

패턴블록과 조노돔을 활용한 테셀레이션 지도방안 탐색

김 남 균 (청주교육대학교)

I. 개요

테셀레이션(tessellation)은 마루나 욕실 바닥에 깔려 있는 타일처럼 어떠한 틈이나 포개짐이 없이 평면이나 공간을 닫힌 도형으로 완벽하게 덮는 것을 말한다. 테셀레이션은 고대의 문화 유적, 오래된 건축물, 문양, 자연 현상에서도 찾아볼 수 있다. 테셀레이션의 오랜 역사에 비해 테셀레이션을 수학적으로 연구하고 수학교육에 활용한 역사는 그리 길지 않으나, 도형의 성질과 도형의 변환을 탐구하며 수학적 미를 느낄 수 있는 좋은 주제로 최근 수학교육계에서 관심이 점차 확대되고 있다. 테셀레이션으로 탐구할 수 있는 초·중등 수준의 수학개념은 다각형의 각, 내각의 합, 정다각형, 변의 길이, 넓음, 도형의 변환 등이다. 종이접기와 오리기에서 테셀레이션을 위한 컴퓨터 프로그램까지 테셀레이션을 구성하면서 관련된 수학개념을 탐구할 수 있는 교구는 다양하다. 그 중에서도 수학적 조작 교구인 패턴블록(Pattern blocks)과 조노돔(Zonodome)은 테셀레이션으로 탐구할 수 있는 개념의 수준을 조절하면서도 다양한 테셀레이션을 구성할 수 있는 좋은 자료이다. 패턴블록은, 변의 길이가 일정하고 각의 크기가 30° 의 배수인 다각형으로 비교적 단순한 형태의 테셀레이션을 구성하면서 탐구할 수 있어 테셀레이션의 도입과 기초 개념을 이해하는 수준의 활동에 적절하다. 조노돔은 연결봉의 종류와 길이, 연결체와 연결봉의 결합으로 생길 수 있는 각의 크기가 패턴블록보다 다양하여 패턴블록으로 학습한 개념을 심화하는데 적합하다.

본 고에서는 패턴블록과 조노돔을 조작하여 테셀레이션을 구성하며 테셀레이션과 관련된 수학적 아이디어를 탐구할 수 있는 활동을 실습해 본다.

II. 테셀레이션

테셀레이션은 한 가지 이상의 다각형뿐 아니라 다양한 도형으로 구성할 수 있다. 본 고에서는 다각형으로 변과 변을 완전히 일치하게 붙여서 만든 것으로 한정한다.



1. 테셀레이션의 유형

- (1) 정규 테셀레이션(regular tessellation) : 합동인 정다각형으로 만든 테셀레이션
- (2) 반정규 테셀레이션(semiregular tessellation) : 두 개 이상의 정다각형으로 만든 것으로 한 꼭지점을 선택하여 만나는 다각형들의 배열과 순서가 어느 꼭지점이든 모두 동일한 테셀레이션
- (3) 준정규 테셀레이션(demiregular tessellation) : 모든 꼭지점의 정다각형의 배열과 순서가 모두 같은 정규·반정규 테셀레이션과는 달리, 한 꼭지점에서 만나는 정다각형의 배열이 2~3가지인 테셀레이션
- (4) 비정규 테셀레이션(nonregular tassellation) : 정다각형이 아닌 다각형(오목 다각형 포함)으로 이루어진 테셀레이션

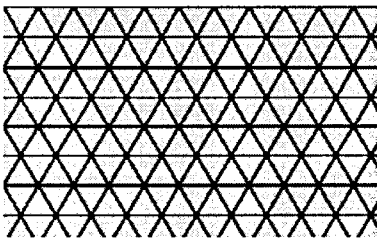
2. 테셀레이션 이름 붙이기

정규, 반정규, 준정규 테셀레이션의 이름은 다음과 같은 방법으로 붙인다.

- ① 한 꼭지점을 택하여 정다각형의 배열을 정다각형의 변의 수를 숫자로 적고 ‘.’으로 연결한다.
- ② 변의 수가 가장 적은 정다각형을 가장 먼저 적는다.
- ③ 연속적으로 사용된 수가 가장 많은 곳에서부터 시작한다.
- ④ 배열을 적는 방향은 시계방향이나 반시계 방향 모두 가능하지만, 한 방향을 정하여 순서에 따라 정다각형의 변의 수를 적어야 한다.
- ⑤ 준정규 테셀레이션은 ‘/’로 2~3가지의 배열을 연결한다.

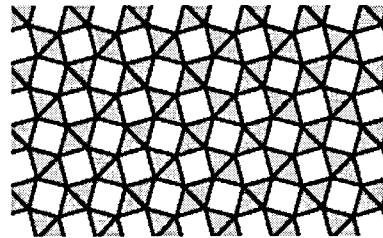
3. 테셀레이션의 예

(1) 정규 테셀레이션



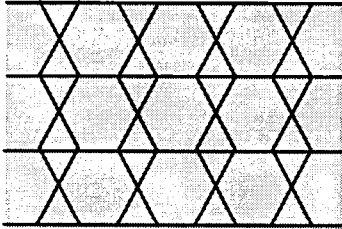
3.3.3.3.3

(2) 반정규 테셀레이션



3.3.4.3.4

(3) 준정규 테셀레이션



3.3.6.6/3.6.3.6

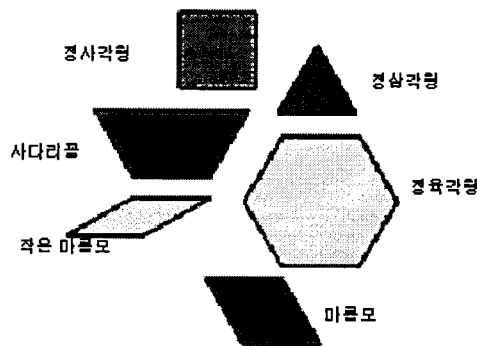
(4) 비정규 테셀레이션



III. 패턴블록을 활용한 테셀레이션 지도

1. 패턴블록 소개

패턴블록은 정육각형, 사다리꼴, 정삼각형, 정사각형, 마름모, 작은 마름모의 6 종류의 기하도형으로 구성되어 있다. 사다리꼴의 한 변(2인치)을 제외하고 모든 변의 길이는 1인치이며, 모든 각의 크기는 30°의 배수로 되어 있어, 각 블록들을 연결하여 새로운 모양을 만들고 테셀레이션 하기에 편하다. 또한 정삼각형은 초록색, 정사각형은 오렌지색, 마름모는 파란색, 사다리꼴은 빨간색, 작은 마름모는 황갈색, 정육각형은 노란색으로 구성되어 규칙에 따라 테셀레이션 하였을 때 아름다운 패턴을 감상할 수 있다.

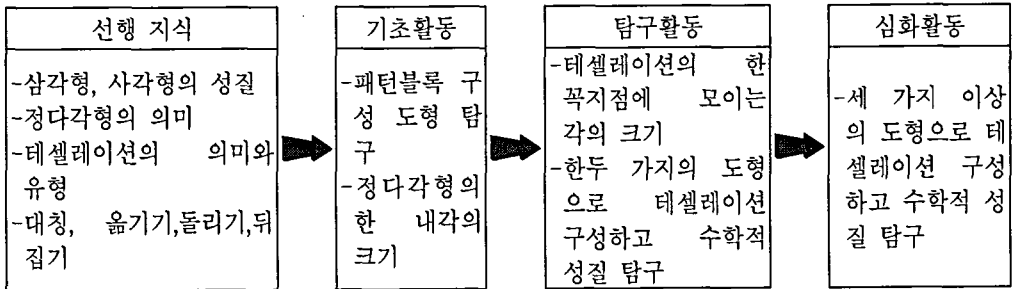


<패턴블록의 구성>

2. 프로그램

본 프로그램은 초등학교 5, 6학년 수준의 도형 학습 내용을 기반으로 정다각형의 내각의 크기와 테셀레이션의 의미와 구성원리를 학습하고, 패턴블록으로 구성 가능한 테셀레이션의 수학적 성질을

탐구하는 과정으로 짜여져 있다. 패턴블록은 테셀레이션 구성이 쉬운 반면에 수학적 반성이 따르지 않으면 단순한 무늬꾸미기로 전락할 우려가 있으므로, 학생들에게 테셀레이션을 구성하기 전에 수학적으로 예측하고 구성한 후에는 그림으로 그리고 수학적 문장으로 요약하여 설명하게 수학적인 활동으로 이끌어야 한다. 패턴블록으로 기초적인 테셀레이션을 경험한 후 조노둠, 종이 오려붙이기, 점지, 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 다양한 테셀레이션으로 심화시키는 것이 좋다. 본 프로그램의 구성 개요는 다음과 같다.



(1) 기초 활동

과제 패턴블록의 각의 크기를 알아보자.

- 가. 패턴블록의 도형 중에서 정다각형을 찾아 한 내각의 크기를 구하여라.
- 나. 패턴블록의 도형 중 정다각형이 아닌 도형의 내각의 크기를 구하여라.

(2) 탐구 활동

과제1 한 가지 종류의 패턴블록으로 테셀레이션 작품을 만들어 보자.

- 가. 만들기 전에 불가능한 것이 있는지 수학적으로 계산하여 예측하여라.
- 나. 테셀레이션을 하려면 한 꼭지점에 모이는 각의 크기가 어떠해야 하는가?

과제2 두 가지 종류의 패턴블록으로 테셀레이션하고 수학적 성질을 탐구해보자. 패턴블록으로 만들기 전에 가능한지 예측하고 수학적으로 계산하여 알아보아라.

- 가. 가능한 테셀레이션은 모두 몇 가지인가?
- 나. 기준을 정하여 테셀레이션을 분류하여 보자.
 - ① 정다각형으로만 구성된 것과 그렇지 않은 것
 - ② 반정규 테셀레이션과 준정규 테셀레이션(이름도 붙여보아라)
 - ③ 선대칭, 점대칭, 대칭이 되지 않는 것

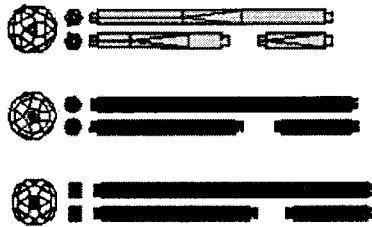
(3) 심화활동

과제 세 가지 종류 이상의 패턴블록으로 테셀레이션 작품을 만들고 수학적 성질을 기록하여 보자. 패턴블록으로 만들기 전에 가능한지 수학적으로 계산하여 예측해 보아야 한다.

IV. 조노뎀을 활용한 테셀레이션 지도

1. 조노뎀 소개

미국 Zometool, Inc.에서 개발된 조노뎀 시스템은 작은 구 모양의 ‘연결체’와 막대 모양의 ‘연결봉’으로 이루어져 있다. 연결봉을 연결체에 끼우며 2차원 및 3차원 모델을 만든다. 조노뎀은 단순해 보이지만, 그 구성원리와 형태는 자연계를 이루는 기본 구조인 황금비율과 피보나치 수열에 따라 설계되어 있다. 조노뎀의 기본 연결봉은 3가지(빨간색, 파란색, 노란색 연결봉)가 있으며 각각 3가지 길이(大, 中, 小)로 이루어져 있다.



<조노뎀의 연결체와 연결봉>

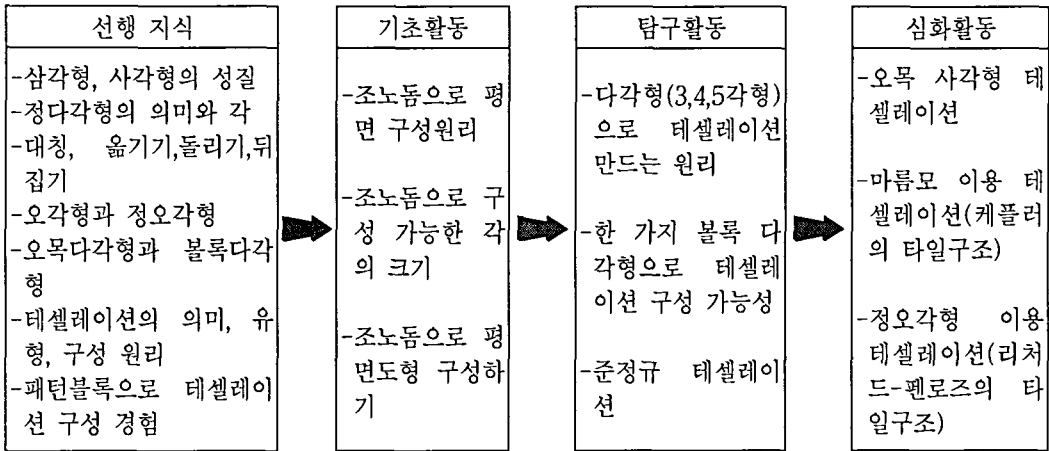
연결봉은 황금비에 따라 길이가 결정되어 있다. 파란색 연결봉(小)의 길이를 1로 하였을 경우, 색상별 연결봉들의 길이 비율은 다음과 같다. ($\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$)

연결봉	파랑 (小)	파랑 (中)	파랑 (大)	노랑 (小)	노랑 (中)	노랑 (大)	빨강 (小)	빨강 (中)	빨강 (大)
길이	1	τ	τ^2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tau \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tau^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\tau}}{2}$	$\tau \frac{\sqrt{2+\tau}}{2}$	$\tau^2 \frac{\sqrt{2+\tau}}{2}$
	1	τ	τ^2	$\sin 60^\circ$	$\tau \sin 60^\circ$	$\tau^2 \sin 60^\circ$	$\sin 72^\circ$	$\tau \sin 72^\circ$	$\tau^2 \sin 72^\circ$

조노뎀 연결체 표면에는 사각형, 삼각형, 오각형 구멍 62개가 뚫려 있으며, 연결봉의 단면도 사각형(파란색 연결봉), 삼각형(노란색 연결봉), 오각형(빨간색, 녹색, 녹색-파란색 연결봉) 형태로 되어 있다.

2. 프로그램

테셀레이션을 하면서 조노둠 연결봉의 길이 관계를 탐구하기 위해서는 삼각함수, 황금비, 무리수 계산의 지식이 필요하다. 본 프로그램은 초등 및 중학교 저학년 학생을 위한 것으로 대수적 계산보다는 기하적 직관과 사고력, 공간감각을 중심으로 구성하였다. 초등 수준에서는 정규 교육과정에서 각, 다각형의 종류와 성질, 초보적인 도형의 변환을 다루게 되므로 이들 선행 지식을 활용하여 테셀레이션을 구성하고 성질을 탐구할 수 있게 하였다. 즉, 변의 길이에는 초점을 맞추지 않고 각도 평면을 등분하여 구할 수 있는 경우로 한정하였다. 중학생이나 우수아들에게는 관련 개념을 적절히 지도하면서 테셀레이션의 변의 길이, 각의 크기, 넓이 등을 탐구하게 할 수 있다. 본 프로그램의 구성 개요는 다음과 같다.



(1) 기초 활동

과제1 조노둠으로 평면을 만들 때 생기는 각의 크기를 알아보자.

가. 연결체와 연결봉을 이어 평면도형을 만들어 보면서, 평면을 만드는 방법을 찾아 설명해 보아라.

나. 연결체의 세 가지 모양의 구멍을 각각 남극과 북극의 위치에 적도의 위치에 두고, 파란색 연결봉을 적도의 위치에 꽂으며 만들 수 있는 각의 크기를 모두 찾으시오.

남극과 북극 위치에 있는 구멍 모양	만들 수 있는 각의 크기
정삼각형	
직사각형	
정오각형	

나. 파란색 연결체 1개, 다른 연결체(파란색 포함) 1개, 연결봉 1개로 직각이 생기는 경우를 모두 찾아 보아라.

다. 직사각형 구멍을 연결체의 남극과 북극 위치에 두고 빨간색, 노란색, 파란색 연결봉을 촘촘히 꽂아 적도를 표시하자. 만들 수 있는 블록 다각형의 한 내각의 크기는 모두 몇 가지인가?

과제2 조노둠으로 다양한 평면도형을 만들어 보자.

가. 조노둠으로 만들 수 있는 정다각형은 모두 몇 가지인가?

나. 여러 가지 모양의 직사각형, 이등변 삼각형, 부등변 삼각형을 만들어 보아라. 단, 닮은 삼각형은 같은 것으로 생각한다.

다. 여러 가지 모양의 직사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 오목 사각형을 만들어 보아라.

라. 정오각형이 아닌 오각형을 만들어 보아라.

(2) 탐구 활동

과제1 한 가지 삼각형, 사각형, 오각형으로 테셀레이션을 만드는 방법을 말하고, 한 꼭지점에 모이는 각을 알아보자.

가. 한 가지 부등변 삼각형으로 테셀레이션 작품을 만들고, 삼각형으로 테셀레이션 하는 방법과 한 꼭지점에 모이는 각을 그림으로 그려서 설명하여라.

나. 한 가지 부등변 사각형으로 테셀레이션 작품을 만들고, 삼각형으로 테셀레이션 하는 방법과 한 꼭지점에 모이는 각을 그림으로 그려서 설명하여라.

다. 한 가지 (정오각형이 아닌) 오각형으로 테셀레이션 작품을 만들고, 삼각형으로 테셀레이션 하는 방법과 한 꼭지점에 모이는 각을 그림으로 그려서 설명하여라.

과제2 한 가지 블록 다각형으로 테셀레이션이 가능한 도형을 말하고 그 이유를 수학적으로 설명하여라.

가. 정다각형의 경우

나. 정다각형이 아닌 경우

다. 일반적인 다각형의 경우

과제3 조노둠으로 준정규 테셀레이션을 구성하고 수학적 성질을 탐구해보자.

가. 준정규 테셀레이션 작품을 구성하고 이름을 붙이고, 작품에 대한 수학적인 설명(테셀레이션의 유형, 각의 관계, 구성 도형, 대칭 등)을 해 보아라.

나. 준정규 테셀레이션은 8 가지가 가능하다. 조노둠으로는 몇 가지를 구성할 수 있는가?

(3) 심화 활동

과제1 한 가지 오목 사각형으로 테셀레이션을 할 수 있는지 알아보자.

가. 한 가지 오목 사각형으로 테셀레이션을 할 수 있는지 예측하고 그 이유를 수학적으로 설명하여라.

나. 오목 사각형으로 테셀레이션 작품을 만들고, 작품을 수학적으로 설명하여라.

과제2 마름모로 한 가지 이상의 테셀레이션 작품을 만들고, 작품을 수학적으로 설명하여라.

과제3 정오각형으로 한 가지 이상의 테셀레이션 작품을 만들고, 작품을 수학적으로 설명하여라.

참 고 문 헌

Bezuszka, S., Kenney, M., & Silvey, L. (1977). *Tessellations: The geometry of patterns*. Palo Alto, Ca: Creative Publications.

Hart, G. W. & Picciotto, H. (2001). *Zome geometry*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

<http://library.thinkquest.org/16661/index2.html>

<http://mathforum.org/sum95/suzanne/active.html>

<http://new.zonodome.co.kr/info.htm>