-142

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 133-142

선형 대수 교육 과정과 교과서의 변천

신 경 희 (이화여자대학교)

선형대수 교육과정 연구 단체(LACSG, The Linear Algebra Curriculum Study Group)는 1990년 그의 결성과 함께 선형대수 교육과정에서 중점적으로 고려해야할 다섯 가지 추천 목록을 발표하였다. 그 중 가장 두드러진 특징은 기존의 형식적이고 엄밀한 벡터공간 중심의 선형대수 교육과정을 보다 실용적인 행렬중심으로 바꿀 것을 주장하고 있다. 본 연구에서는 벡터 공간 중심의 교육과정과 행렬 중심에 기반한 교육과정의 역사적 흐름에서 행렬 중심의 교육과정이 우위를 차지하게 된 배경을 살핀다. 또한 이러한 교육과정과 맥을 같이한 선형대수 교과서의 변천과, 행렬의 곱의 전개를 중심으로 두 중심사이의 차이를 논한다.

Ⅰ. 서론

선형대수(Linear Algebra)는 수학 뿐 아니라 대부분의 자연과학, 공학, 사회과학 등에서의 다양한 응용력 때문에 전 세계의 각 대학에서는 수학 전공 학생들 외에도 이공계 학생들은 물론 공학, 사회과학도들에게 필수과목이 된지 오래이다. 미국의 경우는 한 해 10만에서 많게는 30만 명의 학생들이 선형대수 과목을 이수하고 있고 그 과목을 가르치는 교수의 수도 한 해 삼천 명 이상을 헤아린다(F. Uhlig, 2002b). 우리나라에는 이 같은 공식적인 통계가 없지만 각 대학마다 매 학기 선형대수의 강좌수가 급격히 늘어나고 있다(신경희, 2004). 이같이 많아진 선형대수의 수요에 비하여 현재의 선형대수 교육과정은 어떻게 진행되고 있을까? 미분적분학이나 미분 방정식에 비해 상대적으로 새로운 추상적 개념이 많은 선형대수에서 학생들의 효과적인 개념 발생을 위하여 교수 학습은 어떠해야 하나? LACSG가 지적했듯이 선형대수의 수업이나 교수는 학생의 수요에 맞게 재조정되어야 한다. 본 논문에서는 이 물음의 답을 얻기 위하여 먼저 지난 50여 년 간 지나온 선형대수의 교육과정을 살펴보기로 한다. 1950년대 이후 선형대수를 가르치는 접근방법은 크게 두 가지로 요약된다. 그 하나는 군과 환 그리고 그들 사이에서의 동형사상을 논하는 좀 더 추상적인 벡터 공간으로의 접근과 다른 하나는 구체적이고 계산에 의한 배열 및 표상에 관한 행렬 대수로의 접근이 그것이다. 역사적으로 초기의 벡터공간 중심의 교수학습에서 점차 행렬 중심의 교수학습으로 바뀌는 동안 행렬이론은 그 자체로서 수학에서는 없어서는 안 될 중요한 영역으로 자리매김 되었다. 행렬이론은 선형대수를 이해하고 생각하고 대화하는데 중심 대상이 된 것이다(F. Uhlig, 2002.a).

미분적분학이나 미분방정식은 주로 문제해결의 방법이나 공식을 배우는데 반해 상대적으로 선형대수는 새로운 개념을 많이 다룬다. 선형대수는 현대수학의 도입부분으로 학생들에게는 과도기적 의미를 갖는다. 대학에서 고등 수준의 수학적 개념을 갖게 해주는 첫 번째 과목이라 해도 과언은 아니

다. 또한 선형대수는 공학, 삼림학, 역학, 경제학, 통계학 등의 각 학문영역에서 문제해결의 수단으로 쓰이기 때문에 일단은 학생들에게 쉽게 다가가야하고 수학을 전공하는 학생들에게는 이미 학습한 미분 적분학의 직관적인 것에서 앞으로 다루게 될 좀 더 엄밀하고 복잡한 추상대수나 고등 해석학과의 가교 역할을 할 수 있어야한다.

저자는 50여 년 된 선형대수에서 추상적인 벡터 공간과 행렬 및 그의 전개의 역사적 발생 과정과 교과과정을 살펴본 바 있다(신경희, 2004). 본 논문에서는 그에 따른 대학에서의 선형 대수의 교과과정은 역사적으로 어떠한 특징이 있었는지를 살피고, 새로운 21세기의 선형 대수의 바람직한 교과과정의 방향을 제시하고자 한다. 1950년대 초기의 선형대수 교과서부터 최근에 출판된 교과서에 나타난 여러 가지 개념 정의의 도입 가운데 행렬의 곱에 관한 정의의 도입과 전개에 관하여 논한다.

Ⅱ. 선형대수의 교육과정 - 벡터 공간 중심에서 행렬 중심으로

선형대수는 크게 두 갈래의 방향을 갖고 발달해 왔음을 알 수 있다. 그 하나는 보다 형식적인 벡터 공간의 연구와 그의 전개에 중점을 두었고 다른 하나는 방정식에 기초한 행렬과 행렬식의 전개이다. 마찬가지로 선형대수의 교과서와 대학에서의 교수 학습에서도 비슷한 발달 양상을 보여 왔다. 물론 행렬을 유한 차원 벡터공간상의 선형 변환으로 생각할 수 있고 행렬도 특별한 벡터공간의 한 원소로 여길 수 있다. 이 둘은 배척의 관계가 아니라 우선순위에 따라 내용 전개의 방법에 차이가 나는 것이다(신경희, 2004).

대수와 관련된 최초의 출판은 Birkhoff와 MacLane 의 'Modern Algebra'(1941)이었다. 그 전까지의 대부분 대수 교과서는 대수 방정식의 해를 구하고 그와 관련된 주제만을 다루었다. 처음 대학원에서 현재의 벡터 개념을 다루게 된 것은 1940년대 중반부터이고 학부에서는 1950년대 후반에서야 추상대수의 한 부분으로 벡터 공간을 다루었다(A. Tucker, 1993). Kemeny, Snell, Thompson과 Mirkel 등이 쓴 'Finite Mathematics Structure'(1959)은 벡터공간을 처음으로 다루었다. 이전까지의 책에서 행렬의 언급이 미미했던 것에 비하면 이 책에서 행렬에 기반한(matrix-based) 응용으로 벡터 공간을 소개한 것은 커다란 발전이었다. 오늘날 추상대수의 위대한 자취를 남긴 당시의 수학자는 Emmy Noether와 그녀의 제자인 E. Artin과 B. van der Verden들이었다. 대수 구조에 초점을 맞춘 이들의 연구는 일차 변환 이론의 획기적 발전을 가져오게 된다. 그들은 행렬을 두 기저 사이의 일차 변환을 의미하는 수단으로 사용하고 있다.

1960년대 이후 각 대학의 학부 교과 과정에는 선형대수가 필수 교과로 넓게 퍼졌고 1965년 대학수학 교과과정에는 벡터 공간 위주의 강의 계획서가 추천되기도 하였다. 이러한 관점은 두 가지의 의미를 안고 있었는데 하나는 학생들의 고학년에서 다룰 좀 더 추상적 수학의 선수과목으로 기하적으로 다루기 쉬운 벡터를 학습하게 함이었고 둘째는 다변수 함수의 미분 적분에 필요한 현대 벡터 공간의 접근 틀을 제공하는데 그 목적이 있었다.

한편 행렬에 기반한 모델의 사용은 디지털 컴퓨터의 발달로 폭발적인 증가를 가져오게 된다. 계산이 힘든 행렬에 대한 인식은 컴퓨터가 그 자리를 대체하면서 자연의 여러 현상들을 행렬로 표현하는데 지대한 발전을 하게 된다. 대학에서 미분적분학을 다루는 만큼이나 선형 대수학도 가르쳐야 한다는 학자들도 생기게 되었다. 행렬과 관련된 모델을 주위에서 얼마든지 찾을 수 있기 때문에 문제를 풀기 위한 도구로서 행렬기반의 선형 대수를 가르쳐야 한다고 주장하는 사람들이 급격히 많아졌던 것이다. 자연 현상의 한 모델이 변환의 과정을 거치고 다시 제자리로 돌아오는 운동을 한다고 하자. 그 현상은 행렬의 일차 변환으로 표현되고 거꾸로 제자리로 돌아오는 것은 행렬의 역 변환을 생각하게 된다. 자연 현상과 행렬의 밀접한 관계를 단적으로 보여주는 일례가 된다. 이것은 임의의 행렬이 역 행렬을 항상 가질 수 있는가의 문제로 귀결된다. 그렇다면 역행렬의 존재 조건은 무엇인가라는 행렬의 질적 접근이 필요하고 이것은 자연현상의 역운동의 결정조건이 되는 것이다. 이 질적 접근은 대수적 기하적 분석적 접근이 필요하게 된다. 그래야만 자연현상의 결과를 이해하고 예측할 수 있는 것이다.

1990년 선형대수 교육과정 연구 단체(LACSG)의 결성은 행렬에 기반한 선형대수의 중심으로의 변환에 또 하나의 계기가 되었다. 이 단체는 역학 컴퓨터과학, 제어공학, 경제학, 통계학 등 전에 비해 다양한 영역에서 선형대수의 중요성이 부각되고 있지만 상대적으로 그에 걸 맞는 선형대수의 교육과정 부재의 문제점을 공감하고 인식한 결과의 산물이었다(D. Calson, C. R. Johnson, D.C. Lay, A. D. Porter, 1993). 이 단체는 선형대수가 나아가야할 다섯 가지의 추천 목록을 발표하게 된다. 첫째의 목록은 수요자인 학생이 실제로 필요한 내용으로 교육과정을 채울 것과 둘째는 기존의 추상적인 벡터 공간의 내용 전개에서 보다 구체적이고 실용적인 행렬 중심의 교과 과정으로 전환할 것을 주장하였다. 셋째는 학습자의 관심이 어디에 있는지 필요한 것이 무엇인지를 교수가 인식하고 그 실천 사항으로 문제해결 기회 갖기, 가설을 세워보기, 토의 수업등 학생들의 활발한 수업 참여 유도를 권장하였다. 또한 효과적인 개념 발생을 유도할 수 있는 적당한 테크놀로지를 사용할 것과 마지막으로, 좀 더 엄밀하고 이론적인 행렬론을 적어도 한 강좌 정도는 그 다음 후속 과목으로 수강할 수 있게 하자는 것이었다.

이들이 언급한 추천 목록 중 두 번째는 선형대수가 자연 과학이나 사회 과학의 문제 해결의 수단이나 응용의 동기를 제공해 줄 수 있는 과목임을 공감하고 기존의 추상적이고 이론적인 시각을 좀 더 실용적인 행렬에 기반한 과정으로 바꾸자는 것이다. 구체적이고 많은 예제의 학습은 일반적인 개념이나 원리 또는 그에 따른 이론을 간단하고 명확히 하는데 도움을 줄 수 있다는 것이다. 그렇게 함으로써 선형대수의 강력하고 유용한 힘을 학습자 스스로 느낄 수 있다고 추천 이유를 밝히고 있다. 실제로 응용할 수 있는 강의 목록을 제시한 점도 특징으로 꼽을 수 있다. 행렬의 정의와 연산, 연립 선형 방정식과 관련된 행렬의 형태와 특징 역행렬의 존재성, 행렬식, 유클리드 공간으로서의 n차원 공간과 그의 성질, 기저, 내적, 고유치, 고유 벡터 등의 내용을 포함시킬 것을 권고하고 있다. 그러면서도 엄밀하고 형식적인 증명은 피하고, n차원 공간 R^n의 모든 특징들에 관해서는 학습하되

일반화된 추상적 벡터 공간의 확대는 다음으로 미룰 것을 주장한다. 시간과 학생들의 요구에 따라 관련된 항목을 추가할 수 있다. Alan Tucker는 자신의 논문(1993)에서, '지금도 수학과 이외의 다른 학과나 학부에서 개설되는 선형대수 과목은 벡터 공간보다는 행렬 위주의 내용을 다루고 있다. 비록 벡터 공간의 기본 개념은 다루어지지만 수학 전공자라 하더라도 다 대학원을 가는 것은 아니다. 지금이나 나중에 그들에게 필요한 것은 행렬이다. 그게 더 유용하다.'라고 주장하며 행렬 기반의 선형대수 교육 과정에 찬성하고 있다.

Ⅲ. 선형대수 교과서의 변천

앞에서 언급한 선형대수 교육과정의 흐름에 맞추어 그의 학습 교재인 교과서의 내용과 순서도 비슷한 양상을 띠게 된다.

1950년대 후반 선형대수에 관한 책이 처음으로 출판되기 시작한 이래 그동안 교과서는 어느 기준으로 벡터 공간과 행렬의 비중을 조정해왔을까? 대체로 1970년대 까지는 벡터공간에 기반한 교과서의 전개를 시도하고 있다. 1957년의 Murdoch의 책은 제1장을 벡터와 벡터공간으로 시작하고 있다. 이어 제2, 3장에서 행렬과 그의 대수를 다루고 있다. 1961년 L. J. Paige와 J. D. Swift의 'Elementary of Linear Algebra'에서는 제4장까지 벡터공간에 대해서 상세히 다루고 제5장에 비로소 행렬식의 정의가 시작되고 있다. 1968년, M. Marcus와 H. Minc도 *제1장에서 거의 완벽하게 벡터공간의 전개를* 다루고 있다. 1974년 P. Knopp과 1975년의 F. Lowenthal의 책에서도 일단은 n차원 벡터공간과 일반적 추상 벡터 공간을 정의한 후에 행렬을 다루고 있다(신경희, 2004).

이러한 벡터공간 중심의 전개는 80년대를 지나가면서 교육과정이 그러했듯이 교과서도 행렬 우선의 편집으로 서서히 바뀌게 된다. 1984년 R. C. MacCann 은 그의 저서 'Introduction to Linear Algebra'에서 연립방정식과 행렬, 행렬식을 도입하고 제3, 4장에서 벡터공간을 전개했다. 1987년 R. S. Johnson과 T. O. Vinson이 공저인 'Elementary Linear Algebra'에서는 행렬과 행렬식을 먼저 전개한 후에 제3장부터 벡터공간의 도입을 시도하였다. 같은 해 D. J. Hartfiel과 A. M. Hobbs도 비슷한 양상을 보이고 있다. 1989년 A. G. Hamilton의 선형대수 책에서는 가우스 소거법부터 시작하여 무려 제8장까지 행렬에 관한 자세한 정보를 다루고 있다. 1994년, 2000년 Anton, 1996년의 T. Lawson은 연립 방정식과 행렬의 도입, 행렬식 그 다음이 벡터와 벡터 공간의 전개를 이어갔다.

많은 대학에서 교재로 채택하여 쓰고 있는 D. C. Lay의 'Linear Algebra and its Applications' 의 경우를 보자. 1993년판에서는 제2장에서 n차원 유클리드 공간에서의 벡터와 벡터공간을 일부 다루었지만 2003년의 제3판에서는 벡터공간을 행렬, 행렬식 뒤의 제4장으로 옮겨갔다.

하지만 80년대 이후에도 유럽에서는 벡터공간 우선의 교과서가 출판되기도 하였다. 1981년 W. Greub는 벡터공간 우선의 전개를 하였고 1994년 영국의 P.M. Cohn도 벡터공간을 먼저 학습한 후에 행렬이 따라오는 순서를 채택하고 있다. 1991년 독일의 K. Janich는 벡터공간을 우선하여 책을 집필

하면서 행렬과 벡터공간의 개념요인이었던 연립 방정식을 벡터와 행렬을 학습한 후인 제7장에 배열하는 특징을 보였다.

그러면 내용 전개에서 벡터 중심의 전개와 행렬 중심의 차이는 있는가? 있다면 그 차이는 어떻게 나타날까? 본 논문에서는 '행렬의 곱'의 도입과 그의 전개를 중심으로 두 접근 방법의 차이를 비교하고자 한다. 먼저 벡터 공간 중심에서의 행렬의 곱은 정의 자체가 분명하게 나타나지 않는다. 여기에서 행렬은 벡터의 특별한 한 예일 뿐이다. 벡터 공간의 한 기저(basis)에서 또 다른 기저로 바뀌는 변환의 일종으로 행렬을 표현하고 그 변환의 곱을 행렬의 곱으로 인정한다. 여기에서 행렬은 단지 벡터의 한 예이고, 기저에 종속된 벡터에 대한 변환의 수단일 뿐이고 따라서 행렬의 원(entry)에 관심을 갖는다. 만약 두 행렬 $A=(a_{ij})$와 $B=(b_{ij})$가 있으면 $c_{ij}=\sum a_{ik}b_{kj}$로 행렬의 곱 $C=AB$를 정의한다. 반면 행렬에 기반한 교과서에서의 두 행렬의 곱은 행렬의 원 보다는 행렬의 행(row)과 열(column)에 관심을 갖는다.

a_j를 행렬 A의 j번째 열이라 하고 a'_i를 행렬 A의 i번째 행이라 하면

$$c_{ij}=a'_i b_j \text{와 } C=\sum a_k * b'_k \text{ ($*$는 행과 열의 곱을 나타냄)}$$

이고 $C=AB$가 되어 행과 열의 관계, $c_j=Ab_j$ 또는 $c'_i=a'_iB$로 행렬의 곱을 정의한다.(Tucker,1993)

여기에서 1858년 Cayley가 자신의 논문에서 변환의 이론을 행렬의 곱의 정의에 이용하고 있는 경우를 보자. 행렬은 행렬식이 나타난 후로부터 한참 후인 1821년 Cauchy가 처음 사용하였지만 오늘날 행렬의 기호는 Sylvester가 제안한 표기법이 오늘날까지 이어져오고 있다. Sylvester와 친구 사이인 Cayley는 행렬을 처음으로 연구한 수학자로 알려져 있다. 먼저 선형 변환 T_1과 T_2가 있어서

$$T_1 \,;\; \begin{aligned} x' &= ax+by \\ y' &= cx+dy \end{aligned} \qquad\qquad T_2 \,;\; \begin{aligned} x'' &= Ax'+By' \\ y'' &= Cx'+Dy' \end{aligned}$$

라 하고 변환을 차례로 시행하면 그 결과는 하나의 합성 변환

$$T_2T_1 \,;\; \begin{aligned} x'' &= (Aa+Bc)x+(Ab+Bd)y \\ y'' &= (Ca+Dc)x+(Cb+Dd)y \end{aligned}$$

와 동치가 된다. 이 결과는 1801년 Gauss의 연구에서 이미 알려진 것이지만 Cayley는 이것을 행렬의 형태로 표현을 하여 행렬 곱셈을 정의하게 된다.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa+Bc & Ab+Bd \\ Ca+Dc & Cb+Dd \end{pmatrix}$$

여기에서 변환의 순서를 바꾸면 일반적으로 다른 결과가 나온다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA+bC & aB+bD \\ cA+dC & cB+dD \end{pmatrix}$$

결과적으로 자연스럽게 교환이 성립하지 않는 곱셈의 예를 얻을 수 있다(보이어, 수학의 역사, 2000 ; Dorier, 1995). 선형대수의 교과서 출판으로는 거의 초기에 속하는 1957년에 출판된 Murdoch의

'Linear Algebra for Undergraduates에는 종속된 두 연립 방정식의 대입으로 행렬의 곱을 정의하고 있다. 이는 임의의 n개의 연립 방정식을 취하여 Cayley의 전개 방법과 같은 흐름을 유지하고 있다.

거의 40년이 지난 Fraleigh와 Beauregard의 'Linear Algebra'(1995년 제3판)에는 2원 1차 연립 방정식의 예를 이용하여 행렬의 곱의 도입을 학생들에게 쉽게 다가갈 수 있도록 전개하고 있다(35-38쪽). 다음과 같은 2원 1차 연립 방정식을 보자.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 19 \end{cases}$$

이 방정식을 스칼라 곱의 표현으로

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \end{pmatrix} \tag{1}$$

와 같이 나타내고, 이는 다시 첨가행렬(augmented matrix)의 형태로 표현된다.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \end{pmatrix} \tag{2}$$

결과적으로 이것은 크기가 다른 두 행렬(2 ×2 행렬과 2 ×1행렬)의 곱으로 나타난다. 이러한 전개는 앞에서 배운 스칼라 곱과 이미 학생들에게 익숙한 연립 방정식을 이용하여 벡터와 벡터와의 곱을 자연스럽게 전개한 것이다. 위 표현식 (1)과 (2)에

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

는 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$라고 할 때 '$AX$ 는 첨가행렬 A의 열벡터'라는 중요한 성질을 유도할 수 있다. 이는 곱이 가능한 두 벡터의 곱을 일반적으로 정의할 수 있는 개념 발생의 동기를 제공한다. '두 벡터 $A = (a_{ik})$와 $B = (b_{kj})$의 곱 $AB = (c_{ij}) = C$는 j번째 열이 A와 B의 j번째 열과의 곱으로 이루어진다'라는 두 벡터의 곱의 정의를 이끌어낸다. 이는 기호적으로

$$A\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdot\ \cdot & b_3 \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ Ab_1 & Ab_2 & \cdot\ \cdot & Ab_3 \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{C}$$

와 같이 열벡터와의 곱으로 표현된다. G. Hadley(1961)의 'Linear algebra'와 1989년에 출판된 A.G. Hamilton의 'Linear algebra'에서도 위와 비슷한 전개를 하고 있다. 'An introduction with concurrent examples'라는 부제가 암시하듯 다른 개념의 도입에도 실제 예에서 시작하여 점차 추상적인 개념 발생의 전개 방법을 채택하고 있다.

하지만 아직도 많은 선형대수 교과서는 학생들의 학습 동기유발과는 별도의 전개가 대부분이다. 이는 기존의 벡터공간 중심의 전개에서 필요한 행렬을 단순히 차용하는 순서를 밟아왔기 때문으로 추정된다. 다음의 두 예를 보자.

'두 행렬 A_{ij}와 B_{jk}의 곱 AB는 그의 성분이 다음과 같이 정해지는 $i \times k$행렬이다. 즉, AB의 (m, n) 성분은 A의 m행과 B의 n열의 각각의 성분을 나열되어 있는 차례로 각각 곱해서 이를 모두 더한 것이다.'

'두 행렬 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, $B=(b_{ij})_{n \times r}$ 의 곱은 $AB=(c_{ij})_{m \times r}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$이다.'

위의 두 예는 주위에서 흔히 접할 수 있는 대부분의 선형대수 교과서에서 인용한 것이다. 이러한 정의의 진술이 있기 전에 두 행렬의 곱이 필요한 동기 등의 언급은 생략되어 있다. 물론 이미 고등학교에서도 크기가 2인 두 행렬의 곱이 사용되고 있어 특별한 언급이 필요하지 않을 수 있었겠지만 실제 대다수의 학생들은 곱의 정확한 개념과 동기, 응용에 의외로 무지한 경우가 많다. 행렬의 대수적인 연산과 계산에는 많이 익숙해 있는 학생이라도 두 행렬의 곱에 대응하는 실제 문제 상황을 제시할 수 있는 경우는 드물다.

Ⅳ. 결론 및 논의

1950년대 선형대수 교과서가 처음 출판된 이래 벡터공간 우선의 책의 편집은 80년대부터는 일부를 제외한 거의 모든 책들이 행렬위주로 변하고 있다. 또한 이러한 흐름은 1990년 선형대수 교과과정 연구단체(LACSG)에서 행렬에 기반한 수업 전개를 추천한 이후 더욱 가속이 붙어왔다. 그것은 형식적이고 접근하기 어려운 벡터공간의 전개를 지양하고 학생들의 입장에서 보다 쉬운 개념 발생을 우선적으로 고려한 필연적 결과였다. 또한 역학, 공학, 선형계획법, Leslie행렬, 암호론, 부호론, 최적화 문제, 수치해석 등 행렬의 광범위한 응용은 이 흐름을 지속하게 할 것이다.

여기서 행렬 중심의 장점을 정리하고자 한다. 첫째, 행렬중심의 수업 전개는 엄밀하고 형식적인 벡터 공간 중심보다 상대적으로 이해하기 쉽다. 교수는 학생들에게 가능한 이해하기 쉬운 수학적 상황을 만들어줄 의무가 있다. 둘째, 학생들의 개념 발생적 동기유발이 상대적으로 쉽다. 교수는 학생들의 필요와 관심에 귀 기울여야한다. 쉬운 예에서 시작하여 점차 추상적인 수학적 이론으로의 전이가 필요하다. 셋째, 테크놀로지의 발달로 복잡한 행렬계산에서 자유로워졌다. 벡터 공간의 대수적 전개보다는 행렬은 상대적으로 계산이 복잡하다. 다양하고 첨단의 테크놀로지 발달은 이러한 우려를 없애고 선형대수의 좀 더 많은 응용력을 갖게 하는데 크게 기여하였다.

한편 행렬 중심의 수업전개에서 행렬 계산에만 치중하다보면 선형대수가 자칫 수학적 도구에 머무를 수 있는 단점이 있다. 행렬끼리의 연산과 약간의 변환과 응용에서 한 학기 수업 일정이 끝나버리는 경우 학생들은 선형대수가 가지고 있는 강력한 힘을 발견할 기회가 주어지지 않는다. 그리고 수학 전공자에게는 행렬대수 학습 자체가 선형대수의 목적이 되어 버리는 우를 범할 수 있다.

이에 선형대수 교육과정의 전개에서 다음과 같은 논의가 필요하다. 첫째, 수학전공, 비전공간의 교수 학습에서 개념 접근 방법, 전개, 응용의 차이가 있어야 한다. 전공이 아닐 경우라도 선형대수의

응용 범위는 사뭇 다를 수 있다. 수학과 각 학문과의 학제간 선형대수 연구와 그에 걸맞는 비전공 선형대수 교과서 집필이 필요하다. 둘째, 수학 전공자들에게는 좀더 형식적이고 일반적인 전개가 필요하다. 한 학기의 선형대수 수업만으로는 부족하다. LACSG의 권고 사항에도 있듯이 수학을 전공하는 학생들에게는 추상적인 벡터 공간, 행렬 해석학과 그의 응용, 그리고 수치적 선형대수의 전개학습을 위해서 심화된 두 번째 학기 수업 수강이 필요하다. 수학 전공자에게는 적어도 선형대수는 행렬대수뿐만이 아니라 선형대수가 가지고 있는 강력한 힘을 발견할 기회를 주어야한다. 또한 선형 대수에 대한 학기당 시간은 그 선행 과목으로 여겨지는 미분적분학에 할당된 시간 수에 비교하면 대부분 적은 편이다. 많은 학교에서 미분 적분학은 두 학기 또는 세 학기의 배당을 갖고 있지만 선형대수는 대부분 한 학기에서 마무리를 한다. 깊고 심도있는 학습은 새로운 동기 부여가 가능하고, 창의성 창출 효과도 크다. 선형 대수가 각자의 전공에 수단으로 쓸 수도 있지만 역으로 선형 대수의 여러 이론에서 미래를 예측하고 새로운 아이디어를 얻을 수 있다. 선형 대수가 가지고 있는 고유의 내용과 구조, 강력한 수학적 힘을 느낄 시간이 필요하다. 셋째, 한 개념이 발생하기까지는 역사적으로 많은 수학자들의 노력과 시행착오가 있었음을 인식하고 학습자의 효과적인 개념 발생을 위해서는 역사 발생적 원리에 따른 교재 구성이 필요하다. 본문에서 언급한 의미있는 행렬의 곱의 전개는 모두 역사의 개념 발생의 순서를 따르고 있음을 알 수 있다. 일찍이 Mager도 교과서는 학문의 발달을 주도한 수학자들의 원전에 충실할 것을 주장한 바 있다. 극단의 형식주의로 흐를 수 있는 선형대수의 각 개념의 도입과 전개시 역사적 배경과 상황을 활용하여 학생 스스로 유연한 개념 발생의 장을 만들어야 한다. 지식 창조의 과정과 역사적인 과정에서의 인식론적 장애와 학생들이 갖고 있는 인식론적 장애 사이의 유사성은 이미 여러 학자들에 의해 제시된 바 있다(Tall, 1991). 또한 이러한 과정을 실제 학생들의 교수 학습에 적용하여 그 효과의 검증 및 반성의 기회가 필요하다.

마지막으로 최근 출판된 혁신적인 선형대수 책의 전개 방식을 잠깐 보자. F. Uhlig는 다년간 선형대수의 교수 경험을 바탕으로 혁신적인 교과서(Uhlig, 2002a)를 출판하였다. 그가 말하는 선형대수에서 가장 중요한 개념은 벡터들의 선형 변환(Linear transformation)이다. 첫 장부터 선형변환으로 시작하여 벡터들의 일차 독립과 종속, 역행렬, 좌표 벡터, 행렬의 고유치도 모두 선형변환으로 설명한다. 처음에는 학생들도 어려워 하지만 어느 정도의 진도가 진행됨에 따라 학생들은 그 내용이 갖고 있는 개념을 정확히 파악하게 되고 시너지 효과와 더불어 선형대수의 강력한 힘을 느끼게 되고 파지 효과도 크다고 보고하고 있다(Uhlig, 2002b). 이에 대한 찬반도 만만치 않다(Burn, 2003; Dorier, J-L, Robert, A. and Rogalski, M., 2003). 이는 대학수학에서 미분적분학(Ganter, 2000)과 미분방정식(Blanchard, P.,1994 ; Devaney, R. L. and Hall, G. R., 1996)의 개혁에 이은 선형대수 개혁의 물꼬를 튼 것이 아닌가한다. 서론에서 언급했듯이 이러한 연구의 궁극적 목적은 선형대수에서 나타나는 새로운 추상 개념에 대한 학생들의 효과적인 개념 발생이다. 본 논문의 연구는 이러한 궁극적 목적을 위한 시작이다. 이에 대한 연구와 비판, 적용은 추후 과제로 남긴다.

참 고 문 헌

Boyer, C. B. (2000). 양영오, 조윤동역, 수학의 역사 상.하, 서울: 경문사

Eves, H, (1995). 이우영, 신항균역, 수학사, 서울: 경문사

신경희 (2004). 선형대수의 역사와 교육과정, 교과교육학연구, **제8권 1호**, 서울: 이화여자대학교

Tall, D. (1991), 류희찬, 조완영, 김인수 공역(2003), 고등수학적 사고, 서울: 경문사

Anton, H. (1994, 2000). *Elementary linear Algebra* 7th, 8th, John Wiley&Sons, INC

Artigue, M., Chartier, G. & Dorier, J,-L. (2000). 'Presentation of other research works', by J.-L. Dorier(ed.), *On the Teaching of Linear Algebra,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp.247-271.

Blanchard, P. (1994). Teaching differential equations with a dynamical systems view- point. *The College Mathematics Journal*, **25(5)**, pp.385-393.

Blanchard, P., Devaney, R. L. & Hall, G. R. (1996). *Differential Equations, PWS(paper back)*; 2 nded. ,Brooks/Cole, 2002.

Burn, R. P. (2003). Some comments on 'The Role of Proof in Comprehending and Teaching Elementary Linear Algebra' by F. Uhlig, *Educ. Studies in Math.* **51**, pp.183-184

Carlson, David, Ed. (1997). *And Others. Resources for Teaching Linear Algebra.* MAA Notes Volume **42**.

Cohn P. M. (1994). *Elements of Linear Algebra*, Chapman& Hall

Dorier, J-L. (1995). A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory, *Historia Mathematica* **22**, pp.227-261

Dorier, J-L, Robert, A. & Rogalski, M. (2003). Some comments on 'The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra' by F. Uhlig, *Educational Studies in Mathematics* **51**; pp.185-191

Dorier, J-L. Robert, A. Jacqueline, R & Rogalski, M. (2000). On a research programme concerning the teaching and learning of linear algebra in the first-year of a French science university, INT. J. *MATH. EDUC. SCI. TECHNOL.*, **vol .31, no. 1,** pp.27-35

Ganter, S. L (2000). *Calculus Renewal*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York

Gonzalez-Vega, Laureano. (1999). *Using Linear Algebra to Introduce Computer Algebra, Numerical Analysis, Data Structures and Algorithms (and To Teaching Linear Algebra, Too)*

Gerner G. (1981). *Linear Algebra*, Springer-Verlag

Hamilton, A. G. (1989). *Linear Algebra*, Cambridge University Press

Harel, G. (2000). 'Three principles of learning and teaching mathematics: Particular reference to linear algebra: Old and new observations', in Jean-Luc Dorier(ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer, p.177-190

Harel. Guershon. (1987). Variations in Linear Algebra Content Presentations. *For the Learning of Mathematics--An International Journal of Mathematics Education*; **v7 n3** pp.29-32 Nov 1987.

Janich K. (1991). *Linear Algebra,* Springer-Verlag

John Fauvel and Jan van Maanen, (2000). *History in Mathematics Education*

Johnson, R. S. Vinson, Jr. T .O. (1987). *Elementary Linear Algebra*, HBJ

Konyalioglu. A. Cihan, Ipek. A. Sabri, Isik. Ahmet. (2003). *On the Teaching Linear Algebra at the University Level: The Role of Visualization in the Teaching Vector Spaces.*

Knopp, P. J. (1974). *Linear Algebra an introduction*, Hamilton Publishing Company

Lawson T .(1996). *Linear Algebra*, John Wiley & Sons, Inc.

Lay, D. (1993, 2003). *Linear Algebra and its Applications*, Addison-Wesley,

Manes, Michelle. (1996). *Student Learning in Learning in Linear Algebra*: The Gateways To Advance Mathematical Thinking Project.

Marcus M. and Minc H. (1968). *Elementary Linear Algebra*, The Macmillan Company

McCann R. C. (1984). *Introduction to Linear Algebra*, HBJ

Murdoch, D. C., Linear Algebra for Undergraduates, John Wiely&Sons, INC, 1957

The Linear Algebra Curriculum Study Group (1993). 'Recommendations for a first course in linear algebra,' *The College Mathematics Journal*, **v24**, pp.41-46.

Tucker, Alan. (1993). The Growing Importance of Linear Algebra in Undergraduate athematics. *College Mathematics Journal*; **v24 n1** pp.3-9 Jan 1993.

Porter, Gerald J. (1995). *An Interactive Text for Linear Algebra.* Final Report.

Uhlig, F. (2002a). *Transform Linear Algebra, Upper Saddle River*: Prentice-Hall, 504+xx p.

Uhlig, F. (2002b). *'A new unified, balanced, and conceptual approach to teaching linear algebra,' to appear in Linear Algebra and its Applications*, vol.(Haifa 2001 Conference issue),11p.