韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 265-276

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 265-276

수학 영재교육에서 기하학의 역할 및 지도

한 인 기 (경상대학교)
Kombarov A. (Moscow State University)

In this study we in detail analyze Kolmogorov's viewpoint of mathematical abilities, and conclude that school geometry plays important role in developing and upbringing mathematical abilities. We discuss meanings of school geometry in gifted students education, and draw didactical principles concerned with gifted students education. We suggest some geometrical materials which aim for developing and upbringing mathematical abilities.

1. 서론

영재교육진흥법(2000)의 제 2조에서 영재는 재능이 뛰어난 사람으로서 타고난 잠재력을 계발하기 위하여 특별한 교육을 필요로 하는 자로 규정되어 있다. 이로부터, 수학 영재교육에서 수학적 재능이 중심적인 개념이며, 수학 영재교육의 방향이 영재아의 수학적 재능의 계발, 육성을 향해야 함을 알 수 있다.

수학적 재능에 관련된 대표적인 국외 연구로, Krutetski(1968)는 수학 문제해결 과정을 중심으로 수학적 재능의 구성 요소들을 수학적 정보의 획득, 수학적 정보의 변형, 수학적 정보의 저장, 일반적인 종합적 요소인 지력의 수학적 지향성을 들었다. 국내 연구로, 한인기(1999a)는 재능을 사회의 발달 과정에서 축적된 사회적으로 유용한 어떤 활동의 성공적인 수행과 관련된 인간의 특성들이나 특질들로써, 주어진 행동의 성공적인 수행의 조건이 되며, 지식, 기능, 능력 등과 동일시 될 수 없으며, 이들의 획득 과정에서 차이를 유발시키는 개인적-심리적인 특성들로 정의하고, 수학적 재능의 변인을 일반적 재능의 변인과 특수한 수학적 재능의 변인으로 나누어, 그 구조를 규명하려 시도하였다. 한편, 한인기(2001)는 수학적 재능에 대한 Kolmogorov의 견해를 분석하고, 이를 구체화하였다. 기술한 연구들은 수학적 재능의 본질을 규명하고, 수학적 재능의 구조 및 구성 변인들을 밝히려는 의미로운 시도라는 측면에서 그 가치를 평가할 수 있을 것이다. 그러나, 수학적 재능의 계발 및 육성에서 중등학교의 대수, 기하, 확률 및 통계, 해석학 등의 영역이 구체적으로 어떤 역할을 하며, 교육적으로 어떤 의미를 가지는가에 대한 심도있는 분석은 드물었다.

본 연구에서는 수학적 재능에 대한 Kolmogorov의 견해를 바탕으로 수학적 재능의 계발 및 육성에서 중등학교 기하학의 역할 및 교육적 의의를 분석하며, 수학영재교육을 위한 몇몇 구체적인 교수학적 원리를 추출하고, 수학적 재능의 계발 및 육성을 위한 기하교육의 실제를 몇몇 사례를 중심으

로 고찰할 것이다. 이를 통해, 수학적 재능의 계발 및 육성을 위한 수학 영재교육의 실현을 위한 의미있는 방향을 모색하며, 특히 기하학 영역에서의 수학 영재교육의 내실화를 위한 구체적인 방향 및 자료들을 제시할 수 있을 것이다.

2. 수학적 재능과 기하학

수학적 재능에 대한 Kolmogorov의 견해를 중심으로, 수학적 재능의 계발 및 육성에서 기하학의 역할을 밝히도록 하자. Kolmogorov는 수학적 재능을 알고리듬적 측면, 기하학적 측면, 논리적 측면으로 나누었다. 알고리듬적 측면에 관련하여, Kolmogorov(1959, p.9)는 '복잡한 문자식을 변형하고, 일반적인 방법으로 접근할 수 없는 방정식의 풀이를 위해 성공적인 방법을 찾아내는 것과 같은 대수적인 조작의 수행 능력은 수학자의 진지한 학문 탐구에 요구되는 재능에 상당히 근접해 있다. 일반적으로, 두드러진 대수적 조작의 발달(알고리즘적 재능이라고도 부르는)은 수학적 천재성의 한 특징으로 여겨진다'고 했다. Kolmogorov는 중등학교 대수에서 이러한 유형의 재능이 요구되는 대표적인 것으로 인수분해와 방정식의 풀이를 들었다. 예를 들어, Kolmogorov는 다음 문제에서 알고리즘적 재능과 관련된 예리한 지적 활동을 요구된다고 하였다.

문제 1. x^5+x+1을 인수분해하여라.

문제 2. $x^{10}+x^5+1$을 인수분해하여라.

수학적 재능의 기하학적 측면과 관련하여, Kolmogorov(1959, p.10)는 '수학자들은 가능하면 그들이 연구하는 문제들을 기하학적으로 구체적 형태로 나타내려 한다. 그러므로, 기하학적 상상력(기하학적 직관이라고도 부르는)은 수학의 모든 영역에서 중요한 역할을 한다는 것은 두말할 나위도 없을 것이다. 예를 들어, 어떤 학생이 눈을 감고 그림에 의지하지 않고, 정육면체의 중심을 지나며 한 대각선과 직교하는 평면이 정육면체와 교차하여 생성하는 절단면을 상상한다면, 그 학생을 훌륭한 수학자(일반 학생들과 비교했을 때)라 할 수 있을 것'이라고 주장했다. Kolmogorov는 다음 문제들이 중등학교 수학교육에서 기하학적 직관에 관련된 것들이라 하였다.

문제 3. 정육면체에 두 개의 정사면체를 넣었는데, 정육면체의 네 꼭지점은 한 정사면체의 네 꼭지점이 되고, 나머지 네 꼭지점이 다른 정사면체의 꼭지점이 되도록 하였다. 이들 정사면체의 공통 부분의 부피와 정육면체 부피의 비를 구하여라.

문제 4. 공간사각형이 구에 외접하고 있다. 접점들이 한 평면에 속한다는 것을 증명하여라.

문제 5. 정사면체의 임의의 내부점으로부터 면들까지 거리의 합은 일정하다는 것을 증명하여라.

문제 6. 정사면체에서 밑면에 그은 높이의 중점과 밑면의 꼭지점들을 연결한 직선들은 서로 직교한다는 것을 증명하여라.

수학적 재능의 논리적 측면과 관련하여, Kolmogorov(1959, pp.10-11)는 '순차적인 논리적 고찰을 행하는 것은 수학적 재능의 본질적인 측면이다. 중등학교에서 이러한 측면을 계발하는 대표적인 영역은 정의, 정리, 증명으로 이루어진 기하학이다. 복잡한 논리적 구조(틀)의 정확한 이해라는 측면에서 보면, 학생들이 가장 어려워하는 것이 수학적 귀납법이다. 수학적 귀납법에는 '만약..', '그러면...'이라는 표현이 많이 있기 때문에, 많은 학생들은 수학적 귀납법의 실제적인 내용을 잘 알지 못한다. 수학적 귀납법의 원리를 정확히 이해하고, 사용하는 것은 수학에 필요한 논리적인 성숙도를 판가름하는 좋은 기준이 될 수 있다'고 했다. Kolmogorov는 친숙하지 않는 상황에서 논리적으로 고찰하는 능력을 획득하는 것은 매우 어려우며, 수학 올림피아드에서 학생들에게 발생하는 예상치 못한 가장 어려운 문제는 예비적인 지식은 필요하지 않지만, 정확히 물음의 뜻을 파악하고 논리적으로 고찰해야 하는 문제라고 하면서, '숲에 800000그루의 침엽수가 있는데, 이 나무들 중에는 500000개 이상의 침(침엽수 잎의 침)을 가진 나무가 한 그루도 없다고 한다. 이때, 적어도 두 그루의 침엽수가 같은 개수의 침을 가지고 있다는 것을 증명하여라'와 같은 문제를 예로 들었다. 그리고, 다음 문제들이 수학적 재능의 논리적 측면에 관련된다고 했다.

문제 7. 500개의 상자에 사과가 담겨있다. 상자에는 240개보다 많은 사과를 넣을 수 없다고 한다. 적어도 세 개의 상자에 같은 수의 사과가 담겨있음을 증명하여라.

문제 8. 하루에 시계의 시침과 분침이 몇 번 직교하는가?

문제 9. n개의 변을 가지는 볼록다각형은 최대 몇 개의 예각을 가질 수 있는가?

문제 10. 볼록13각형을 평행사변형들로 분할할 수 없음을 증명하여라.

기술한 수학적 재능의 다양한 측면에서 기하학은 기하학적 측면, 논리적 측면에 긴밀히 관련된다. 수학적 재능의 기하학적 측면은 공간도형에 대한 상상, 이에 관련된 논증이라 할 수 있으며, 논리적 측면은 다양한 수학적 개념이나 논리적 도구(수학적 귀납법, 귀류법)를 이용한 논증이라 할 수 있다.

3. 영재교육에서 기하학의 교육적 의의

영재교육에서 기하학의 의의를 살펴보자. 첫째, 기하학은 개개 학생의 사회화를 위해 필요한 지식이다. 기하학적 개념, 법칙, 정리에 관한 지식은 모든 사람에게 필요하다. 혹자는 기하학이 실제 생활에 어떻게 활용되며, 앞으로의 진로 선택이나 교육에 얼만큼의 역할을 하는가를 질문하며 구체적인 대답을 요구한다. 그러한 물음에 대해 기하학적 지식의 실제적 활용의 측면에서 진지하게 답을 구하려 시도하면, 곧바로 어려움에 봉착하게 된다. 실제로, 일상생활에서 기하학적 지식의 활용도 교과서에 제시된 정보의 양처럼 많지는 않다. 그러나, 우리 사회에 현존하는 문화를 이해하고, 다른 사람들과 원만한 의사소통을 하며 건전한 문화인으로 살아가기 위해, 기하학적 지식은 필수적이라 할 수 있다. 예를 들어, 어떤 한국 사람이 러시아의 유명한 화가인 레삔을 모른다고 하여 교양의 유무에 대

해 말하지는 않지만, 평행, 수직, 삼각형, 사각형, 피타고라스 정리를 모른다면, 교양인이라 하지 않을 것이다. 특히, 영재아의 사회화 및 문화적 기초 소양이라는 측면에서 기하학은 중요한 역할을 한다.

둘째, 기하학 교육은 정신적 수양을 가능하게 한다. 예를 들어, Tolstoi는 <전쟁과 평화>에서 공작 Bolkonski는 '인류에게 있어 죄악의 오직 두 가지 원천은 태만과 미신이며, 오직 두 가지 덕은 행동과 지성이 있다'고 했다. Bolkonski는 자신이 딸을 직접 양육했으며, 딸에게 두 가지 중요한 덕을 길러주기 위해, 대수와 기하학을 가르쳤다고 기술하고 있다. 한편, 유명한 수학자인 Arnold(1999)는 학교에서 증명의 예술을 배우지 못한 사람은 올바름과 그렇지 못한 것을 구분하지 못하며, 그러한 사람은 무책임한 술수, 정략을 사용하며, 그 결과 집단적인 최면상태와 사회적인 혼란이 야기될 수 있다고 했다. 즉, 기하학의 교육은 인간의 정신을 올바른 방향으로 육성하는 중요한 도구가 된다고 할 수 있으며, 이러한 주장은 수학이 인간의 영혼을 진리로 향하게 하는 학문이라는 Socrates의 주장과도 같은 맥락에서 이해할 수 있다.

셋째, 기하학은 아름다움에 대한 미적 감각을 개발시킬 수 있다. 기하학의 문제들을 풀면서 우리는 자주 아름다운 풀이, 아름답지 않은 풀이에 대해서 이야기를 한다. 아름다운 풀이란 간결하고 평이한 기하학 개념을 이용한 풀이를 의미하는 경우가 많으며, 그렇지 않은 풀이는 복잡한 개념들이 많이 사용된 풀이를 의미하는 경우가 많다. 이러한 기하학적 미학은 일상적인 우리들의 의사소통이나 문제해결을 간결하고 평이하며, 쉽게 이해될 수 있도록 하는 바탕이 될 것이다.

넷째, 기하학은 지적 계발을 돕는다. 수학이 인간의 인지적 발달의 중요한 도구라는 것은 누구도 의심하지 않는다. 신경심리학이나 생리심리학에서 대뇌의 기능분화에 대해 폭넓은 연구가 진행되고 있다. 일반적으로, 좌반구는 언어적, 분석적, 논리적, 산술적인 기능을 담당하며, 언어적, 논리적, 분석적인 방법으로 문제를 해결하며, 우반구는 직관적, 유추적, 종합적, 기하학적, 공간적인 기능을 담당하며 공간적, 직관적, 종합적으로 문제를 해결하는 것으로 알려져 있다. 기하학은 대뇌의 좌반구와 우반구를 고루 발달시키며, 특히 대수교육에서 체계적으로 계발하기 힘든 직관적, 공간적 사고 능력을 길러주는 중요한 도구가 될 수 있다.

다섯째, 기하학은 창의성을 계발시킬 수 있다. Shmilin(1979)에 의하면, 창의적 사고는 주어진 과제를 해결하기 위하여, 문제해결자가 이미 가지고 있는 정보(과거의 경험과 지식)들과 과제로부터 새로운 정보를 추출하여, 이 정보들을 새로이 조립함으로써, 가치있는 어떤 사물이나 아이디어를 만들어내는 것에 관련된다고 했다. 문제상황으로부터 정보를 추출하여 기존 정보와의 새로운 조합을 통해 요구된 결론을 이끌어내는 논증이 중요한 부분을 차지하는 기하학은 영재아의 창의성 계발에 중요한 역할을 한다고 할 수 있다.

여섯째, 기하학은 영재아의 발굴에서 중요한 역할을 한다. 러시아에서 수학 영재아의 발굴은 수학경시대회를 통해 이루어진다. 모스크바의 수학경시대회 체계는 5~7학년 학생을 대상으로는 수학축제, 8~11학년 학생을 대상으로 하는 모스크바 올림피아드로 구성된다. 보통, 모스크바 올림피아드는 수학축제의 1주일 후에 개최된다. 이때, 각 학년마다 5~6문제씩 출제되며, 5시간 동안 문제를 풀게 된다. 그렇지만, 모든 문제를 성공적으로 푸는 경우는 거의 없다. 올림피아드에서 기하학은 훌륭한

수학적 재능을 가진 아동을 발굴할 수 있는 가장 흥미로운 분야라 할 수 있다. 수학 올림피아드에 전문적으로 참가하는 학생들은 기하학 문제를 풀지 않는 경우가 종종 있다. 그러나, 올림피아드에 처음 출전하는 학생들은 오직 한 문제밖에 풀지 못하는 경우가 있는데, 이것이 바로 기하학 문제이다. 왜냐 하면, 올림피아드에 출제되는 문제들 중에서 중등학교 수학문제와 가장 유사하게 보이는 문제가 바로 기하학 문제이기 때문이다. 모스크바 경시대회에서는 그러한 학생들이 수학을 더 공부하여 수학학교에 입학할 수 있도록, 이들을 수상하는 경우가 종종 있다.

4. 수학 영재교육에 관련된 교수학적 원리

러시아의 대표적인 영재학교인 Kolmogorov 수학-물리학교의 교수-학습의 전반적인 체계(틀)에 대한 전반적인 설명은 Kombarov · 한인기(1996)에서 제시되어 있으며, Kolmogorov 수학-물리학교의 교육과정은 한인기(1999b, 2000a)에 상세히 기술되어 있기 때문에, 본 연구에서는 이들에 대한 논의는 생략하고, 수학-물리학교에서의 교수-학습에 관련된 몇몇 교수학적 원리들을 살펴보자.

첫째, 정기적인 자율학습의 원리. 교육에서 좋은 결과를 내려면, 정기적이고 심도있는 자율학습이 필요하다. 이를 위해, 교사는 일정양의 숙제를 제공하는데, 숙제를 위한 기초 자료로 Kvant와 Matematika v Shkole라는 두 종류의 잡지를 많이 이용한다. 러시아의 대부분의 수학-물리 학교에서는 이들 잡지를 구독하는데, 이들 잡지에는 중등학교나 대학교에서 지도되는 수학 내용에 대한 심도있는 교재 연구가 제시되어 있으며, 새로운 수학 문제들이 꾸준히 제공되고 있다. 학생들에게 숙제를 낼 때, 너무 어렵거나 너무 쉬운 문제는 그리 바람직하지 않다. 일주일 분량의 숙제로 가령 10~15문제를 제시할 때, 7~8문제는 모든 학생이 접근할 수 있는 문제를, 3~4문제는 소수의 학생들이 풀 수 있는 문제를, 1~2문제는 수학 실력이 가장 좋은 극소수의 학생들에게 가능한 문제를 제시해야 한다.

둘째, 학습 주제의 상호관련성 원리. 교수-학습 자료를 각각의 주제에 따라 이산적으로 지도하는 것은 바람직하지 않다. 몇 개의 주제에 복합적으로 관련된 문제들은 학생들이 수학적 정보를 평가하고 종합적인 사고를 하도록 하는데 도움을 줄 수 있다. 그러므로, 두 개 혹은 세 개의 소주제를 하나의 커다란 주제로 묶어 이들 소주제에 관련된 복합적인 문제를 다루도록 하는 것은 유익할 것이다.

셋째, 자기학습 능력의 원리. 수학 영재교육을 통해 미래의 학술 연구자를 양성하게 되므로, 이 원리는 매우 중요하다. 왜냐 하면, 수학자들은 학술적인 문장(논문)을 읽고 독자적인 연구를 수행할 수 있어야 하기 때문이다. 그러므로, 교사에 의해 권고되어지는 논문이나 참고도서를 혼자서 읽어가면서 자신의 수학적 식견을 넓히는 경험은 매우 중요할 것이다. 중등학교 수학영재아들에게 권장되어지는 대표적인 참고 문헌이나 논문들을 Kolmogorov(1959), Shklyarski; Chentsov & Yaglom(1970, 1974) 등에서 볼 수 있으며, Kvant와 Matematika v Shkole의 논문들도 자주 활용된다.

넷째, 자기조절 및 반성의 원리. 학생들은 문제를 해결한 후에 자신의 해답을 정답과 비교하여, 이들이 일치하지 하지 않으면, 무엇이 일치하지 않는가를 눈으로 확인한 후에는 그 문제가 해결된 것으로 간주하고 다음 문제로 진행해 간다. 실제로는, 이것으로 문제해결이 완결된 것은 아니다. 학생

은 정기적이고 체계적으로 자신의 오류를 분석하고, 문제해결자로서 자신의 강점과 약점을 알고 있어야 한다. 이러한 정보는 문제해결 과정에서 체계적인 자기 조절을 통해 오류의 발생가능성을 감소시킬 수 있으며, 문제해결에 대한 반성적 사고 활동의 경험을 풍부하게 할 수 있을 것이다.

다섯째, 다양한 풀이의 원리. 한 문제에 대해 다양한 풀이를 찾아보게 하고, 이들 풀이를 다양한 시각에서, 예를 들어 문제해결 접근의 참신성, 문제해결에 필요한 정보의 양, 문제해결의 아름다움, 풀이의 실용적 가치 등을 중심으로 비교하도록 하는 것은 영재아들에게 사고의 유창성과 유연성의 계발 및 육성, 수학에 대한 심미적 가치의 함양에 유익할 것이다.

여섯째, 학습자료의 학술적 가치의 원리. 수학 영재교육을 통해 학생들에게 제시되는 자료들은 수학적으로 가치로운 것들이어야 하며, 현대수학의 연구 주제에 관련된 자료, 새로운 수학적 발명으로 이끌 수 있는 자료, 수학사의 발전에 있어 획기적인 전환점이 되었던 문제들을 학습 자료로 선택하는 것은 영재교육 담당 교사의 중요한 역할이라 할 수 있다. 예를 들어, 주어진 정사각형을 합동이 아닌 정사각형들로 분할하는 문제, 1900년대 초반에 유명해진 힐베르트 문제에 관련된 주제들, 유클리드 알고리즘을 이용한 정사각형의 한 변과 대각선의 통약불가능성의 문제 등은 수학적으로 의미있는 주제들이라 할 수 있다.

일곱째, 수학적 사고의 계발 및 육성의 원리. 수학사에서 보면, 수학적인 발명에 관련하여 여러 가지 수학적 사고과정이 기술되어 있지만, 대표적인 것이 유추라 할 수 있다. 영재아들에게 수학적 유추를 통해, 새로운 명제를 추측하고 상응하는 증명의 과정을 구성하도록 하는 경험을 제공하는 것은 의미로울 것이다. 한편, 수학 영재아에게 비판적 사고력의 계발, 육성은 중요하다. 어떤 명제에 대한 증명 과정을 구성하는 수학적 아이디어나 구조를 파악하고, 증명과정에 포함된 오류를 추출하는 것은 수학적 개념이나 정리의 개선에 중요한 역할을 할 것이다.

5. 수학 영재교육에서 기하 학습의 실제

기술한 기하학의 교육적 의의, 영재교육을 위한 교수학적 원리에 관련하여, 수학 영재교육에서 활용할 수 있는 기하학의 주제들을 살펴보도록 하자.

(1) 삼각형의 작도 문제

Kvant의 2003년도 1권에 Dzukov와 Akulich는 '삼각형이 유일하게 결정되는가?'라는 제목으로, 삼각형에서 세 높이, 세 중선, 세 각의 이등분선이 주어졌을 때, 삼각형을 작도할 수 있는가에 관련된 문제를 고찰하였다. 우선, 길이가 a, b, c인 변에 그은 삼각형 ABC의 높이 h_a, h_b, h_c이 주어졌을 때, 삼각형 ABC는 작도 가능한가를 살펴보자. 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하고, $\eta_a=\frac{1}{h_a}$, $\eta_b=\frac{1}{h_b}$, $\eta_c=\frac{1}{h_c}$라 하면, $S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$이므로, $a:b:c=\eta_a:\eta_b:\eta_c$가 성립한다. 마지

막 등식으로부터, η_a, η_b, η_c가 삼각부등식을 만족시키면, h_a, h_b, h_c을 높이로 가지는 삼각형 ABC가 존재한다는 것을 알 수 있다.

한편, h_a, h_b, h_c을 높이로 가지는 삼각형 ABC도 자와 컴퍼스를 이용하여 작도를 할 수 있다. 등식 $a:b:c = \eta_a:\eta_b:\eta_c$은 $a:b:c = h_b:h_a:\frac{h_a h_b}{h_c}$와 같이 쓸 수 있다. 이로부터, 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC는 변의 길이가 h_b, h_a, $\frac{h_a h_b}{h_c}$인 삼각형과 닮음임을 알 수 있다. 이제, 변 A′B′이 $\frac{h_a h_b}{h_c}$이고, 변 A′C′이 h_b, 변 C′A′이 h_a인 삼각형 A′B′C′를 작도하자. 꼭지점 A′에서 높이 A′D′을 작도하고, 반직선 A′D′에 길이가 h_a인 선분 A′D를 작도하자. 그리고 나서, 점 D를 지나 직선 B′C′과 직교하는 직선을 작도한다. 직선 A′B′과 A′C′의 교점을 B, C라 하면, 삼각형 A′BC가 구하는 삼각형 ABC이다.

삼각형의 높이에 관련된 탐구문제로 다음을 숙제로 제시할 수 있다: a, b, c는 삼각형 ABC의 변의 길이이고, h_a, h_b, h_c는 높이이다. k는 [0,2]에 속하는 수라 할 때, $a+kh_a$, $b+kh_b$, $c+kh_c$를 변으로 하는 삼각형이 존재하며, 그러한 삼각형은 유일한가?

이러한 탐구 문제는 학생들을 새로운 수학적 발명으로 이끌 수 있으며, 문제에 대한 해답은 수학 잡지인 Octogan Vol.11(1)에서 찾아볼 수 있다.

이제, 삼각형의 세 중선 m_a, m_b, m_c에 대해, 유사한 문제를 살펴보자. 즉, 주어진 선분 m_a, m_b, m_c을 중선으로 가지는 삼각형 ABC를 작도하여라. 이 문제는 어렵지 않게 해결될 수 있으며, 작도방법이 한인기(2000b)에 상세히 기술되어 있다.

삼각형의 세 각의 이등분선 l_a, l_b, l_c에 대한 유사한 논의는 수학영재아들에게 더욱 흥미로울 것이다. 결론을 말하자면, 세 각의 이등분선으로 주어진 선분 l_a, l_b, l_c을 가지는 삼각형 ABC는 존재하지만, 자와 컴퍼스를 이용해서 작도할 수는 없다. 각의 이등분선으로 l_a, l_b, l_c을 가지는 삼각형의 존재는 The American Mathematical Monthly에 Mironescu & Panaitopol(1994)에 의해 증명되어 있다. 최근의 수학자들이 관련 주제를 학술적 성격의 논문으로 발표했다는 것은 이 주제가 교수학적 원리에서 '학술적 가치의 원리'에 관련될 수 있음을 보여준다. 한편, 자와 컴퍼스를 이용한 작도 불가능성은 고차방정식의 근의 작도에 관련된 수학적 지식을 필요로 한다. 세 각의 이등분선에 의한 삼각형 작도 문제의 흥미로운 점의 하나가 바로 중등학교에서 다루는 각의 이등분선과 대학에서 다루는 고차방정식의 근의 작도 문제를 자연스럽게 연결시켜준다는 것이다.

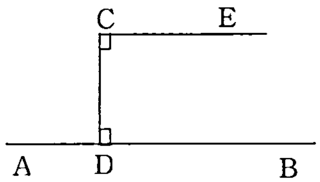
살펴본 세 높이, 세 중선, 세 각의 이등분선에 의한 삼각형의 작도 문제는 삼각형에서 높이, 중선, 각의 이등분선을 개별적인 주제로 다루는 것이 아니라, 이들 선분의 성질을 서로 비교하고 유추하면서 삼각형의 성질을 탐구할 수 있도록 하기 때문에, 기술한 학습 주제의 상호관련성의 원리, 수학적 사고의 계발 및 육성의 원리에 부합된다고 할 수 있다.

(2) 기하학에서의 오류

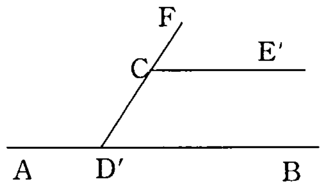
기하학의 증명에 관련하여 흥미로운 오류들이 많이 알려져 있다. 이들 중 몇몇을 살펴보자. 평행선 공준인 '주어진 직선 밖의 한 점을 지나며 주어진 직선과 평행한 직선이 존재하며, 그러한 직선은 유일하다'는 명제를 증명한다고 하자.

직선 AB와 직선 밖의 점 C가 주어졌다. 점 C로부터 직선 AB에 수선 CD를 긋고, 다시금 점 C에서 직선 CD에 대한 수선 CE를 작도하자(그림 1). 그러면, (a) 한 직선에 속하는 서로 다른 두 점을 지나며 주어진 직선에 직교하는 두 직선은 평행하며, (b) 직선 밖의 점으로부터 주어진 직선에 수선을 유일하게 작도할 수 있으며, (c) 직선에 속한 점으로부터 직선에 대한 수선을 유일하게 작도할 수 있다는 사실[1]로부터, 작도한 수선 CE의 유일성이 증명된다.

그렇다면, 기술한 평행선 공준의 증명에는 어떤 오류가 내포되어 있을까? 기술한 평행선 공준의 증명과정 자체에는 오류가 없다. 그러나, 기술한 방법만이 평행한 직선을 작도하는 유일한 방법인가를 생각해야 한다. 예를 들어, 다른 방법으로 직선 밖의 한 점을 지나 주어진 직선에 평행한 직선을 작도할 수 있다면, 이때 얻어진 직선과 앞의 증명에서 얻어진 직선이 일치함도 반드시 보여야 할 것이다. 예를 들어, 다음과 같은 작도가 가능하다.



<그림 1>



<그림 2>

직선 AB에 <그림 1>에서의 점 D와는 다른 점 D′을 잡아, 반직선 D′C를 작도하자(그림 2). 이제, 각 CD′B와 합동인 각 FCE′을 작도하자. 그러면, 두 직선과 할선이 만나 생기는 동위각이 같으면, 두 직선은 평행하다는 정리[2]에 의해, 직선 CE′은 직선 AB와 평행하게 된다.

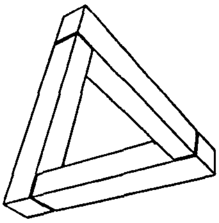
직선 밖의 한 점을 지나 주어진 직선에 평행한 직선을 작도하는 두 가지 방법 각각은 논리적으로는 어떤 모순도 포함하고 있지 않다. 그런데, 문제는 두 가지 방법에 의해, 작도된 직선 CE와 CE′이 일치하는가에 관련된다. 평행선 공준에서 의미하는 유일성을 증명하려면, 두 가지 방법에 의해 작도된 CE와 CE′이 같은 직선이라는 것을 보여야 하는데, 이때 평행선 공준을 사용해야 한다.

평행선 공준의 증명에 관련된 오류를 찾는 문제는 수학사에서 많은 수학자들을 고민하게 만들었던 유명한 문제로 교수학적 원리에서 학술적 가치의 원리에 관련될 수 있으며, 이 문제는 비판적 사고력의 계발에도 관련되므로 수학적 사고의 계발 및 육성의 원리에도 합당한 교수-학습 자료라고 할 수 있다.

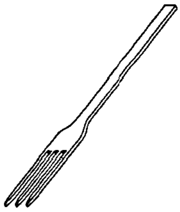
1) 이들 성질 (a), (b), (c)는 평행선 공준을 이용하지 않고도 증명할 수 있음.
2) 이 정리도 평행선 공준을 이용하지 않고 증명할 수 있음.

(3) 불가능한 도형들

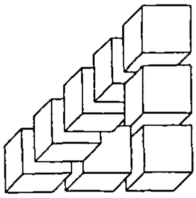
공간상에서 불가능한 도형들은 학생들에게 공간적 상상력을 길러줄 수 있는 흥미로운 소재가 될 수 있을 것이다. 그러한 도형의 대표적인 예가 펜로즈의 삼각형(그림 3)을 들 수 있으며, 그밖에도 몇몇 흥미로운 예들로 <그림 4, 5> 등을 들 수 있다[3].



<그림 3>



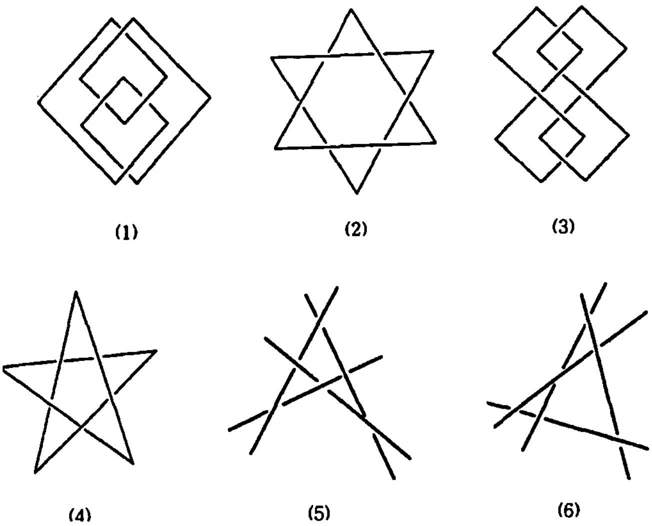
<그림 4>



<그림 5>

이들 공간도형에 대한 관찰은 수학적 재능의 중요한 변인인 공간적 상상력을 길러줄 수 있으며, 제시된 도형에서 오류를 찾으려는 비판적 사고력의 계발에도 의미있는 자료가 될 것이다.

한편, 2004년 1월에 교육청 산하의 영재교육원 학생 선발을 위해 전국적으로 실시된 선발 평가의 중학교 1학년 문항에도 불가능한 도형을 찾는 흥미로운 문제가 제시되었던 것은 주목할 만하다. <그림 6>에 제시된 그림은 공간에서 몇몇 선분들로 만든 형태를 평면에 투영시킨 것인데, 이들 중에서 실제로 공간에 존재할 수 있는 도형은 어떤 것인가를 찾는 문제이다.



<그림 6>

3) 제시된 그림 1, 2, 3은 Rutersvard(1990)에 제시된 것들임.

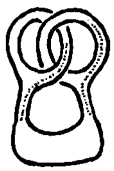
(4) 고등수학과의 관련성

Kolmogorov 수학-물리학교에서 고등수학 내용의 지도에 관련하여, 오래 전에 Kolmogorov와 영재학교 교사인 Shershevski사이에 논쟁이 있었다. Shershevski는 초등수학의 내용과 관점을 중심으로 고등수학을 첨가하여 지도할 것을 주장하였으며, Kolmogorov는 고등수학의 내용과 관점을 중심으로 초등수학을 첨가하여 지도할 것을 주장하였다. 이 논쟁의 명료한 정답은 존재하지 않을 것이다. 그러나, 지금 Kolmogorov 수학-물리학교에서는 Shershevski의 주장을 받아들여 지도하는 경우가 많이 있다. 한 가지 중요한 것은 고등수학을 중등학교 과정에 도입할 때는 매우 조심해야 한다는 것이다. Kolmogorov 수학-물리학교의 강의에 고등수학의 내용이 포함되지만, 항상 완전한 증명을 함께 제시하고 있다. 경험적으로 보면, 그렇지 않은 경우에는 학생들이 지도되는 주제의 본질은 이해하지 못하고 계산 알고리즘만을 획득하게 된다.

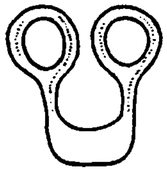
개별적으로 잘 구성된 문제들은 후에 복잡한 현대수학의 개념들을 배우는데 큰 도움을 줄 수 있다. 필즈상 수상자인 Novikov에 의하면, 현대의 물리학자들은 기하학과 위상수학의 방법을 학문 연구에 사용하고 싶어하지만, 이것들을 배우기가 매우 어렵다. 왜냐 하면, 학창시절에 물리학자들에게 위상적 개념을 설명하지 않았으며 이들은 어떤 위상수학적 정리도 증명하지 않았기 때문이다. Kolmogorov 수학-물리학교의 강의에서 가끔씩 활용하는 위상수학적 내용을 간단히 소개하면 다음과 같다[4].

문제 11. 잘 늘어나는 고무로 만든 물체(그림 7a)을 변형시켜(칼로 자르거나 붙이지 말고) <그림 7b>에 제시된 입체로 만들 수 있는가?

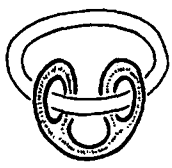
문제 12. 잘 늘어나는 고무로 만든 물체(그림 8a)을 변형시켜(칼로 자르거나 붙이지 말고) <그림 8b>에 제시된 입체로 만들 수 있는가?



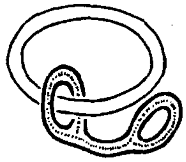
<그림 7a>



<그림 7b>



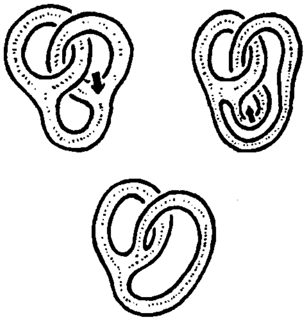
<그림 8a>



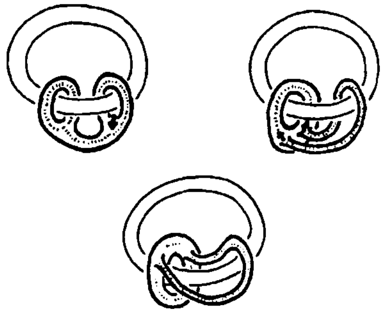
<그림 8b>

문제 11은 <그림 9>와 같은 변형을 통해 해결할 수 있으며, 문제 12는 <그림 10>과 같이 변형하면 해결할 수 있다.

4) 이들 문제와 그림은 Prasolov(1995)에 제시된 것임.



<그림 9>



<그림 10>

6. 결론

본 연구에서는 수학적 재능에 대한 Kolmogorov의 견해를 바탕으로 수학적 재능의 계발 및 육성에서 중등학교 기하학의 역할 및 교육적 의의를 분석하며, 수학영재교육을 위한 몇몇 구체적인 교수학적 원리를 추출하고, 수학적 재능의 계발 및 육성을 위한 기하교육의 실제를 몇몇 사례를 중심으로 고찰하였다.

Kolmogorov는 수학적 재능을 알고리듬적 측면, 기하학적 측면, 논리적 측면으로 나누었다. 특히, 기하학은 기하학적 측면, 논리적 측면의 수학적 재능의 계발, 육성을 도울 수 있는데, 기하학적 측면은 공간도형에 대한 상상, 이에 관련된 논증에 직접적으로 관련되며, 논리적 측면은 다양한 수학적 개념이나 논리적 도구(수학적 귀납법, 귀류법)를 이용한 논증에 관련된다.

영재교육에서 기하학의 의의를 살펴보면, 첫째 기하학은 개개 학생의 사회화를 위해 필요한 지식으로, 기하학적 개념, 법칙, 정리에 관한 지식은 모든 사람에게 필요하다. 둘째, 기하학 교육은 정신적 수양을 가능하게 하며, 셋째 기하학은 아름다움에 대한 미적 감각을 개발시킬 수 있다. 넷째, 기하학은 지적 계발을 도울 수 있으며, 다섯째 기하학은 창의성을 계발시킬 수 있고, 여섯째 기하학은 영재아의 발굴에서 중요한 역할을 한다.

본 연구에서는 수학 영재교육을 위한 교수학적 원리로, 정기적인 자율학습의 원리, 학습 주제의 상호관련성 원리, 셋째, 자기학습 능력의 원리, 자기조절 및 반성의 원리, 다양한 풀이의 원리, 학습자료의 학술적 가치의 원리, 수학적 사고의 계발 및 육성의 원리 등을 제시하였으며, 이에 상응하는 기하학 교수-학습 자료로 삼각형의 작도 문제, 평행선 공준의 증명에 관련된 오류 분석, 불가능한 도형들, 고등수학과 관련된 문제들을 제시하였다.

본 연구에서 얻어진 결과들은 수학적 재능의 계발 및 육성을 위한 수학 영재교육의 실현을 위한 의미있는 방향을 모색할 수 있는 기초 자료를 제공하며, 특히 기하학 영역에서의 수학 영재교육의 내실화를 위한 구체적인 방향 및 자료들이 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

영재교육진흥법 (2000). 제정 2000.1.28. 법률 제 6215호.

한인기 (1999a). 수학적 재능에 관한 이론적 기초, 수학교육학술지 **4**, pp.19-32, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (1999b). 러시아의 수학 영재 교육과정, 학교수학 **1(2)**, pp.461-482, 서울: 대한수학교육학회.

한인기 (2000a). 러시아 수학 영재교육에 관한 실제적 고찰, 수학교육논총 **18**, pp121-155, 서울: 대한수학회.

한인기 (2000b). 작도 활동을 통한 기하학 탐구(교사용), 서울: 한국교육개발원.

한인기 (2001). 콜모고로프와 수학적 재능에 관한 그의 이론, 한국수학사학회지 **14(1)**, pp.73-82, 서울: 한국수학사학회.

Kombarov A. · 한인기 (1996). 러시아 꼴모고로프 영재학교에서의 수학교육, 수학교육 **35(1)**, pp.95-100, 서울: 한국수학교육학회.

Arnold V.I. (1999). Antinauchnaya revolyutsiya i Matematika, *Vestnik Rossiiskoi akademii nauk* **69(6)**, pp.553-558.

Dzukov A. & Akulich I. (2003). Odnoznachno li opredelyaetsya treugolnik? *Kvant* **1(2003)**, pp.29-31.

Kolmogorov A.N. (1959). *O professii matematika*, Moskva: Izdat. Moskovskogo Universiteta.

Krutetski V.A. (1968). *Psihologiya matematicheskih sposobnoctei shkolnikov*, Moskva: Prosveshenie.

Mironescu P. & Panaitopol L. (1994). The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths, *The american Mathematical monthly* **101(1)**, pp.58-60.

Prasolov V.V. (1995). *Naglyadnaya topologiya*, Moskva: MTsNMO.

Rutersvard O. (1990). *Nevozmodznye figury*, Moskva: Stroibzdat.

Shklyarski D.O.; Chentsov N.N. & Yaglom I.M. (1970). *Geometricheskie neravenstva i zadachi na maksimum i minimum*, Moskva: Nauka.

Shklyarski D.O.; Chentsov N.N. & Yaglom I.M. (1974). *Geometricheskie otsenki i zadachi iz kombinatornoi geometrii*, Moskva: Nauka.

Shmilin A.T. (1979). *Problemy struktury i soderzaniya protsessa poznaniya*, Moskva: Pedagogika.