韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 441-451

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 441-451

EIS이론에 따른 정수 지도에서 학생의 학습 과정 연구

고 상 숙 (단국대학교)
전 태 훈 (단국대학교 대학원)

수학의 내용을 학생에게 지도할 때 기계적인 계산법칙을 가르치는 것보다 개념을 이해할 수 있도록 돕는 것은 교사의 중요한 역할이다. 그 동안 연구를 통해 정수를 지도하기 위한 모델들은 꽤 많이 알려져 왔으나 이 모델들을 학생에게 직접 적용하였을 때 일어나는 현상을 파악한 연구는 그리 많지 않다. 따라서 본 연구는 상위, 중위권 초등학교 5학년을 대상으로 EIS이론에 바탕을 둔 정수의 모델을 통해 학생들이 정수의 개념을 어떻게 형성하고 그 과정에서 어떤 오류를 나타내는지, 또 무엇을 가장 어려워하는지 등 그 학습과정을 조사하였다.

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

김은미(2003)의 연구에서 교사를 대상으로 한 설문조사에 의하면 음수의 덧셈과 뺄셈 지도 시 가장 많이 사용하는 모델은 수직선 모델로 각각 67.9%, 70.4%를 차지하였다. 하지만 '음수의 곱셈지도 시 많이 사용하는 모델은 무엇입니까?'라는 질문의 결과는 '사용하지 않고 계산법칙을 바로 알려준다'라는 응답이 40.9%로 가장 많았고 수직선 모델은 18.2%로 그 다음을 차지하였다.

이 결과에 의하면 학교 현장에서 많은 교사들은 음수의 곱셈에 대해서 개념의 이해보다는 기계적인 계산법칙만을 강조하고 있다는 것을 알 수 있다. 수학교육에 있어서 기계적인 계산법칙을 가르치는 것보다 개념을 이해시키는 것이 더욱 중요한 교사의 역할이라는 것을 우리는 알고 있다.

음수의 개념을 이해시키기 위한 직관적 모델과 형식적 모델은 많이 제시되어 있다. 학교에서 가장 많이 사용되고 있는 모델은 수직선 모델이다. 하지만 수학교육자, Freudenthal은 수직선이 차라리 수직 방향으로 사용되는 것이 나을 것이라고 제안했다. 정수의 곱셈을 지도하기 전 음수를 가르칠 때 사용되는 모형 중 가장 많이 쓰이는 온도계를 보자. 온도계는 수평이 아닌 수직으로 된 모양을 하고 있다. 그리고 학생들은 좌-우 개념에 대해 매우 많은 혼돈을 하게 된다. 따라서 수직선의 양극이 제대로 구별되지 않은 상태에서 수직선의 좌-우가 음-양으로 나뉜다고 구별하기까지 학생들은 많은 시간을 보내야 한다. 따라서 수직선 모형도 정수의 곱셈을 가르치기 위해선 수평의 모형보다는 수직의 모형이 더 바람직하다고 생각한다(홍순영, 2002).

따라서 본 연구를 위해 음수의 개념과 그 연산을 지도할 때 직관적 모델 중, Bruner의 EIS학습에 따른 정수의 개념과 연산 지도 모델을 '음의 횟수의 개념 정의와 학습화 전략에 관한 연구'(김명운,

1995)에서 발췌하였다. 그러나 그 논문에서는 수체계의 지도 모델에서 나눗셈 지도 모델은 제시가 되어 있지 않았고, 교육 현장의 학생들에게 사용하지 않고 예상답변만을 제시하여 실제 상황을 알기 어렵다. 본 연구자는 김명운 논문에 제시되어 있는 EIS이론에 따른 정수의 개념과 연산 지도 모델의 구성에 따라 정수의 나눗셈 지도 모델을 개발하였고, 이 정수 지도 모델을 현장에 적용하여 실제를 경험함으로써 학생이 실제 직면하는 교육학적 현상, 즉 이 모델을 통하여 학생들은 어떻게 개념을 형성하며 어떤 오류를 가져오는지, 이 모델을 통해 지도하였을 때 무엇을 가장 어려워하고 그 이유가 무엇인지를 파악하고자 한다.

2. 연구 문제

학생들은 상징적 표현 단계에 도달하는 과정에서 하위단계와 어떻게 관련을 지어 나가는가?

3. 연구의 제한점

본 연구에서 다루고자 하는 정수의 수체계는 7-가 단계에서 처음 나온다. 하지만 선행학습이 이루어졌을 경우 연구에서 얻고자 하는 올바른 결론을 이끌어 낼 수 없다는 판단에 자연수의 사칙연산을 학습한 초등학교 5학년 학생 2명을 선정하였다. 따라서 중학교 1학년 학생을 대상으로 실험 했을 경우 차이가 있을 수 있다. 이는 브루너가 "어떤 아이디어나 문제 또는 지식의 본체는 특정한 학습자가 인식할 수 있는 형태에서 그것을 이해할 수 있도록 충분하게 단순한 형태로 제시될 수 있다"(Bruner, 1966, p.44)라고 주장한 바에 의하면 본 연구 내용이 이야기 식으로 초등학교 학생도 이해하기 쉬운 형태를 지니고 있어 연구 대상의 선택이 무리가 없다고 사료되었다.

4. 용어의 정의

브루너의 EIS 이론에서 활동적, 영상적, 그리고 상징적이라는 세 단계 표현수단을 거쳐 발달하게 되는데 이 때 상위단계와 하위단계의 구분이 가능하다. 즉, n의 단계는 n-1 단계의 상위단계이며 n+1 단계의 하위 단계라고 할 수 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

EIS 이론

Bruner(1964)는 아동의 지능의 발달을 활동적 표현(Enactive presentation), 영상적 표현(Iconic presentation), 상징적 표현(Symbolic presentation)의 순서로 표현수단의 증대와 그 사이의 조정능력의 증대로 보았다. 활동적 표현이란 Piaget의 감각-운동기에 해당하는데 개념을 구체물 또는 물리적 활동

을 통하여 표현하는 것이다. 예를 들면, 시소놀이를 하던 중에 자기 쪽이 내려가도록 더 뒤로 물러앉거나, 저울대의 양쪽에 여러 가지 무게의 추를 다른 위치에 놓아 균형을 맞추어 보는 것이다. 영상적 표현이란 수학적 개념을 사물을 조작하지 않고 모형, 시범실험, 그림 등을 통해 학습하는 것이다. 즉, 아동들이 행동을 기억하거나 필요할 때 재생산해 낼 수 있는 방법으로 작용하거나 조작을 영상화시킬 때 중요한 특징을 머리 속에 떠올릴 수 있는 단계이다. 예를 들면, 불필요한 세부적 요소들을 제고하고 오로지 거리와 무게의 관계만으로 표현한 시소와 저울의 모형 또는 그림이 지식을 영상적으로 표현한 실례들이다. 상징적 표현이란 수학적 개념을 문자나 기호만을 사용하여 표현하는 것이다. Piaget의 형식적 조작단계에 해당하며 기호를 사용할 줄 알아서 추상화가 가능해 진다. 문자식, 함수, 그래프의 사용 등은 이에 속한다. 이 세 가지 표현 수단을 EIS이론이라고 한다(홍민정 재인용, 2002).

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상

본 연구자는 정수의 사칙연산이 중학교 1학년 과정에 접하게 되지만 학생들이 정수의 연산을 이미 학습하여 본 연구에서 원하는 결과를 이끌어 낼 수 없다는 판단에 자연수의 사칙연산을 배운 초등학교 5학년 학생 2명을 경기도 성남에 위치한 A 초등학교에서 선정하였다. 정수를 초등학생을 연구 대상으로 한 배경에는 선행학습을 최대한 배제한다는 연구자의 의도뿐만 아니라 이는 브루너(1966)가 “어떤 아이디어나 문제 또는 지식의 본체는 특정한 학습자가 인식할 수 있는 형태에서 그것을 이해할 수 있도록 충분하게 단순한 형태로 제시할 수 있다(p. 44)”라고 주장한 그의 이론에 따라 특히 이야기식으로 구성되어있는 본 연구의 내용은 초등학생의 수준에 무리가 없다는 판단하에 결정하게 되었다.

학생 A는 학교 성적이 상위권인 학생으로 수학 또한 매우 잘하는 편이다. 아직 저학년 이어서 공식과 수학문제를 연결시키진 못하나 수학에 대한 개념원리 이해는 잘 하는 편이다. 나름대로 문제를 접근하려고 노력하고 다소 실수하는 면이 있으나 문제에 대해 내용의 이해력도 뛰어나며 집중력도 좋다.

학생 B는 학교 성적이 중위권으로 수학 성적 또한 중위권이다. 교과서 수준의 문제에 대한 이해, 풀이는 잘 하는 편이다. 계산 능력이나 수학에 대한 관심과 수업태도도 좋은 편이다. 그러나 응용력이 부족하여 어려운 문제나 변형된 문제는 스스로 풀이하기 힘들어한다. 시간을 충분히 두고 학습하면 교사의 설명이나 학습내용을 이해 할 수 있다.

2. 연구 절차

연구도구는 이미 제시되어있는 EIS이론에 따른 정수의 연산 지도모델을 이용하고 정수의 나눗셈

에 대해서는 본 연구자가 EIS이론에 따라 학습 자료를 개발하였다. 연구를 위한 부도구인 그림판과 종이 인형(엄지, 천사, 사탄, 풍선, 돌멩이)을 이용하여 정수의 연산 지도 시 1단계와 2단계에서 시각적 효과를 주어 지도하였다. 부도구 사용의 예는 부록에서 확인할 수 있다.

연구는 초등학교 5학년 학생 2명을 대상으로 이루어졌고, 2004년 5월 12일에는 정수의 개념과 덧셈, 15일에는 정수의 뺄셈, 19일에는 정수의 곱셈, 22일에는 정수의 나눗셈을 지도하였다. 각 정수의 연산 지도 시 EIS이론에 따라 활동적 표현 단계(1단계), 영상적 표현 단계(2단계), 상징적 표현 단계(3단계)로 구성하여 지도하였다.

두 학생의 학습과정은 연구자의 관찰과 기록지, 학생의 메모 등에 의하여 이루어졌다.

3. 연구 도구

본 논문의 연구 도구는 '음의 횟수의 개념 정의와 학습화 전략에 관한 연구'(김명운, 1995)에서 개발된 EIS이론에 따른 정수 지도 모델을 사용하였다. 그리고 위 논문에는 정수의 개념, 덧셈, 뺄셈, 곱셈만이 제시되어 있어 정수의 나눗셈 지도 전략은 본 연구자가 EIS이론에 따른 정수 지도 모델의 구성에 따라 개발하였다.

부록에는 사용된 지도 모델 중 정수의 나눗셈만을 제시하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 정수의 개념과 덧셈(1 Unit)

• 정수의 덧셈지도 전략 2단계

연구자 : 이제 엄지에게 풍선과 돌멩이를 달아 주려고 해요. 그런데 달아 준다는 것은 엄지가 풍선이나 돌멩이를 갖게 된다는 것이니까 '달아준다'를 '+'라고 약속 합시다. 여기서 '+'와 '(+3)'은 다른 뜻임을 주의하세요. '+'는 '달아준다'라고 했고 '(+3)'이나 '(+4)'는 풍선 3개와 풍선 4개를 뜻하는 거예요.
그럼 '풍선 3개를 달아준다'를 숫자와 +를 이용해서 나타내면 +(+3)이 되는 거죠. 이제 돌멩이를 달아 볼까요? '돌멩이 3개를 달아준다.'는 어떻게 표현될 수 있을까요?

학생들 : +(-3)이요. (자신 없어하며)

연구자 : 네, 맞아요. 돌멩이는 (-3)이고 달아준다는 것은 +니까 +(-3)으로 나타낼 수 있어요. 그럼 먼저 엄지가 풍선 2개를 갖고 있는데 거기에 풍선 4개를 달아주면 어떻게 될까요?

학생A : (+2)+(+4)요.

연구자 : 네. 잘했어요. 그럼 엄지는 몇 칸을 움직였을까요?

학생A : 풍선이 6개 있어요. 그러면 하늘나라로 6칸 올라갔어요.

연구자 : 그러면 어떻게 쓸 수 있나요?

학생A : +6이요.

연구자 : 네 잘했어요. 그럼 이번에는 돌멩이를 달아 줘 봅시다. 엄지가 돌멩이를 3개 갖고 있는데 거기서 돌멩이 1개를 달아주면 어떻게 될까요? 학생B가 대답해 보세요.
학생B : 똑같이 하면 되요. (-3)+(-1)이 되고요 그러면 돌멩이가 4개 있는 거니까 -4가 되요. 그냥 돌멩이 두개를 더하면 되잖아요.

학생들이 음수의 개념을 학습하지 않았지만 자연수의 더하기에서 배운 것을 양수끼리 혹은 음수끼리의 더하기에 연결시킨 것이다. 초등학교 2학년 과정에서 학생들은 더하기를 어떤 물건의 합의 개수로 학습한다. 여기에서도 그때와 마찬가지로 돌멩이의 개수를 더하고 마지막에 돌멩이는 음수로 표현되어지는 것이다. 또한 양수의 더하기에서도 이와 마찬가지로 해석한다.

2. 정수의 뺄셈(2 Unit)

▪ 정수의 뺄셈 지도 전략 2단계

연구자 : 엄지에게 천사가 풍선 2개를 달아 주었고 천사가 돌멩이 3개를 잘라버렸어요. 그럼 어떻게 될까요?
학생A : 풍선이 2개 있으니까 엄지가 2칸 올라가요. 그리고 천사가 돌멩이 3개를 잘라버리면….
연구자 : 무슨 문제가 있나요?
학생B : 돌멩이는 엄지한테 없는데 어떻게 잘라요?
연구자 : 아! 그렇군요. 그럼 어떻게 해야 할까요? 돌멩이를 잘라내는 것 대신에 다른 것을 했으면 좋겠는데 어떻게 해야 할까요? 선생님이 아까 이야기 해 주었는데요. 잘 생각해 보세요. 자르는 것 대신에 무엇을 할 수 있죠?
학생A : 풍선을 대신 달아줘요.
연구자 : 그렇죠. 돌멩이 3개를 자르는 것 대신에 풍선을 3개 달아주면 되겠죠. 그럼 엄지는 어떻게 될까요?
학생들 : 다섯 칸 올라가요(그림을 생각해 보고).

▪ 정수의 뺄셈 지도 3단계

-중략-

연구자 : 다음 식을 한 번 계산해 봅시다. (+4)-(-5)는 무엇일까요? 학생B가 대답해 보세요.
학생B : -1이요.
연구자 : 학생A는 어떻게 생각해요?
학생A : -1이요.
연구자 : 왜 그렇게 생각하죠?
학생A : 4에서 5를 뺐으니까요.

본 연구자는 정수의 덧셈 지도 시에 나타났던 현상처럼 자연수의 연산을 확장하여 '돌멩이-돌멩이' 즉, '음수-음수'를 해결할 것으로 예상하였다. 하지만 연구 결과 뺄셈에서는 자연수의 연산을 연결시키지 못하는 것으로 나타났다.

그리고 정수의 뺄셈에서 문제를 식으로만 주어지면 뺄셈의 연산을 덧셈처럼 계산하려는 경향이 있었다. 이는 연산 부호보다도 숫자 앞의 부호만을 생각한다는 것이다. 이것은 다시 말하면 식으로만 주어진 문제를 해결할 때 2단계인 영상적 표현 단계의 상황을 제대로 문제에 연결시키지 못한다는 것이다. 또한 뺄셈의 계산을 독립적으로 해결하지 못하고 덧셈으로 바꾸어 계산하도록 지도 모델이 구성되어 있어 학생들의 이러한 행동에 크게 영향을 미쳤다고 볼 수 있다.

EIS이론에 따른 지도 모델의 사용시 문제의 해결을 위해서는 영상적 표현 단계를 거쳐야 한다. 하지만 학생들은 영상적 표현에서 상징적 표현으로의 단계 상승은 잘 되지만 상징적 표현에서 영상적 표현단계로 연결되는 것은 제대로 이루어지지 않는 것으로 볼 수 있다.

3. 정수의 곱셈(3 Unit)

▪ 정수의 곱셈지도 전략 2단계

연구자 : 선생님이 한 이야기와 그림 잘 보았나요? 이제 지금까지 이야기 했던 것을 다시 한번 생각해 보기로 해요.
풍선 4개씩 천사 3명이 엄지에게 달아 주었어요. 그럼 엄지에게 풍선 4개를 몇 번 달아주는게 될까요?

학생들 : 천사가 3명이니까 3번이요.

연구자 : 그러면 차근차근 계산이 어떻게 되는지 살펴보도록 하죠. 천사가 3명이니까 그 천사들을 천사1, 천사2, 천사3 이라고 합시다. 그리고 이 천사들이 각각 풍선을 4개씩 엄지한테 달아주는 거예요. 그런데 엄지는 처음에는 아무것도 가지고 있지 않아요. 그래서 처음에는 '0'에서부터 시작하게 되요. 그럼, 먼저 천사1이 엄지한테 풍선 4개를 달아주면 '0+(+4)'가 되죠. 그리고 천사2가 풍선 4개를 달아주면 '0+(+4)+(+4)'가 되죠. 천사3이 풍선 4개를 또 달아주면 어떻게 될까요?

학생A : '0+(+4)+(+4)+(+4)'요.

연구자 : 네, 맞았어요. 이렇게 하면 풍선 4개를 3번 달아준 것이 되죠. 이것을 계산하면 어떻게 될까요? 학생B가 답해 보세요.

학생B : 풍선 12개요. 그러니까 '+12'요.

연구자 : 잘했어요. 그래서 '0+(+4)+(+4)+(+4)=+12'가 되는 거예요. 그런데 식이 길어지면 보기에도 좋지 않고 계산하기 힘들어지겠죠? 그래서 곱하기를 써서 표현할거예요. 곱하기에 대해서는 여러분은 학교에서 배웠으니까 쉽게 알 수 있겠죠?

학생들 : 네~.

연구자 : (+4)가 몇 번 더해지나요?

학생들 : 3번이요.

연구자 : 그래서 (+4)가 3번 더한다는 것을 (+4) ×(+3)이라고 할 수 있어요. 즉, '0+(+4)+(+4)+(+4)=(+4) ×(+3)'과 같이 쓸 수 있는 거죠. 어렵지 않죠?

학생B : 그런데요. 덧셈하고 뺄셈 할 때 '(+3)'은 풍선 3개였잖아요. 지금까지 그렇게 계산 했잖아요.

연구자 : 네, 좋은 질문이에요. 전에 배웠던 덧셈, 뺄셈에서는 '(+3)'이라고 하면 풍선 3개를 뜻했는데요. 곱하기에서는 계산부호 ' ×'뒤에 나오는 숫자를 '3번 달아준다'라는 의미로 약속할거예요. 그리

고 조금 있다가 배우겠지만 '(-3)'인 경우에는 '3번 자른다'라고 약속할 거예요. 덧셈, 뺄셈에서는 모두 풍선이나 돌멩이를 뜻하지만 곱셈에서는 차이가 있다는 것을 잘 기억해 두세요.

연구자 : 이제 풍선을 몇 번 잘라 내는 것을 해 보기로 해요.

풍선 2개씩 3번 잘라내 봅시다. 아까 했던 것처럼 식으로 나타내면 어떻게 될까요? 잘라 내는 것은 '-'이죠. 그러면 우선 엄지가 아무것도 갖고 있지 않으니까 처음에는 '0'이고, 풍선 2개니까 (+2)이고 3번 잘라 내니까 '0-(+2)-(+2)-(+2)'이죠. 그리고 우리가 약속 했듯이 풍선 2개를 3번 잘라 냈으니까 '(+2) ×(-3)'이 되는 것이죠. 아시겠어요?

학생들 : 네.

연구자 : 그러면 그 결과는 어떻게 되죠?

학생B : 휴~. 어려워 보여요

연구자 : 아까 더하기는 잘 했었잖아요. 식에 빼기가 많아서 그런가요? 쉽게 뺄셈을 여러 번 해준다고 생각하면 되요. 우리 지난 시간에 뺄셈 할 때 풍선 2개를 자르는 것은 무엇이랑 같다고 했었죠?

학생A : 돌멩이 두개 달아주는 거요.

연구자 : 네. 그러면 풍선 2개를 자르는 것 '-(+2)'를 모두 '+(-2)'로 바꾸면 되겠네요. 그러면 '0-(+2)-(+2)-(+2)=0+(-2)+(-2)+(-2)'가 되죠? 이제 돌멩이 2개를 3번 달아주는 것으로 바뀌었네요. 이것을 계산하면 얼마죠?

학생A : -6이요.

연구자 : 네. 맞았어요. 학생B도 알겠어요?

학생B : 네.

학생들은 주어진 식이 '덧셈 혹은 뺄셈'이냐 아니면 '곱셈'이냐에 따라 정수의 약속이 다르기 때문에 어려워하였다.

정수의 곱셈을 지도해 본 결과 두 수 중 어느 것이 '풍선 혹은 돌멩이'이고 '몇 번 달아주는 행위 혹은 자르는 행위'인지에 대해 실수를 많이 하였다.

정수의 곱셈지도에서 곱셈의 개념을 설명하기 위한 동수누가와 동수누감은 학생들이 이해하기는 좋았으나 학생들이 직접 그것을 이용하여 식으로 표현하는 데에는 무리가 있었다. 동수누가나 동수누감을 이용하여 식으로 표현하는 데에 있어서 가장 어려워하는 것은 '-'부호의 역할이 식의 전개에서 어느 부분에 표현해야 하는지를 결정하는 것이었다.

이 모델을 사용하여 곱셈을 지도해 본 결과 주어진 동수누감의 문제를 이야기로 바꾸고 그것을 뺄셈식으로 전개하는 과정이 쉽게 이루어지지 않았다. 이 과정을 학습자가 쉽게 다음과정을 이행할 수 있도록 충분히 학습시킨 후 곱셈식을 전개할 때에 영상적으로 떠올릴 수 있도록 한다면 기존의 다른 모델에서 설명하기 어려웠던 (-) ×(-)=(+)의 설명을 영상적 표현단계에의 언어적 약속과 그림을 통하여 그 개념을 이해하는데 학생들이 좀 더 쉽게 접근 할 수 있을 것이다.

4. 정수의 나눗셈(4 Unit)

일반적으로 초등학교 수학교과에서 자연수의 나눗셈을 지도 할 때 a개의 물건을 b명의 사람이 나누어 갖는 것으로 지도한다. 그와 같이 정수의 나눗셈을 지도 할 때 풍선이나 돌을 천사나 사탄이 나누어서 달아주거나 자르기 때문에 나눗셈에 대한 거부감이나 학습하는데 오랜 시간이 걸리지 않았다.

그러나 나눗셈의 지도 과정에서 나오는 수의 부호의 의미가 곱셈과 달라지므로 학생들은 문제가 주어질 때마다 다시 생각해야 하는 번거러움이 있었다.

학생들이 곱셈에서의 부호의 의미와 나눗셈에서의 부호의 의미를 정확히 이해하고 스스로 자연스럽게 계산과정에 적용할 수 있다면 정수의 나눗셈을 학습하는데 어려움이 없다. 따라서 부호를 결정하는 데에서는 충분히 반복하여 학습 시킬 필요가 있다.

V. 결론

학생들은 상징적 표현 단계에 도달하는 과정에서 하위단계와 어떻게 관련을 지어 나가는가?

학생들은 거의 대부분의 과제에서 활동적, 영상적, 상징적인 표현단계를 늘 순환하는 것으로 나타났다. 이는 이야기식의 활동이 단순히 몸동작에 의한 감각 능력에 초점을 두는 것이 아니고 의미론적 언어의 해석을 거쳐 상징적으로 발달해가기 때문으로 보인다.

본 논문의 연구 도구로 사용 된 EIS이론에 따른 정수의 수체계 지도 모델에서는 2단계인 영상적 표현 단계에서 각 정수와 연산 부호를 이야기 속에 나오는 사물이나 행위로 약속을 한다. 그리고 풍선과 돌멩이를 달아주거나 자르는 행위를 이 약속을 바탕으로 하여 식으로 바꾸고, 엄지가 올라가거나 내려가는 그림을 학생이 스스로 연상하여 그 식의 결과값을 결정하게 된다.

이 과정을 거쳐 3단계인 상징적 표현 단계에 도달하기 위해서는 활동적 표현 단계를 거쳐 내면화시킨 영상적 표현 단계로 되돌아가야 한다. 다시 말하면 주어진 식을 영상적 표현 단계에서 약속한 풍선과 돌멩이를 달아주거나 자르는 행위로 바꾼다. 그리고 이를 통하여 그림을 연상하여 식의 결과값을 얻게 되는 것이다.

본 연구자가 정수의 수체계를 지도한 결과, 영상적 표현 단계에서 연구자의 지도에 의해 이야기를 식으로 바꾸는 과정은 학생 스스로 할 수 있게 되었다. 이는 영상적 단계에서 연구자의 의도에 의해 충분히 학습이 이뤄진 것을 의미한다. 하지만 상징적 표현 단계로의 발달하는 과정에서는 학생 스스로가 주어진 식을 보고 이야기로 바꾸는 것에 대해서 어려워하였다. 이는 과거에 경험했던 것과 다른 새로운 고차원적인 사고의 처리 부담을 요구하는 과정이므로 학생들은 이에 대해 충분한 준비가 필요하다.

따라서 주어진 식과 영상적 표현 단계의 언어적 약속을 서로 바꾸어 생각할 수 있도록 교사가 지도한다면 '식 ■ 정수와 부호의 약속 ■ 언어적 표현 ■ 영상적 표현 ■ 결과'의 경로를 통해 충분히 상징적 표현 단계에 도달하게 될 것이며, 이는 기존의 도구와 다르게 본 연구 도구가 지니는 특징임을 알 수 있다. 이는 본 연구에서 제시된 모델의 장점으로 볼 수 있으며 그 동안 정수의 사칙 연산에서 어려웠던 부분이 어느 정도 해소된 것을 알 수 있어, 이와 같이 현장에서 활용 가능한 모델 개발을 위해 많은 연구가 수학 교육의 다양한 부분에서 이뤄져야 할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

김명운 (1995). 음의 횟수의 개념 정의와 학습화 전략에 관한 연구, 경성대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김은미 (2003). 음수지도에 관한 고찰, 숙명여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

홍민정 (2002). 활동주의 입장에서의 도형지도를 위한 자료 개발, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.

홍순영 (2002). 정수 지도에 관한 연구, 고려대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Bruner, J. S. (1964). Some theorems on instruction illustrated with reference to mathematics. *The Sixty-third yearbook of the National Society for the Study of Education*(Pt. 1), **63**, pp.306-335.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

부 록

• 정수의 나눗셈 지도 전략

<제 1단계>

풍선매달기와 돌멩이 지르기를 계속한 천사들은 짝을 지어서 풍선이 보이면 무조건 달아주고 돌멩이가 보이면 무조건 자르기 시작하였습니다. 그리고 천사장은 천사 한 명이 얼마나 많은 일을 하는지를 살펴보았습니다. 이 때 천사장은 풍선인지 돌멩이인지에는 관심이 없었고 몇 개를 자르거나 달아주었는지만을 보았습니다. 풍선 4개를 보면 천사 두 명이 보면 그 천사 두 명이 4개의 풍선을 나누어서 엄지에게 달아주어 천사 한 명이 두 개의 풍선을 달아주게 되고, 돌멩이 4개를 보면 천사 두 명이 4개의 돌멩이를 서로 나누어서 잘라 천사 한 명이 돌멩이 두 개를 자르게 하였습니다.

이와 마찬가지로 사탄 또한 풍선을 보면 무조건 자르고 돌멩이를 보면 무조건 엄지에게 달아주었고, 사탄장 역시 사탄 한 명이 얼마나 많은 일을 하는지를 살펴보았는데 몇 개를 자르거나 달아주었는지만을 보았습니다. 풍선 6개를 사탄 3명이 보면 그 3명이 6개의 풍선을 나누어서 잘라 사탄 한 명이 풍선 2개를 자르게 되었고 돌멩이 6개를 보면 사탄 3명이 6개의 돌멩이를 나누어서 달아주어 사탄 한 명이 돌멩이 2 개를 달아주게 되었습니다.

자 여러분도 천사장과 사탄장이 되어서 한 명이 얼마나 많은 일을 했는지 살펴보세요.

<제 2단계>

풍선는 엄지를 하늘나라로 올라가게 하여 양수로 표현되었고, 돌멩이는 엄지를 내려가게 하여 음수로 표현하였다. 여기에서 피제수는 곱셈에서와 마찬가지로 풍선이나 돌멩이를 의미하고 제수는 천사나 사탄을 의미하는데 천사는 엄지에게 하늘나라로 올라갈 수 있도록 해주므로 양수가 되고 사탄은 엄지를 내려가게 하므로 음수가 된다.

풍선이나 돌멩이를 천사나 사탄이 나누어서 매달거나 자른다. 이것은 다시 말해서 a 개의 풍선이나 돌멩이를 b 명의 천사나 사탄이 나누어 갖는다는 것과 같은 의미이다. 또한 천사는 풍선을 매달아주려하고 돌멩이를 자르려 한다. 그와 반대로 사탄은 풍선을 자르려하고 돌멩이를 매달아주려 한다. 예를 들어, 풍선 4 개를 천사 2 명이 보면 천사들은 4 개의 풍선을 엄지에게 각각 달아주게 되는데 풍선 4 개를 천사 2 명이 나누어 갖게되므로 '2'가 되고 천사는 풍선을 달아주므로 '+'가 되어 결국 '+2'가 되는 것이다.

결국 (+) ÷ (+) = (+), (+) ÷ (-) = (-), (-) ÷ (+) = (-), (-) ÷ (-) = (+) 임을 알 수 있다.

$a>0$, $b>0$ 일 때

① 풍선 a개를 천사 b 명이 나누어 달았다.

$(+a) \div (+b) = +\frac{a}{b}$

② 풍선 a개를 사탄 b 명이 나누어 잘랐다.

$(+a) \div (-b) = (-\frac{a}{b})$

③ 돌멩이 a 개를 천사 b 명이 나누어 잘랐다.

$(-a) \times (+b) = (-\frac{a}{b})$

④ 돌멩이 a 개를 사탄 b 명이 나누어 달았다.

$(-a) \div (-b) = (+\frac{a}{b})$

<제 3단계>

정수의 나눗셈에 관한 여러 문제를 천사와 사탄이 같은 개수의 풍선과 돌멩이를 나누어 달아주거나 잘라버리는 놀이를 하던 것을 연상하며 계산에 임하도록 한다. 즉, 계산에서의 제수가 양수일 때 피제수가 양수이면 달아주고 제수가 양수일 때 피제수가 음수이면 잘라버리는 행위를 연상하며 계산에 임하도록 한다. 그리고 제수가 음수일 때 피제수가 양수이면 잘라버리고 제수가 음수일 때 피제수가 음수이면 달아주는 행위를 연상하면서 계산에 임하도록 한다.