韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 427-440

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 427-440

수학화에 의한 도형지도에서 학생의 학습발달 과정 연구

Students' Learning of Geometry through Freudenthal's Mathematizaton

고 상 숙 (단국대학교)
장 덕 임 (단국대학교 교육대학원)

Freudenthal의 수학화 이론에 대한 지금까지의 대부분의 연구는 이론의 탐색에 집중하고 이에 따른 학습 지도 방안과 자료개발에만 역점을 두었던 것이 그 한계점으로 지적되어져 왔다. 이에 본 연구자는 실제 이 이론이 어떻게 학습 현장에 적용될 수 있는지에 대해 첫째, Freudenthal의 수학화에 의한 도형 지도에서 학생이 어떻게 수학화를 이루어 가는지를 조사하였고, 둘째, 학습의 주체자인 학생들의 능동적인 활동을 강조한 수학화 과정에서 교수의 주체자인 교사는 학생들의 수학화가 원만히 이루어지게 하기 위하여 어떤 역할을 수행하게 되는지를 중학교 1학년 학생을 대상으로 사례연구를 실시하여 조사하였다.

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

최근 수학계의 움직임의 핵심은 수학에 대한 수학적 사고를 중시한 교수-학습론에 관한 변화라고 할 수 있으며 이는 수학적 지식의 발견을 안내하는 소위 발견학습과 함께, 수학은 불변의 절대적인 진리라기보다는 학습자의 창조적이고 능동적인 활동에 의해 습득된다는 교수-학습이론의 강조에 있다고 하겠다. 이와 같이 수학교육의 문제점과 수학교육 인식론의 변화에 따라 수학을 학습하는 학생들은 수학화를 통해 학습자 스스로 수학을 구성해 나가야 한다고 주장한 Freudenthal의 수학화 이론은 학습자의 능동적인 활동을 강조한 교수-학습이론으로 여러 수학교육자에 의해 주목을 받아왔다.

그에 의하면, 수학은 확실성을 추구하는 정신적 활동이며, 현실을 바탕으로 상식에서 출발해서 반성적 사고를 통해 내용과 형식, 현상과 본질의 교대 작용을 거듭하면서 조직화하는 활동이다. Freudenthal은 이러한 인간의 정신적 활동으로서의 수학의 가장 본질적인 특성을 현상의 조직화 활동이라 보고 이것을 수학화라고 표현하였고 학습자들이 효과적으로 수학을 학습하기 위해서는 교사의 적절한 안내를 통해, 학생들의 활동에 의해 스스로 수학을 학습해야 한다고 주장하였다.

이는 우리나라의 교육현장에서 제7차 교육과정안의 구성방향이 Freudenthal의 교육학적 인식론과 일치되어짐에 따라 우리나라에서도 그의 수학화 이론에 대한 연구의 필요성과 그 의의가 증가함에 따라 이에 따른 연구개발이 지속하여 진행되어져 왔다.

그러나 Freudenthal의 수학화 이론에 대한 지금까지의 대부분의 연구는 이론의 탐색에 집중하고 이 이론에 따른 학습지도 방안과 자료개발에만 초점이 맞추어 졌을 뿐 실제 이 이론이 어떻게 학습현장에 적용되고 있는 지에 대한 연구를 찾아보기가 어려웠고 이는 이 이론에 대한 한계점으로 지속하여 지적되어져 왔다(윤성재, 1991).

수학화를 주장한 Freudenthal 자신도 수학화 이론제시와 함께 실제 학습 현장에서 나타날 수 있는 학생 개개인의 학습과정을 분석하는 임상적 방법을 선호하였음에도 불구하고 실제 우리의 교육현장에서 이 이론이 어떻게 적용되어질 수 있는지에 대해 다루지 못한 한계점을 가지고 있음이 지적 되어져왔다.

이와 같은 점에 착안하여 본 연구논문에서 그 목적으로 삼고자 하는 것은 Freudenthal의 수학화에 의한 도형 지도에서 학생은 수학화를 어떻게 이루어가는지 조사하는 것이다.

또한, 학습의 주체자인 학생들의 능동적인 활동을 강조한 것이 이 이론의 핵심인데 그렇다면 과연 교수의 주체자인 교사는 이 이론에 따른 수학화가 원만히 이루어지게 하기 위하여 어떤 역할을 수행하게 되는가를 조사하는 데 있다.

본 연구의 문헌조사에서 정영옥(1999)은 구성주의, 즉 인간은 능동적인 학습자임을 인정하면서, 때로는 학생들에게 얼마나 많은 주도권을 주어야 하는가에 대해 자문하지 않을 수 없음을 지적하였다. 즉 학생들이 지식을 스스로 구성해 간다는 것이 교육현장에 어떻게 반영되어야 하는지에 대해 숙고할 필요가 있다는 것이다.

따라서 본 연구논문에서는 위에서 살펴본 연구의 필요성에 의해 다음과 같이(제거요) Freudenthal의 수학화를 어떻게 이루어 가는지 그 과정을 이해하는 것과 그 적절성과 학생의 주도성이 강조된 이 이론이 실제 수업현장에서는 실제로 수학화가 원만히 이루어지기 위하여 교사의 역할의 중요성은 어떻게 나타나는 지를 알아보고자 다음과 같이 연구문제를 설정하고 이에 초점을 맞추어 연구과정을 진행하고자 한다.

2. 연구의 제한점

본 연구논문은 두 차례에 걸쳐 진행된 질적 연구 방법에 의한 사례연구의 결과에 의한 것이므로 소수의 학생에 의한 연구결과를 일반화시킬 수 없다.

3. 기대되는 효과

(1) Freudenthal의 수학화 이론이 우리나라의 실제 교육현장에서 학생들의 수학화 과정을 이해할 수 있으므로 그에 대한 학습모델을 제시할 수 있다.

(2) Freudenthal의 수학화 이론이 교수학습에 있어 학습의 주체자인 학습자의 능동적인 활 동을

강조한 이론임을 감안하여 교수의 주체자인 교사는 이 이론에 따른 실제 수업현장에서 어떠한 역할을 감당하는지를 관찰하여 교사의 위치와 중요성에 대한 시사점을 얻을 수 있다.

(3) (1)과 (2)에서 기대되는 효과를 바탕으로 우리나라의 제 7차 교육과정안의 지도방향과 일치하는 Freudenthal의 수학화 이론이 우리의 수학교육 현장에 어떻게 적용 될 수 있으며, 예측되는 문제점을 보완하고 그 나아갈 방향을 예측해 볼 수 있다.

II. 문헌연구

본 장에서는 앞에서 제시한 연구문제를 위한 검사도구 설정의 근거가 되는 Feudenthal의 수학화 이론에 대하여 살펴보고 기하 영역을 중심으로 수학화 활동이 수학교육에 미칠 수 있는 영향을 살펴보기로 한다. 또한 Feudenthal의 수학화 이론에 따라 설정된 검사도구로 실제 사례 연구를 통해 나타나는 효과에 대한 논의 근거로 Feudenthal의 수학화 이론을 실천적 이론으로 더욱 구체화시킨 네덜란드의 RME의 원리를 살펴보기로 한다.

2. 1. Freudenthal의 수학화

본 장에서는 Freudenthal이 말하는 수학화의 의미와 그 중요성, 본 연구논문의 본 목적에 따라 학생의 활동을 강조된 활동주의 수학교육관, Freudenthal의 수학화 활동에 의해 귀납적 형식을 제시하는 교수학적 현상학, 그리고 학습자의 주도성이 강조된 수학화에 의한 수업에서 나타나는 교사의 역할을 관찰하기 위하여 이를 중심으로 수학화 교수-학습의 원리에 대하여 살펴보기로 한다.

2. 1. 1. 수학화의 의미

Freudenthal에게 있어서 수학은 인간의 정신적 활동이며, 수학적 활동의 본질적인 특징이 바로 수학화 활동이다. Freudenthal은 현상이 그것을 정리하는 수단인 본질로 조직되고, 그 본질은 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되는 끊임없는 재조직화의 과정으로 수학을 설명하면서, 현상을 본질로 조직하는 이러한 과정을 '수학화'로 명명한 것이다.

2. 1. 2. Freudenthal의 교수-학습 원리

Freudenthal은 수학은 무엇이며, 수학의 가장 본질적인 특성은 무엇인가를 탐색함으로써 수학에 가장 적절한 교수-학습 방법을 구안하고자 하였으며, 그 결과 수학화를 중시하는 수학 교수-학습이론을 제시하고 있다.

가. 활동 주의적 수학관

Freudenthal이 제시하는 수학화는 교수학적으로는 재발명을 의미하며 학생들은 교사의 안내 하에 감정이 이입될 수 있는 현실로부터 수학화 활동에 의해 주관적 의미를 갖는 수학적 내용을 재발명해 나가는 과정을 학습 과정에서 반드시 경험해야 한다고 주장한다. Freudenthal은 이에 대한 대안으로 '만인을 위한 수학'을 주장하면서, 학생들에게 이미 완성된 지식이 아닌 원자료로서의 현상을 많이 제공함으로써 학습자 자신의 활동을 통해 자신의 수학을 재발명해 나가도록 할 것을 강조하였다. 이러한 수학화 활동을 통해 학습자는 수학에 대한 진정한 이해와 안목을 가질 수 있으며, 결국 수학은 학습자의 인격의 한 부분이 될 수 있을 것으로 보았다.

나. 교수학적 현상학

Freudenthal은 수학적 개념, 구조, 아이디어 등의 본질(noumenon)이 물리적, 사회적, 정신적 세계의 현상(phenomena)을 조직하기 위한 수단으로 발견되어 왔다고 주장하면서, 이를 '교수학적 현상학'으로 체계화하였다.

다. 안내된 재발명의 원리 -교사의 역할

학생들은 인류의 학습 과정을 반복해야 하고 교육자들은 그들을 돕는 것이 의무이다. 교사는 학생들에게 배워야 할 수학을 각인하려고 할 것이 아니라 수학화 과정을 재발명하도록 도와주어야 한다. 그리고 이러한 재발명을 위해서는 인위적인 구체물보다 자연스런 상황, 아동들이 현실적, 구체적으로 받아들일 수 있는 문맥이 제시되어야 하며, 학습자의 현실에서 출발해서 교사의 안내에 의해 수학화 경험으로 연결되어야 한다.

2. 2. 네덜란드의 현실적 수학교육(RME)

현실적 수학교육은 '인간활동으로서의 수학'이라는 관점에 그 뿌리를 두고, 재발명과 점진적인 수학화, 수준이론, 교수학적 현상학을 그 핵심원리로 삼고 있으며, 학습자의 활동을 모든 학습의 중심에 놓는 Freudenthal의 관점에 기초한다.

2. 2. 1 Treffers의 수학화

Treffers는 수학화의 과정에 있어서 수학화의 수평적 형태와 수직적 형태를 구분하였다(Treffers, 1987). 전자는 문맥 문제를 수학적 문제로 전환하는 것을 포함하고 후자는 수학적 문제를 더 고차원적인 수준으로 끌어올리는 것을 포함하고 있다.

즉, 현실적 수학교육은 Treffers가 수평적 수학화와 수직적 수학화에 대한 구분을 통해 기존의 수

학교육 사조를 기계적, 구조적, 경험적이라 부르고 수학화를 중시하는 네덜란드의 수학교육을 현실적이라고 부른데 기인한다.

가. 수평적 수학화(horizontal mathematization)

Freudenthal은 문제의 수학적 측면들을 알아내고 규칙성을 발견하는 단계로 현실 세계의 문맥을 직관적으로 탐구하는 단계에서 학생들간의 상호 작용, 학생들과 교사와의 상호 작용 그리고 학생들의 형식화, 추상화 능력과 같은 요인에 의존해서, 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해낸다고 하였는데 이 과정을 수평적 수학화의 단계로 명명하였다.

나. 수직적 수학화(vertical mathematization)

Freudenthal은 수평화의 단계 후의 수학화 과정에서 예상되고 결과적으로 발생되는 수학적 개념에 대한 기술과 엄격하고 형식적인 정의가 뒤따른다고 하였는데 이 과정을 수직화의 단계라고 불렀다.

2. 2. 2. 현실적 수학교육(RME)의 교수-학습 원리

Treffers는 Freudenthal의 안내된 재발명 원리와 점진적인 수학화를 구현해 나가기 위한 좀 더 구체적인 원리로서 현실적 수학교육의 수업이론으로 다음의 다섯 가지 사항을 제안하였다. 첫째, 현상학적 탐구, 둘째, 수직적 도구에 의한 연결, 셋째, 학생들 자신의 구성과 산물, 넷째, 상호작용수업, 다섯째, 학습 가닥의 연결이다(Treffers, 1987).

2. 2. 3. 수학화에 의한 기하교육

이러한 수학화 교수-학습론은 기하 영역에 대해서도 그대로 적용된다. Freudenthal은 4세에서 12세의 학생들이 학습하게 되는 직관 기하 영역을 다룸으로써 그의 수학화 이론의 원리를 주장하였다. 그는 오랜 기간동안 기하영역에 있어서 주된 교수-학습이론이었던 연역적 방법이 학생들의 능동적인 활동을 통하여 스스로 학습목표를 구성해 나갈 수 있는 귀납적 형식으로 대치된 수업의 진행을 주장함으로써 그의 수학화의 주된 핵심원리를 제시하였다. Freudenthal에 의하면, 기하는 학생이 살고 숨쉬고 움직이는 그런 공간을 이해하는 것이다. 학생은 더 잘 살고 더 잘 움직이기 위해서 공간을 알고 조사하고 지배하는 방식을 배워야 한다.

그러므로 기하 지도는 공간 내의 현상을 수학적으로 조직하는 것으로부터 시작되어야 한다. 학생이 공간 내의 현상을 조직하는 것으로부터 시작해서 기하 도형을 이해하게 되면 학생은 도형을 조직할 수 있게 된다(Freudenthal, 1973).

Ⅲ. 연구방법

본 장에서는 앞장의 문헌 연구를 근거로 Freudenthal의 수학화 이론과 네덜란드의 현실적인 수학교육의 특성에 대한 문헌연구를 바탕으로 중학교 1학년 과정의 기하영역의 수업에 대해 사례연구를 실시하고자 한다. 먼저 이를 위해 연구 도구를 구성한 후 학생들의 수학화 과정을 탐구할 것이다. 본 연구논문에 대한 연구 도구는 수학화 과정에 대한 연구 도구의 근거로 Freudenthal의 수학화 이론을 적용하고 실제 사례연구 실시에 대해서는 네덜란드의 현실적인 수학교육의 특성을 그 근거로 하여 진행하였다.

3. 1. 연구대상

먼저 연구대상을 설정함에 있어서 본 연구논문의 이론적 바탕이 되는 수학화의 과정은 학습내용이 학생들의 인격과 통합이 되도록 하는 정의적인 측면의 목적성을 고려하여, 학습과정을 개별적으로 면밀히 관찰할 수 있도록 소수의 학생을 선택하는 질적인 연구방법을 선택하여 강동구 소재 중학교 1학년 학생 4명의 학생들을 대상으로 선정하였다.

3. 2. 예비연구

연구도구를 확정하기에 앞서 연구도구를 구성한 후 이 도구가 연구 도구로 적절한지를 알아보기 위하여 학생 4명을 대상으로 예비 실험을 먼저 실시하였다. 이 과정에서 초안으로 작성한 연구도구의 오류를 수정하고 지도교수의 조언을 통하여 연구 도구를 확정하였다.

3. 3. 연구도구

본 연구도구는 연구대상인 학생 4명을 대상으로 실제 사례 연구하기에 앞서 검사 도구를 작성한 후 학생 4 명을 대상으로 사례 1과 사례 2에 대하여 각각 예비실험을 실시한 후 지도교수의 조언을 통해 연구자가 작성한 것이다.

본 연구논문의 목적은 수학화 활동을 위한 학습도구의 개발에 있는 것이 아니라 실제 학교 학습현장에서의 이 이론의 적절성에 대한 검증을 목적으로 한 것이므로 다양한 직관적인 수학화 활동을 제시하는 방법을 지양하고 실제 교육과정의 학습내용과 학습 진도에 맞는 학습목표를 제시하여 학생들이 스스로 교과내용을 구성해 가면서 학습목표를 성취해 갈 수 있는가에 대한 탐색에 그 목적을 두고 구성된 것이다(부록참고).

Freudenthal의 수학화 이론에 대한 효과를 보다 다각적으로 검증해 보기 위하여 도형지도의 초기 학습단계로 보다 직관적인 활동이 많은 부분을 사례 1과 총 2차시에 걸쳐 모두 네 가지의 학습목표를 성취하는 과정을 통해 Freudenthal이 제시한 수학화 이론의 수평적 수학화와 수직적 수학화의 과정을 탐색해 보는데 역점을 두고 구성한 사례 2에 의해 진행된다.

따라서 본 연구논문의 도구는 현 교과내용을 Freudenthal의 수학화 이론에 따라 귀납적 형식으로 재구성하여 작성한 것이며 학생들의 활동에 의하여 학습과정이 진행되도록 구성되었다. 여기서는 사례 1의 연구도구만을 다루기로 하며,Freudenthal의 수학화 이론에 따라 각 문항을 다음과 같이 구성하였다.

Freudenthal의 수학화 단계	**연구도구(문항)**
직관적으로 탐구하는 단계	1 - 2
수평적 수학화의 단계	3 - 5
수직적 수학화의 단계	6 - 7
응용적 수학화의 단계	8

3. 4. 연구 절차

연구대상인 중학교 학생 4명을 Freudenthal의 이론에 의한 학생들의 수학화 과정을 검증해 보기 위하여 4명의 학생을 각각 2명으로 나누어 2개의 조로 나누어 두 가지의 사례연구를 진행하였다. 사례 연구를 진행함에 있어서 교사의 역할을 하는 연구자의 안내에 따라 본 연구자가 작성한 연구도구를 가지고 수업을 진행하면서 이루어졌다. 또한 Freudenthal의 이론과 RME의 원리에 따른 수업환경을 갖추기 위하여 학생들간의 상호협동 학습이 이루어지도록 하였다. 연구절차 과정에 있어서 사례1과 사례2의 차이점은 다음과 같다.

(1) 사례1은 단일 학습목표를 수학화에 성취해 가는 과정을 탐구하기 위한 도구로 총 1차시의 학습내용으로 40분간에 걸쳐 진행되었다.

(2) 사례2는 네 가지의 단일 학습목표로 구성되어져 있고 각각의 학습목표 성취는 다음의 학습목표와 연결되는 수학화를 탐구하기 위한 것으로 총 2차시의 학습내용으로 두 차례에 걸쳐 진행되었다. 소요 시간은 예상시간을 20분 초과하여 총 120시간 진행되었다.

연구도구를 구성함에 있어서 Freudenthal의 학습이론을 그 근거로 하였고 연구를 실제로 진행하는 절차과정에 있어서는 Freudenthal의 수학화 이론을 실제 교육현실에 적용하여 RME라는 이론으로 명명된 네덜란드의 현실적인 수학교육의 특성을 바탕으로 수학화 과정을 탐구하기로 하였다. 즉, 본 연구 논문의 사례연구는 다음과 같이 RME의 수업이론을 적용하여 진행하였다. 사례1은 다음과 같은 연구절차를 따른다.

(1) 사례 1

RME의 수업이론	실제 수업 진행 과정
현상학적 탐구	학생들 주변의 상황에서 다각형을 찾는 활동을 함으로써 다각형의 특징들을 발견하고 다각형에 대한 개념을 인식하도록 한다.
수직적 도구에 의한 연결	다각형을 찾아내는 활동에서부터 시작하여 다각형의 의미를 파악하고 삼각형보다 많은 선분을 가지는 모든 다각형은 대각선을 가지고 수학화 활동을 통하여 그 개수를 구할 수 있음을 경험하고 n각형의 일반적인 다각형에서도 대각선의 개수를 구할 수 있는 형식적인 수준까지 나아가게 된다.
학생들 자신의 구성과 산물	교사의 적절한 안내에 따라 학생들이 능동적으로 활동해 나가고 그 결과를 반성함으로써 처음에 직관적으로 인식했던 다각형에서 모든 다각형은 선분과 꼭지점을 가지며 다각형의 내부에 한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 개수에는 일반적인 상관관계가 성립함을 발견하고 대각선의 총 개수를 구할 수 있는 형식을 발견할 수 있게 된다.
상호작용 수업	조별 협동학습을 통하여 다른 학생들과 서로 논의하며 학생들간의 상호 작용이 수업에 어떤 효과가 있는 지를 관찰할 수 있다.
학습 가닥의 연결	다각형을 이루는 선분과 꼭지점의 개수와 다각형의 내부에 나타나는 대각선의 개수 사이에는 일정한 법칙이 나타남을 발견하고 그 법칙을 발견할 수 있다.

Ⅳ. 연구결과

본 연구논문의 이론적 근거로 활용했던 Freudenthal의 수학화와 RME의 그 효과에 초점을 맞추어 볼 때 연구문제에서 제시했던 학생들의 수학화 활동에 대한 효과와 교수학적 현상학과 교사의 역할에 대한 다음과 같은 결과들을 얻을 수 있었다.

(1) 연구문제 1의 교수학적 현상학에 관하여

본 연구논문의 연구목적의 첫 번째는 학습목표의 결과를 언급하지 않고 학생들이 자신들의 능동적인 활동을 바탕으로 스스로 학습내용을 구성해 간다는 Freudenthal의 수학화 이론이 실제 학생은 어떻게 수학화를 이루어 가는가를 조사해 보는데 있다. 즉, 구체적인 결과까지 언급되어진 교과내용의 제공 없이 학생들이 수학적인 활동을 통하여 스스로 교과과정을 조직화해 나갈 수 있는가를 탐색해 보는데 본 연구의 목적이 있었는데 다음과 같은 점에 의하여 Freudenthal의 수학화 이론은 우리의 교육현장에서도 그 효과가 있다고 하겠다.

① 사례 연구 1·2의 형식화된 결과를 언급하지 않고 단지 학생들의 활동을 안내하는 사례1의 8개의 문항과 사례 2의 15개의 문항의 발문내용으로 구성된 도구와 교사의 역할을 하였던 연구자의 교수에 의해 학생들이 스스로 교과내용을 구성해 나가고 마침내는 형식적으로 학습내용을 일반화시킬 수 있는 단계에까지 이르게 됨을 볼 수 있었다.

또한 사례1·2의 수업에서 학습내용정리의 학습목표 성취도를 알 수 있는 발문에 대한 답변과 수학화의 마지막 단계인 응용화 단계의 응용문제(사례 1의 문제 8, 사례 2 문제 4, 문제 7, 문제 14, 문제 15)를 해결하는 과정에서 사례 대상인 학생 모두가 학습 목표를 성취한 것으로 보인다.

따라서 본 사례 연구를 통해서 Freudenthal의 수학화 이론의 핵심 요소인 학생들의 능동적인 활동에 의해 직관적인 현상에서 출발하여 수업의 궁극적인 목표인 형식적인 수준에까지 학습내용을 성취한다는 Freudenthal의 수학화 이론은 우리의 교육현장에서도 학생들에게 학업성취의 효과가 있는 것으로 볼 수 있겠다.

(2) 연구문제 2의 교사의 역할에 관하여

본 논문의 두 번째 목적은 교수-학습에 있어서 학습의 주체자인 학생의 능동적인 활동이 핵심이 되었던 Freudenthal의 수학화 이론에서 과연 교수의 주체자인 교사는 어떤 역할을 감당하며 학생들의 학습 성취에 있어서 그 비중은 어떠한지를 관찰해 보는데 있었는데 그 연구결과는 다음과 같다.

① 이러한 목적과 관련하여 사례 연구의 내용을 살펴볼 때, 본시 학습의 궁극적인 목표 수준보다 낮은 수학화의 단계에 대한 질문을 자주 하였음을 볼 수 있다. 사례1의 '선분'에 대한 용어에 대한 설명 요구와 대각선의 개수를 구하는 검사 도구의 발문에서 '이웃하지 않는 꼭지점'에 대한 그 의미를 잘 이해하지 못하고 이에 대한 학생들의 질문이 그 예가 될 수 있겠다. 또한 사례2의 문제1에서도 학생들이 발문내용을 보고 실제로 활동을 하기 위해서는 역시 교사의 시범에 의한 자세한 설명이 필요하였고, 문제 5의 '대각선의 의미'에 대한 발문에서 나타나는 이 과정의 문제 해결을 위해서는 학생들이 수직적 수학화의 보다 낮은 단계인 선행학습을 상기하기 위해서 교사의 설명이 필수적인 역할을 하였음을 알 수 있다.

② 또한 연구 분석에서 볼 수 있듯이 사례 1의 수업의 시작 부분인 직관적으로 탐구하는 단계(문제 1-2)와 수평적 수학화의 단계(문제 3-5)에서는 학생들이 주어진 사진이나 주변의 사물을 보고 다각형을 찾아내거나 직접 도형을 그려보는 등 Freudenthal의 수학화 이론의 핵심을 이루는 학생들의 활동에 의해 수업이 이루어지지만 점차로 형식적 수준에 이르게 되는 수직적 수학화의 단계(문제 6-7)와 응용적 수학화의 단계(문제 8)로 수업이 진행될수록 교사의 설명이 증가하고 있음이 관찰되었다. 마찬가지로 사례 2에서도 직관적으로 탐구하는 수학화의 단계에서 수학적 언어로 형식적인 조

작을 요구하는 수직적 수학화의 단계로 갈수록 교사의 설명이 증가하는 것을 관찰할 수 있었다. 다시 말하면, 수직적 수학화의 단계에서는 학생의 주도적인 활동에 의해서 수업이 성취되고 있다기보다는 교사의 설명이 학습목표 성취에 주된 역할을 한 것으로 볼 수 있겠다.

③ 또한 교사의 역할과 관련하여 본 연구의 사례 연구를 통하여 또 한 가지 얻을 수 있었던 중요한 시사점은 본시 학습이 수학화를 원만히 이루어 가도록 아무리 잘 준비되어진 교재라 할지라도 올바르게 수업이 진행되고 학습목표를 달성하기 위해서는 협동학습 등 다른 수업환경의 조성보다 교사의 역할이 효과적임을 관찰할 수 있었다. 이에 관한 예로 사례 1의 문제 3에서 관찰한 도형의 모양을 그리는 발문에 대하여 학습범위를 벗어나 원기둥의 입체도형을 그리는 예(학생 B)와 사례 2의 문제 5에서 '한 꼭지점에서 대각선 긋기'의 수학적인 문장을 완전히 이해하지 못하여 모든 꼭지점에서 대각선을 그린 예(학생 C) 등이 관찰되어진 점에서 수업목표를 달성할 수 있도록 올바른 방향으로 수업이 진행되기 위해서는 RME의 수업원리 중 하나인 협동학습의 원리보다 교사의 역할이 더 중요한 것으로 볼 수 있다. 따라서 Freudenthal의 수학화 이론이 교사의 일방적인 교수에 의한 교수-학습이 아닌 학생들의 능동적인 참여에 의하여 교과과정을 조직해 나가는 학생중심의 수업이론이라 할지라도 올바른 수업이 진행되기 위해서는 교사의 역할이 매우 중요하고 필수적임을 알 수 있다.

(3) 본 연구의 의의

수학화 과정에서 학생들이 학습목표와 관계없는 방향으로 수업을 진행하거나 오류를 범할 시 스스로 반성 과정을 거쳐 올바른 방향으로 점진적인 수학화를 이루어가고자 할 때 또 한 가지 간과할 수 없었던 점은 주어진 시간 안에 학습목표를 달성하기가 어렵다는 점이다. 보다 직관적인 내용을 학습하게 된 사례 1에서는 현 교과 진행 시간과 동일한 수준인 40분에 의해 교수-학습이 이루어졌지만 보다 형식적인 조작이 증가된 사례 2에서는 예상시간 보다 30분이 더 소요되어진 점을 감안하면 연역적인 방법의 대안으로 Freudenthal의 수학화 원리를 도입하고자 할 때 이 이론에 의한 수업으로 연역적인 방법과 동일한 시간 안에 동일한 학습목표를 달성한다고 보기는 어려운데, 학습목표에 대한 교사의 선택이나 결정이 필요한 부분이며 이에 대해선 앞으로 더 많은 연구가 필요하다.

결론적으로 Freudenthal의 수학화 이론은 우리의 교육현장에서도 효과가 있는 것으로 보인다. 그러나 이 이론의 핵심이라 할 수 있는 학생들의 능동적인 활동에 있어서는 학습흥미를 유발하고 학습참여를 높인다는 점에서 의미가 있다고 볼 수 있으나 이와 함께 간과해서는 안 되는 점이 교사의 교수가 차지하는 중요성에 있다고 하겠다.

즉, 본 연구논문의 도형지도에 있어서 시각적 자료를 활용하거나 학습 초기의 직관적인 단계와 수평적인 단계에서는 학생들의 활동을 통해서 학습에 대한 흥미를 유발하고 학습 동기를 자극하는

등의 효과를 기대할 수 있겠으나 높은 형식적 조작이 필요한 수직적 단계에서는 학생들의 능동적인 활동에 의하여 학습목표가 달성되었다기보다는 교사의 역할을 한 연구자의 미리 준비한 설명에 의해 성취된 것으로 볼 수 있다.

또한 본 사례 연구를 통해 연구문제 외의 내용에서 발견되어진 점으로는 Freudenthal의 수학화 이론이 우리의 교육현장에서 유용하게 이용되어지기 위해서는 이 이론에 의한 교수-학습이 연역적 방법과 동일한 시간에 동일한 정도의 학습목표를 달성할 수 있는지에 대한 보다 많은 연구가 필요한 것으로 보인다.

Ⅴ. 결론

본 단원에서는 사례 연구를 통해 얻어진 연구결과를 토대로 본 연구논문에서 제시된 연구문제에 대한 결론을 내리고 이와 관련하여 앞으로 지속해서 이루어져야 할 연구방향에 대하여 논의하고자 한다.

위와 같은 연구 결과로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 오랜 기간동안 기하영역에 있어서 주된 교수-학습 이론이었던 연역적 방법이 학생들의 능동적인 활동을 통하여 스스로 학습목표를 구성해 나갈 수 있는 귀납적 형식으로 대치된 수학화에 의한 Freudenthal의 수학화 이론이 실제 우리의 교육현장에도 그 효과가 있다는 것을 의미한다. 따라서 우리나라의 교육현장에서도 학생들의 수학학습에 대한 흥미와 학습참여를 높이고 그럼으로 학습 성취를 높일 것으로 기대되는 Freudenthal의 수학화 이론을 적절하게 적용하여 학생들의 능동적인 활동에 의한 교수-학습의 효과를 기대할 수 있겠다.

둘째, Freudenthal의 수학화에 의한 실제 수업현장에서 교사의 위치와 비중은 Freudenthal이 제시하고 있는 학생들의 수학화를 위한 '안내자'로서의 역할보다 훨씬 비중이 있다는 것을 의미한다. 즉, Freudenthal의 수학화 이론이 교사의 일방적인 교수에 의한 교수학습이 아닌 학생들의 능동적인 참여에 의하여 교과과정을 조직해 나가는 학생중심의 수업이론이라 할지라도 수학적인 용어에 의한 학습목표 성취는 교사에 의하여 이루어진다고 볼 수 있으며 그러므로 교사의 역할은 Freudenthal이 제시한 것보다 실제 교육현장에서는 훨씬 비중 있는 역할을 수행하고 있다는 것을 의미한다.

따라서, 본 연구는 중학교 도형에서 사례연구이므로 수학교육과정 중에서 극히 일부에 불과하다. 본 연구자는 Freudenthal의 수학화 이론이 우리나라의 실제 학교 교육현장에서 활발하게 적용되어지기 위해서는 이 이론의 적용성 및 유용성에 대해 보다 많은 실험 연구가 학교 수학의 여러 내용을 중심으로 이루어져 그 개선점을 찾고 보완해 나갈 수 있도록 연구자들의 지속적인 관심이 필요하다고 생각한다. 앞으로, 우리나라의 교육현장에서의 그 효과를 잘 반영할 수 있는 교재개발 및 교사 연수에 대한 후속연구가 꾸준히 이루어지길 기대한다.

참 고 문 헌

고성은 외 5 (2004). 수학7-나, 서울: 블랙박스.

김응태 · 박한식 · 우정호(1989). 수학교육개론. 서울: 서울대학교 출판부.

배종수 외 7 (2004). 수학7-나, 서울: 한성교육연구소.

우정호 (2004). 수학 학습지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교.

윤성재 (1991). Freudenthal의 기하교육관 고찰, 대한수학교육학회논문집, **제1권 제1호**.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습지도론 연구, 박사학위논문, 서울: 서울대학교.

정영옥 (1999). 현실적 수학교육에 대한 고찰, 대한수학교육학회논문집.

황혜정 외 (2001). 수학교육학신론, 서울: 문음사.

Cobb, P. (1987). Informational-processing Psychology and Mathematics Education: A Constructivist Perspective. *The Journal of Mathematics Behavior*, **6(1)**, pp.4-40

De Lange, J. & Verhage, H. B. (1987). *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Math A and achievement testing.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

____________ (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht: The Netherland: D. Reidel Publishing Company.

____________ (1991). *Revisiting Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

____________ (1997). *Mathematics as an Education Task*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1990). Realistic Geometry Instruction. In Gravemeijer, K., Van den Hervel, M., Streefland, L.,(Eds), *Contexts Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*, Urecht : OW&OC pp.79-90.

____________ (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht: CD β Press, Freudenthal Institute.

____________ (1997). The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategics and Procedures, *Instructional design for Reform in Mathematics Education*, In Beishuzen, M, Gravermeijer ed. Utrecht: CD β Press.

Streefland, L. (1990). Realistic Mathematics Education(RME). What does it mean? In Van den Hervel, M., Streefland, L.,(Eds). *Contexts Free Productions Tests and Geometry in*

Realistic Mathematics Edtcation, Urecht : OW&OC pp.1-9.

Treffers, A. (1987). Three dimension: *A model of goal and theory description in mathematics education* - The Wiscobas project,

__________ (1991-1). Realistic mathematics education in The Netherlands 1980-1990. In Streefland, L.(Eds). *Realistic Mathematics Education In Primary School*, Freudenthal Institute. Utrecht: CD β Press. pp.11-20.

<부 록>

새로 학습할 내용 : 다음의 내용에 대하여 학습해 보자.
· 다각형의 의미와 그 성질을 이해할 수 있다.
· 대각선의 의미와 대각선의 개수를 구할 수 있다.

· 학습목표 1 - 다각형의 의미와 그 성질

· 다각형이란 무엇인가?

1. 다음의 사진에서 여러 가지 도형을 찾아보자.
2. 교실을 둘러보자. 어떤 도형들을 볼 수 있는가? 우리 주변에서 관찰할 수 있는 여러 가지 사물 속에 나타나는 도형에 대하여 생각해 보고 말해 보자.
3. 문제 1과 문제 2에서 관찰한 도형의 모양을 그려보자.
4. 문제 3에서 그려본 여러 가지 도형 중 자를 사용하여 그린 도형은 어떤 것들이 있는가? 선분의 개수가 적은 것부터 자를 사용하여 그려보자.
5. 위의 문제 4에서 그린 도형들의 공통적인 특징들은 무엇인지 말해보자.

학습내용정리 1

1. 다각형이란 어떤 도형을 말하는지 알아보자.
2. 정다각형의 성질에 대해 말해보자.

· 학습목표 2 - 대각선의 의미와 그 성질

· 대각선이란 무엇인가?
· 대각선의 총 수 구하기

6. 문제 4에서 그린 다각형의 내부에 각 도형의 한 꼭지점에서 다른 꼭지점으로 선분을 그려보자. 각각 몇 개를 그릴 수 있는가?
7. 다음의 빈 칸을 채우면서 여러 가지 다각형을 관찰해 보자. 다음의 (1), (2), (3), (4), (5)를 차례대로 풀어보자.

표 생략

학습내용정리 2

1. 문제 6을 참고하여 대각선이란 무엇을 말하는지 정리해 보자.
2 문제 7을 참고하여 n각형에서 총 대각선의 개수는 어떻게 구할 수 있는지 정리해 보자.

8. 다음 다각형에서 대각선의 총수를 구하여라.

(1) 팔각형 (2) 십칠각형 (3) 이십각형