韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제3호. 2004. 9. 1-21

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18 No 3, Sep. 2004. 1-21

중국의 "두 가지 기본" 수학교수법과 개방형 문제해결 기법[1)]

Zhang, Dianzhou (East China Normal University)
Dai, Zaiping (Zhejiang Education Institute)
이 강 섭 (단국대) · 차 상 미 (과기원) 공역

중국의 수학교육에서는 두 가지 기본, 즉 기본지식과 기본기술을 주창하는 전통이 있다. 이러한 전통의 직접적인 결과는, 중국 학생들이 국제수학시험(예를 들어 1989년도의 IAEP)에서 뛰어난 성적을 거둘 수 있는 능력을 갖추거나 국제수학올림피아드(IMO)에서 빼어난 성적을 거두는 것으로 나타난다. 우리는 이 강연에서, 중국 교사들이 "두 가지 기본"을 왜 그리고 어떻게 가르치는가와, 그들의 "두 가지 기본"을 학생의 창의성과 어떻게 결합시키는가를 보일 것이다. 개방형 문제해결 기법은 그러한 목적을 달성하기 위한 한 가지 방법이다. 이 강연에서 생각할 주제들은 다음과 같다. 문화적 배경; 계산속도; "연습이 완전함을 만든다"라는 가설; 교실에서의 효율성; "두 가지 기본"과 개인적 성장 사이의 균형. 특히, 중국의 수학 교육자는 개방형 문제해결 기법과 "두 가지 기본" 초석 사이의 연결성에 더 많은 주의를 기울이고 있다.

0. 서 론

역사적인 이유 때문에, 일본, 한국, 싱가포르 및 중국(중국 본토, 대만과 홍콩) 등의 동양권은 물론이고 러시아에서도 수학 교육자는 기본 훈련의 중요성을 매우 강조한다. 그러나 "두 가지 기본"(기본지식과 기본기술)이라는 화두는 중국 본토에서 가장 많이 회자되고 있다.

중국 본토에서 "두 가지 기본"이라는 화두를 실행함으로서 일어난 직접적인 성과는 많은 국제수학평가 및 경시대회에서 선두를 차지하는 것으로 나타났다. 예를 들면 IAEP 1989(국제수학교육과정평가, 1989)에서 정답율 부분의 수위를 차지하고, 지난 수차례의 국제수학올림피아드에서 뛰어난 결과를 얻은 것 등이다.

그러나, 역설적인 면도 있다. 즉, 중국 학생들이 많은 국제적인 수학평가에서 성공한 반면, 다른 한편으로는 중국에서의 수학교육과 학습이 기계적 기억화와 반복 연습을 지향하는 것으로 보인다는 것이다. 필자들은, "두 가지 기본" 교수법의 개념이 이 역설을 푸는 열쇠가 될 수 있을 것으로 생각하고 있다.

이 논문에서 우리는 "두 가지 기본" 수학교수법의 의미와, "두 가지 기본"이라는 화두와 "개방형 문제해결 기법" 사이의 연결을 설명하고자 한다.

1) 이 논문은 한국수학교육학회 시리즈 D <수학교육연구> 제8권 3호 (통권 19호)에 게재된 논문인 The "Two Basics" Mathematics Teaching Approach and the Open Ended Problem Solving in China를 번역한 것입니다.

이 논문에서 우리는 "두 가지 기본" 수학교수법의 의미와, "두 가지 기본"이라는 화두와 "개방형 문제해결 기법" 사이의 연결을 설명하고자 한다.

I. "두 가지 기본" 초석의 네 가지 측면

중국 본토에서, 수학교육에서의 "두 가지 기본"이라는 화두는 엄격한 정의를 내리지 않고 넓고 느슨하게 사용된다. 이렇게 일반적인 의미는 "단단한 기초"와 "개인적 성장과 창의성"이라는 두 가지 관점에서 볼 수 있다. 이들 두 가지는 모두 중요하지만, 보다 더 중요한 것은 기초이다. 대부분의 중국 수학자들과 수학 교육자들은 "비록 탑이 아름답더라도 토대가 더 중요하다"라고 믿는다.

사실, 초등 및 중등 교육은 기초교육이다. 수학기초를 단단히 확립하는 것은 기초교육의 주된 임무이다. 특히, 이러한 기초는 사람이 어릴 때에만 잘 맞게 놓여질 수 있으며, 조금만 지나도 너무 늦어버리게 된다. 우리는 유년시기의 수학연습을 언어 및 피아노 연주 실습과 똑같이 귀중하게 여겨야 한다.

따라서 학창 시절 동안에 단단한 기초가 놓여져야 한다는 것이 가장 중요한 것이다. 강건한 기초가 없이는 창의성을 체득하기가 불가능하며, 궁극적으로 학생들이 차별화된 개별 성장을 이루는 것이 불가능함은 말할 것도 없다.

"두 가지 기본" 수학교수법의 교육적 아이디어는 다음과 같은 네 가지 측면에서 살펴볼 수 있다.

- 계산속도: 속도가 효율성을 좌우한다.
- 절차 외우기: 외우기를 통하여 이해하기
- 표현의 정확성: 논리적 분석에 기초
- 연습문제 풀이: 변형하여 반복하기

1. 계산속도

계산은 "두 가지 기본" 수학교수법의 중요한 요소이다. 잘 알려진 바와 같이, 계산 기술은 일종의 프로그램이고 수학적 사고는 일종의 과정이다. 수학적 사고의 효율성을 증진시키기 위해 적절한 계산 속도를 유지해야 한다. 사실, 속도는 더 높은 수준의 사고에 필요한 기억작업 공간을 절약할 것이다. 즉 속도가 효율성을 좌우한다.

중국의 초등학교에서는 정수, 소수, 분수에 대한 사칙연산을 빠르고 정확하게 계산하는 것을 본질적으로 요구한다. Fenghua 조사를 참조하면 다음과 같다.[2)]

2) 이 조사는 2002년에 Zhou Leiming과 Hu Yixiang가 수행하였다.

검사 내용: 1학년 학생들(7살); 15분 내에 총 90개의 합을 계산하기.

(1) 다음과 같은 100 이하의 덧셈과 뺄셈에 관한 50개의 문제

3+13=	16+4=	50+5=	12+60=	2+57=
60+33=	53+9=	28+10=	30+48=	7+12=
9+17=	40+45=	23+8=	12+34=	86+8=
78−30=	20−12=	15−5=	20−15=	81−80=
100−40=	95−70=	27−4=	40−20=	18−12=
16−9=	36−16=	26−11=	47−8=	97−14=
45+1=	96−4=	63+7=	16−2=	37+6=
38+50=	99−2=	76−9=	8+25=	63−6=
80−40+30=	17+8+30=	49+20−60=	44−10+13=	35−20+15=
18−0+9=	10+60−8=	32+9−20=	98−30+11=	20−8−11=

(2) 다음과 같은 괄호 채우기에 관한 40개의 문제

2+5=( )−5=( )+7=( )+2=( )

11−2=( )+9=( )−7=( )+6=( )

15−8=( )+2=( )−3=( )+18=( )

85−40=( )−20=( )−5=( )−11=( )

12+7=( )+9=( )−17=( )+16=( )

19+7=( )−8=( )+13=( )+7=( )

76−20=( )+14=( )−30=( )+9=( )

95−61=( )+18=( )−12=( )+31=( )

31+16=( )−15=( )+42=( )−50=( )

41−20=( )+19=( )−14=( )+5=( )

<표 1> 1학년 학생들의 계산 능력의 결과 및 분석

학교이름	표본의 수	최단시간	최장시간	평균사용시간	평균점수	우수학생비율	합격율
Jinpeng tonm Centre school	48	6분	15분	9분 38초	90.1	46.65%	100%
Xi'gi school	23	6분 3초	14분	9분 52초	87.4	36.7%	96%

결론: 중국의 초등학생들은 100이하의 덧셈과 뺄셈에 관한 10문제를 1분 안에 완료할 수 있다. 그것이 필연적인가? 우리는 확신하지 못한다. 그러나 이것이 중국에서의 보통 속도이다.

■ "계산속도"에 대한 또 다른 두 가지 결과를 알아보자.

3학년 학생들(9살)의 경우는, 평균적으로 1분에 두개의 문제를 완료할 수 있다.
다음은 주어진 문제의 일부분이다.

$125 \times 75 =$ $8500 \div 50 =$ $4907 \div 7 =$ $490 \times 20 =$
$8640 \div 60 =$ $8585 \div 17 =$ $2821 \times 3 =$ $490 \div 35 =$

■ 표본 크기 4000의 조사에서, 다항식에 대한 대수적 조작 속도를 측정하고자 한다. 학생들에게 10분 내에 38개의 문제를 완료하도록 요구하였다. 다음은 시험문제의 일부분이다.

· 1~5번 문제를 푸시오:

1) $-\frac{2}{3}ab+\frac{3}{4}ab+ab=$

2) $-y^2-2x^2-(-3y^2)=$

3) $3x^2y \cdot \frac{1}{2}x \cdot x \cdot (-2xy^2)=$

4) $3x^2y+\frac{1}{3}xy \div (-xy)=$

5) $[(-2n)^2]^3=$

· 인수분해(1~3):

1) $(a+b)^2-(x-y)^2$

2) $(x+y)^2+5(x+y)+6$

3) $(m-n)^2+4(m-n)+4$

· 제곱을 구하시오:

$\frac{1}{2}x+x+\frac{2}{3}$

위의 문제에 대한 결과는 다음과 같다.
맞힌 문제의 평균개수(X), 표준편차(σ_n) 및 정답율 (Y)

변수 \ 학년	8	9	10	11	12	전체
X	17.82	20.73	28.11	29.43	31.00	25.78
σ_n	6.08	7.05	4.22	4.34	4.20	7.29
Y	46.89	54.55	73.97	77.45	81.58	67.84

계산을 빨리하도록 요구하는 것은 학생들에게 너무 지나친 것일 수도 있다. 그러나, 계산속도를 요구하는 것은 중국에서 수학 교수·학습의 한 가지 목표이다. "빠른 계산 경진대회"는 거의 대부분의 학교에서 매년 열린다. 사실 계산속도는 시간이 제한된 시험에서 더 높은 성과를 거두는 데 필요한 토대가 된다.

2. 절차 외우기

어느 누구도 인식과정에서 기억의 중요성을 부정하지 않는다. 그러나, 기억과 이해 사이의 관계에 대한 견해는 여러 가지이다. 예를 들어, 많은 교육자들이 "아무것도 기계적 기억으로 배우지 마라!"고 강력히 요구하는 한편, 다른 이들은 "이해는 암기를 통해 이뤄진다!"라고 말하기도 한다.

중국의 대부분의 교사들은 "먼저 기억하고, 그런 후 단계적으로 이해하는 것"이라고 믿는다. 예를 들어, 아이들이 왜 피아노 손가락 연습이 있어야 하는지 이해하지 못하지만, 아이들은 그것을 암기해야 하고, 그런 후 나중에 그것을 이해한다. 마찬가지로, 우리는 기억과 모방에 의존하여 모국어를 말하는데, 문법이 무엇인지 이해하지 못하더라도 말은 하는 것이다. 중국에서는, "네가 그것을 이해한다면, 실습해야 한다; 네가 그것을 잘 이해하지 못하더라도, 실습해야 하고, 그렇게 하는 과정에서 점점 더 잘 이해하게 될 것이다"라고 일반적으로 말한다.

여기 몇 가지 특수한 경우가 있다.

(1) 모든 학생들은 8-9살(2-3학년)이 되면 구구단을 암기하고 낭송해야 한다.

(2) "음수 곱하기 음수는 양수"의 법칙의 경우, 이 알고리즘을 이해하기는 더 어렵다. 아직까지도, 여전히 우리는 왜 그것이 옳은지 확신하여 설명하기가 불가능하다. 중국에서는 대부분의 학생이 먼저 그것을 암기하고, 그 후 점차적으로 그것을 이해해 간다.

(3) 삼각법 공식의 경우, 실제로 가르칠 때, 학생들에게 각의 합 공식, 두배각 공식(세배각 공식은 최근에 들어서는 암기하기를 요구하지 않는다), 반각 공식 및 싸인, 코사인, 탄젠트에서 합을 곱으로 바꾸는 공식과 그 반대 공식을 암기하여 낭송하도록 요구한다. 그것은 학생들의 일생동안의 공부, 특히 미적분학 공부를 위한 기본지식이다.

서구 학자들도 이와 같은 견해를 갖고 있다. 한 예로, "무엇이 이해인지를 암기하기; 암기를 통한 이해하기"라는 견해(Marton 1991)가 있다. 암기는 이해를 깊게 하기 위한 수단이거나 이해를 위한 전제조건인가? 일본 학생들을 대상으로 한 연구에서 나온 해석으로는 반복이 이해로의 길일 수도 있다는 것이다.(Hess & Azumas, 1991)

3. 표현의 정확성: 논리적 분석에 기초

중국의 수학교수법은 비형식적인 접근으로서 수학의 개념과 아이디어를 설명하기를 요구한다. 그러나 어떠한 정도로는 정확성과 논리성 및 형식성을 갖춘 수학이 유지되도록 것이 필요하다. 특히, 수학적 언어는 형식적이어야 한다. 논리적인 식을 만드는 방법을 배우기 위해 학생들은 더 많이 연습해야만 한다.

중국의 수학교육에서 정밀한 추론과 증명을 강조하는 것이 한 가지 예이다. "검증"과 "증명" 중에서 후자에 가치를 더 부여한다. 기하학 지식의 기본인 고구 정리(피타고라스의 정리)를 예로 들어 보자. 이것을 가르칠 때, 이 정리는 대수적 혹은 기하학적 방법을 사용한 추상적인 방법으로 증명하여야만 하고, 잘라 붙이는 방법은 합당한 방법으로 여기지 않는다.

1991년 대학입학시험에 나왔던 예제를 보자:

(문제 15) 다음 중 어느 것이 거짓인가?

(A) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$를 만족하는 α, β값이 존재한다.

(B) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$를 만족하는 α, β가 무한히 많이 존재하지는 않는다.

(C) 모든 α, β에 대해 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$가 성립한다.

(D) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$를 만족하는 α, β값은 존재하지 않는다.

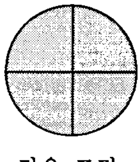
정답은 (A)이다. 풀이 과정은 정밀한 논리적 추론으로 확증해야 하고, 충분한 이유와 함께 분명하고 형식적인 방법으로 표현되어야 한다.

"두 가지 기본" 수학교수법은 수학사고를 추상적 스타일로 유지하기를 주장한다. Jinfa Cai (University of Delaware, USA)의 보고서에 의하면, 미국의 학생들과는 대조적으로, 중국 학생들은 분수 문제를 푸는 데 있어서 다른 방법을 사용한다. 시험 문제는 다음과 같다.

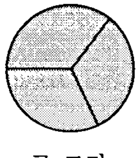
피자 비율 문제: 8명의 여학생들이 2판의 피자를 같이 나누어 먹고, 3명의 남학생들이 한 판의 피자를 같이 나누어 먹는다. 피자의 크기가 모두 같을 때, 여학생 또는 남학생 어느 쪽에 일인당 더 많은 피자가 돌아가는지 밝혀 보아라.

이 문제의 풀이에는 세 가지 방법이 있다:

- 수와 기호 : $2\div 8=\frac{1}{4}$. $1\div 3=\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$.
- 문장: $\frac{1}{3}$이 $\frac{1}{4}$보다 크므로, 남학생이 더 많이 피자를 얻는다.
- 그림



작은 조각



큰 조각

	중국	중국	중국	미국	미국	미국
학년	4	5	6	4	5	6
정답율(%)	21	57	93	42	53	59
그림	4	3	4	65	53	59
수와 기호	35	51	58	27	36	47
문장	61	42	28	8	11	4

위에서 나타내어진 것과 같이, "두 가지 기본" 수학교수법은 논리적 분석과 추상적 사고, 형식적인 식에 더 많은 주의를 기울이는 것으로 보인다.

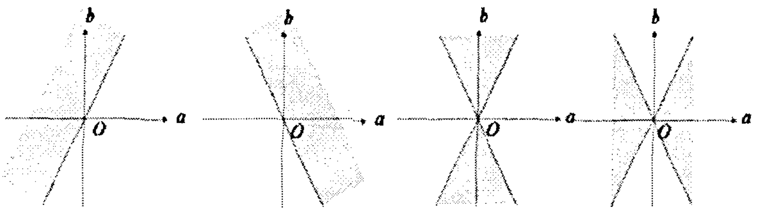
4. 연습문제 풀이: 변형하여 반복하기

수학적 기능을 얻기 위하여는 자주 연습하여야 한다. 물론, 기계적 반복 연습으로는 개별 성장을 이루는 것이 불가능하다. 최근에, 변형하여 반복하는 것이 효과적인 수학 학습을 촉진하는 중국식 방법이라고 보고한 연구들이 많이 있다(Gu, Huang, Marton).

변형의 전형적인 예를 생각해 보자(이것은 $c \rightarrow a$로 단지 한 문자만을 바꾼 것이다).

예제. (2003년 대학입학시험 문제)

함수 $y = ax^2 + bx + a$의 그래프가 x축과 두 점에서 만난다면, 점 (a, b)는 ( )영역에 위치한다.



(A) (B) (C) (D)

정답은 $a \neq 0$일 때 (C)이다.

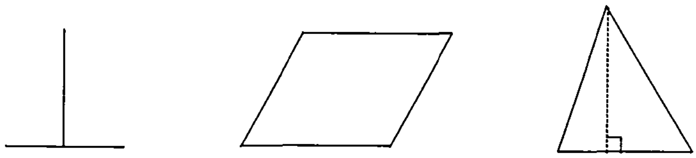
보통의 식 $y = ax^2 + bx + c$에서 한 문자만 바꾸더라도, 함수 $y = ax^2 + bx + a$는 다음과 같은 많은 기초 수학지식을 생각하게 한다.

- 2차식의 실근
- 판별식: $b^2 - 4aa = b^2 - 4a^2 = (b+2a)(b-2a) \geq 0$;
- 직선의 방정식
- 선으로 구분지어 지는 영역
- $a \neq 0$ 직선을 제외한다.

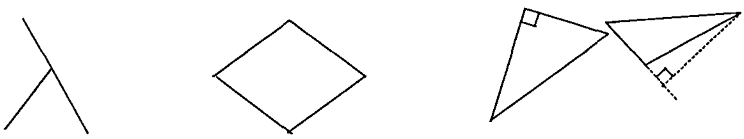
주된 형태는 "변형 방법"으로서, 개념의 논리적인 변형과 풀이과정의 변형을 포함한다. 암시적 변형뿐만 아니라 명시적 변형도 있다. 이와 같이 잘 구성된 연습은 단순한 반복작업보다 훨씬 더 효과적이다(Huang, 2002). 변형을 더 많이 하는 계속적인 연습이 이해에 도달한다는 것을 많은 연구가 밝히고 있다(Marton, 1997).

변형에는 다음과 같은 두 가지 형태가 있다.

(1) 개념적 변형 (I)

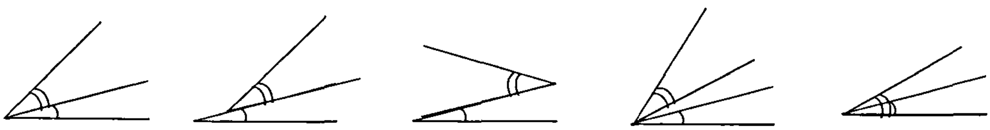


수선

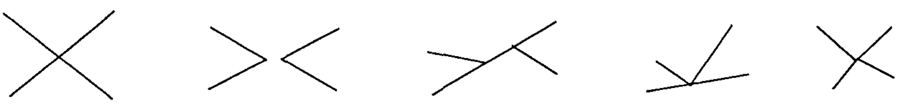


개념 변형 (II)

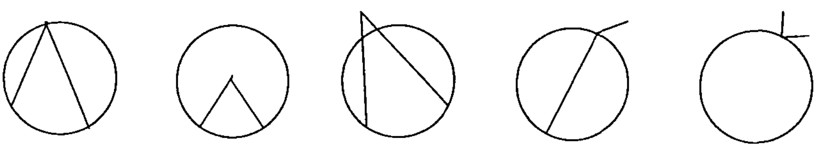
이웃하는 각



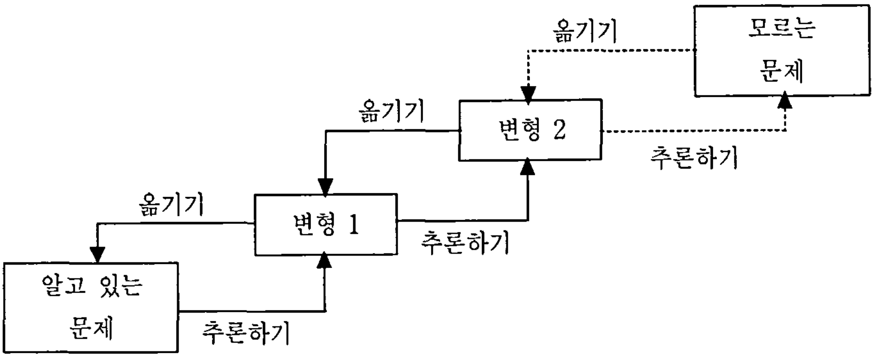
반대편의 각



원주 위의 각



(2) 과정의 변형



II. "두 가지 기본" 초석 위에서의 수학교육의 특성

중국은 13억 인구를 가진 발전도상국가로서 의무교육 연한은 9년이다. 한 반에 40~50명의 학생이 있는데, 이것은 교사들이 개별화된 교육을 실제로 실천하기가 불가능함을 뜻한다. "두 가지 기본" 초석의 정신 아래에서 중국의 수학교육에 대한 몇 가지 특성을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 교실 수업의 리듬은 교사들의 계획에 의해 주도된다. 그것은 영감을 주는 가르침을 강조하고 떠먹여주는 가르침을 반대한다. 학생들에게는, 교사들에 의해 대부분의 학생을 위해 설정된 진도에 맞출 것을 요구한다. 교사들에게는, 주요 수학 내용을 가능한 한 빠르게 나타내어서, 학생들이 둘러가는 경로로 빠져 너무 많은 시간을 낭비하는 것을 피해야 한다. 하지만, 중국의 교실에서, 교사들은 일방적인 강의만을 항상 하지는 않고, 구두 질문을 빈번하게 한다. 보통, 교사들은 상대적으로 쉬운 문제들을 연속으르 내고 학생들에게 그룹이나 개별로 답하도록 질문한다. 그리고 그들 스스로 발견하도록 방임하는 대신에, 많은 작은 단계를 통해 설정된 목표에 도달하도록 이끌어 간다. 이것을 "작은 단계" 교수법이라고 부른다.

(2) "진수를 모은 강의, 많은 연습" 원론을 사용한다. 이해와 조작간의 관계에 대하여는; 그것이 "이해 우선"이라는 의견에 동조하지 않을 뿐만 아니라 두 가지가 모두 똑같이 중요함을 견지한다. 이해를 위한 강의는, 수학 문제를 푸는 데에 더 많은 시간을 할애하기 남기기 위해, 짧고도 진수를 모은 것이어야 한다. 시간 할당에 대하여는; 이해 단계에 너무 긴 시간을 쓸 필요는 없는데, 그 이유는 처음 한 번의 설명으로 이루어지지는 않을 것이기 때문이다. 수학에는 연습이 있어야만 한다. 그러므로 수학에서 연습을 하는 것(연습문제를 푸는 것)은 물론 다음 단계의 이해에 필연적이기도 하지만, 이해를 통하지 않고서도 학생들은 여전히 연습을 할 수 있으며, 문제를 푸는 것을 통해 그들의 이해를 발전시켜나갈 수 있다.

(3) 논리적 표현을 강조하기. "두 가지 기본" 초석은 수학적 사고의 양성의 중요성과, 수학 내용과 아이디어 즉, 완벽한 헤아르기, 네 가지 전치사 사이의 변환, 필요 및 충분조건에의 이해; 분석, 귀납

법, 합성, 결합, 및 RMI 방법 등를 배우는데 있어서 반복된 설명과 훈련의 효과를 강조한다. 특별히 시험 전 복습 기간에 오래된 것들을 복습함을 통해 새것을 배우는 데에 강조점이 있다. 뛰어난 몇몇 교사들은 “집중적이고, 빠른 진도, 가득 찬 내용”의 교수법을 사용하는데, 그것은 한번의 수학 복습 시간에 20~30 문제를 다룰 수 있게 하고 학습한 수학적 방법을 일반화할 수 있도록 도와준다. 이러한 종류의 기술 훈련은 “두 가지 기본” 초석을 가장 고수준으로 적용한 실제 수업이다.

(4) “수학방법"의 적용에 주의를 더 기울인다. "중등학교 수학에서의 사고 방법"에 관한 연구를 통해서, 기계적인 논리적 추론이 논리적 사고 능력으로 진화하고, 따라서 중등교육의 수준에서 수학 사고의 전반적인 구조를 이해할 수 있게 되어 그에 대한 체계적인 지식을 계발할 수 있다. 숙달되고 융통성이 있는 수학 조작이 수학 개념의 형성을 용이하게 할 수 있다는 것이 밝혀졌다. 계산에서 공식과 패턴을 적용하는 능력은 기계적인 조작을 수학계산 능력으로 전환시킬 수 있다. 능숙한 계산과 공식의 암기는 수학적 사고를 더 간결하고 빠르게 만들어 줄 수 있고, 더 높은 수준으로 수학 사고를 향상시켜준다(Hess & Azuma, 1991; Tomas & Bain, 1984; Li, 1996).

III. 수학교육에서의 "두 가지 기본" 초석에 대한 역사적 근원과 사회적 환경

튼튼한 기초는 건물의 구축에 필수적이다. 따라서 어느 누구도 튼튼한 기초의 중요성을 부정하지 않을 것이나, 문제는 어느 수준과 정도로 그것을 강조해야 하는가 인데, 이것에 대해서는 사람들마다 다른 견해와 경험을 갖고 있다. 대부분의 중국 교육자들이 갖고 있는 이러한 신념은 수천 년을 통해 쌓여진 문화의 영향으로 점진적으로 형성되었다.

중국의 전통 교육에서 기초에 관한 이러한 신념을 형성한 요인을 되짚어 보자.

첫째, 수천 년의 농경문화, 특별히 논농사의 발생지에서 생겨난 문화는 상세하고 교묘한 기술을 요구했다. 오직 좁은 땅만이 주어진 상태에서 농부들은 최대의 수확을 얻기 위해서는 숙련되고 효율적인 기술에 의지해야만 한다. 따라서 중국 사회에서는, 효과적이고 효율적인 “기술”을 갖추는 것이 생존에 극히 중요하다.

둘째, 엄격한 시험제도와 통합된 시험문제들은 학생들이 시험에 나오는 내용들만 학습하도록 유도해 왔다. 중국의 공공시험제도 즉 과거제도는 서기 597년까지 거슬러 올라간다. 이런 제도를 통해서, 국가 시험을 통과할 수 있다면 농민들도 정부 관료가 될 수 있다. 이것은 매우 공정하고 문명화된 정책이다. 따라서 시험이 인생을 결정할 수 있다는 것은 중국인의 마음에 깊이 뿌리박고 있다. 명 왕조 이후에, 정부에 의해 시행된 시험에서 사용되는 문장은 "팔고(八股)[3] 지향적"(극도로 농축되고 절차가 고정된 기본지식과, 판에 박히고 매우 복잡한 작문 기술의 집합을 의미한다)이었다. 현대의 수학시험을 언급하자면, 출제되는 내용도 수학적 절차 및 잘 연습된 기술이 대부분이다. 시험이 "기본"

3) 역자 주: 八股文은 명·청 시대의 과거에서 답안을 작성할 때 사용한 특유한 문장체이다.

에 초점을 맞추기 때문에, 시험에서 높은 점수를 얻을 목적으로 학생들도 오직 기본만을 배우려고 한다.(Bishop, 1998; Zhang & Lee, 1990).

셋째, 중국 사회의 교육적 명언이 말하듯이, 연습이 완전함을 만든다. 교육의 주된 목적은 정통함에 도달하는 것이다. 정통함을 통해서 자연스럽게 "숙달"(완전) 될 수 있다.

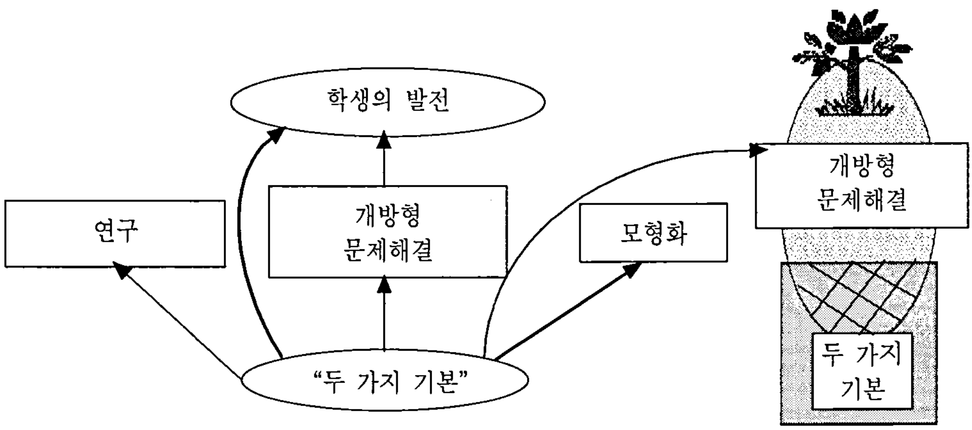
마지막으로, 1950년대의 중국 본토에서의 수학교육은 당시의 소비에트연합의 수학교육에 영향을 많이 받았다. 잘 알려진 것처럼, 소비에트연합의 1950년대 수학교육은, 논리적 추론의 기본 훈련을 포함해서, 규칙의 암기와 기본 지식의 규칙들 및 증명의 정확함을 더 강조했었다.

위와 같은 요인들 아래에서 1963년에 중국 교육부는 수학 교수요목에서 다음과 같이 기술하였다: “수학 교육은 학생들의 기본지식과 기본기술의 익힘을 강화해야 한다.”, 그리고 더욱이 수학교육은 학생들의 "기본계산 능력, 공간상상 능력과 논리적 사고 능력을 육성해야 한다".이러한 기본을 강조하는 생각은 요즘도 여전히 실천되고 있다.

IV. 진행 중인 새로운 단계: 개방형 문제해결

만약 우리가 중국에서의 "두 가지 기본"(초석 그 자체가 아니라) 아래서의 교육이 암기, 모방과 조작을 강조하는 것을 의미한다고만 생각한다면 그것은 완전하지 않다(Watkin & Biggs, 1996). 1990년대 이래로 많은 수학 교사들의 노력으로, "두 가지 기본" 교수법은 수학적 사고의 수준으로 높여져 왔고, 학생들의 사고 과정에도 알맞은 유용하고도 과학적인 교수법으로 발전하였다.

질적인 수학교육은 "견고한 수학기초"와 "진보적인 수학혁신"으로 구성되어야 한다. 현대 수학교육 이론과 함께, "두 가지 기본" 초석 위에서의 수학교육은 새로운 단계로 점진적으로 접어들었다. 특별한 경향은 수학의 "두 가지 기본"을 개방형 문제를 사용한 교수법과 연관짓는 것이다. 개방형 문제해결은 중국에서 유행이 되었다.



개방형 문제 풀이는 1970년대 일본에서 시작되었고, 그 후 중국으로 소개되었다. 1990년대 초반에 수학 교사들은 "개방형 문제"를 그들의 수업시간에 사용하였다. 주요 단계는 개방형 문제가 많은 아주 예민한 시험에 등장했던 것이다. 교수법의 측면에서는 개방형 문제해결이 2002년 국가 교과과정의 표준으로 제안되었다.

개방형 문제 해결을 "두 가지 기본" 수학교수법안에 어떻게 접목시킬 것인가?

고전적인 개방형 문제는 일본에서 나온 "구슬 문제"이다. "다섯 개의 구슬을 평면에 던져라. 이 구슬들의 다양성을 어떻게 정의해야 하나?" 이것은 매우 훌륭한 문제이다. 그러나 "기본지식"으로부터는 아주 멀어 보인다.

지난 10년간, 중국 교육자들은 많은 문제들을 새로운 형식으로 설계했다. 몇 가지 예를 보자.

예제 1. 두 식 $8a^2b^2c^3$과 $12x^2y^3a^2$의 의 공통된 특성은 무엇인가?

가능한 답은 다음과 같다: 두 식 모두 대수식이다; 두 식 모두 단일 대수항이다; 두 식에 있는 계수는 모두 2의 배수이다; 두 식 모두 차수가 2인 변수를 갖고 있다 등이다. 사실, 이 문제에는 많은 답이 있지만, "두 가지 기본" 이라는 기본 개념에 밀접히 관련되어 있다(Dai, 2002).

단순한 개방형 문제는 수적 감각을 위해 설계된다.

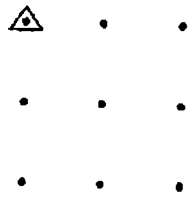
예제 2. 50π와 170 사이에 무리수 세 개를 넣어라.

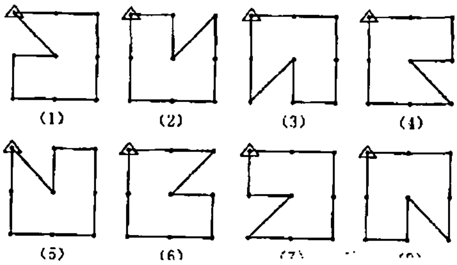
무한히 많은 답이 존재한다. 학생들은 무리수를 만들기 위해 여러 가지 방법들을 사용할 수 있고, 그를 통해 계산기술도 얻는다.

또 다른 문제는 대칭과 투영의 기하학 개념을 고려한 것이다.

예제 3. 단순한 우편 경로 문제(Jinhui 학교, 상하이, 1998)

다음 그림과 같이 9곳의 마을이 정사각형 영역에 위치하고 있다. 왼쪽 상단 모서리는 우체국이다. 우편배달부가 우체국을 출발하여 9곳의 마을을 들러 마지막으로 우체국에 되돌아온다. 최단경로는 무엇이며, 몇 개의 경로를 찾을 수 있는가?





90° 회전에 의하여 1→2→4→3

반사에 의하여 1→5

90° 회전에 의하여 5→6→7→8

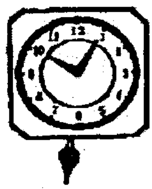
이것이 기본 기하학 지식과 창의성의 결합을 반영한 문제이다.

홍미 있는 예제는 1993년 중학교 저학년 교과서에 자주 등장하는 시계 문자판 문제이다. 이것은 계산기술이 개방형 문제 해결과 결합될 수 있음을 보여준다.

예제 4. (시계 문자판 문제)

시계 문자판에 12개의 숫자가 있다. 이들의 대수적 합이 0이 되도록 양 또는 음의 기호를 숫자 앞에 추가하여라.

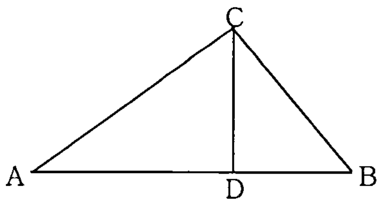
如图，钟面上有12个数字，试在某些数字前添上负号，使钟面上所有数字之和等于零。



학생들은 계산기술을 써서 답을 내놓을 수 있다. 그러나 학생들과 저자의 상상을 추월하여, 124개의 답이 있다! 정말로, 이것은 꽤 좋은 개방형 문제이다. 당연히, 학생들이 모든 답을 내기는 불가능하다. 그러나 그들은 양수의 합이 음수의 합과 같아져야한다는 패턴에 도달할 수 있다. 예를 들어, 우리가 만약 플러스(마이너스) 기호의 수 합이 78 (-78)이라는 것을 안다면, 더 많은 답을 찾을 수 있다. 이것은 유리수에 관한 덧셈과 뺄셈을 했던 기본 훈련과 밀접하게 관련된다.

많은 개방형 문제는 단지 수학적 상황이다. 몇 가지 조건이 주어지지만, 결론은 없다.

예제 5. 각 C가 직각인 오른쪽 그림의 삼각형 ABC에서 CD가 AB에 수직이다. 이 그림에서 도형, 선, 각 사이의 관계를 가능한 한 많이 찾아내어라.

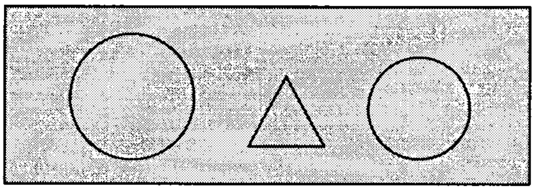


이러한 종류의 문제는 중국의 교실에서, 특별히 복습 수업시간에 많이 사용된다.

해외로부터 온 몇 개의 개방형 문제도 그것이 "두 가지 기본"과 더 관련이 있다면 수학 교육에 사용된다. 일본에서 온 예제가 있다.

예제 6. 화단 문제(PME-13, 일본, 1993)

직사각형 모양의 땅이 있고, 그 안에 전체 면적의 절반이 되는 화단을 설계하려고 한다. 여러 가지 디자인을 제시하여라.

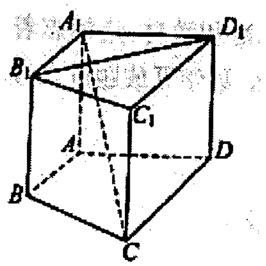


이 수학 문제는 예술과 잘 결합된다. 특히, 기본 기하학 지식과 기술 즉, 도형, 면적, 실수의 연산, 방정식, 제곱근 등에 관련되어 있다.

잘 알려진 것처럼, 시험은 수학교육의 바탕이다. 한때 개방형 문제가 아주 민감한 입학 시험에 등장했다. 그리고 개방형 문제가 교실 수업에서 사용되는 것이 점차 유행이 되었다. 요즘은, 중국의 모든 수학 교사들이 개방형 문제를 수업 시간에 사용하려고 노력하고, 이러한 스타일의 시험문제에 평가의 초점을 맞추려 하고 있다.

예제 7. (국가 대학 입학시험, 1995)

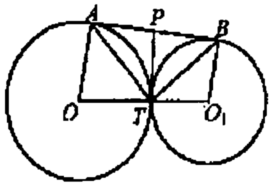
다음 결론을 얻기 위한 충분조건을 넣어라.



이것은 국가 대학입학시험에 등장한 첫 개방형 문제이다. 이 문제에는 전체 150점 중에서 단지 5점만 배당되었지만, 개방형 문제 해결의 응용으로서 교사들의 주의를 발생시켰다.

예제8. (고등학교 입학시험, Hangzhou, 2001)

원 O와 O_1이 점 T에서 서로 접하고, PT와 AB는 공통 내접선 및 외접선이다. 여기에서 이끌어 낼 수 있는 결론을 말하고, 그것을 증명하여라.(이 문제는 12점이다. 학생이 제시한 결론의 난이도에 따라 점수가 부여된다.)



이 문제에 대하여, 시험 주관 당국은 다음과 같은 평가표준을 만들었다.

학생들이 다음과 같이 증명했다면 각각의 점수를 부여받는다.

■ 6점

1. PA =PT (PB = PT).
2. $\angle$PAT = $\angle$ PTA ($\angle$ PBT = $\angle$ PTB)
3. $\angle$OAP = $\angle$OTP = 90°.

■ 8점

1. PA =PB =PT.
2. $\angle$ATB =90°.
3. $\angle$A0T + $\angle$APT = 180°. 4. OA ∥ O_1B

■ 10점

△ OAT∼ △PTB (△PTA ∼ △ O_1BT)

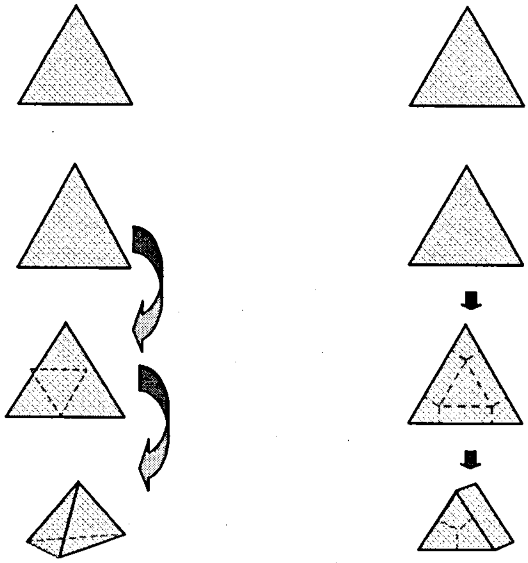
■ 12점

PA· PB = OT · O_1T (PA· PB = OA· O_1B)

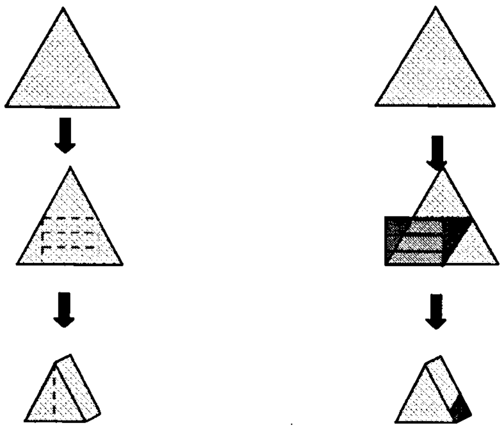
2002년 국가 대학입학시험에 아주 흥미로운 개방형 문제가 등장했다.

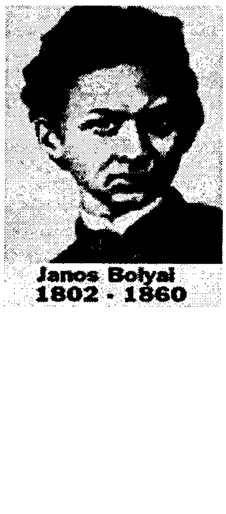
예제 9. 같은 면적을 가진 이등변삼각형 모양의 딱딱한 종이 두 장이 있다. 다음을 수행하여라.

1. 하나의 종이를 여러 조각으로 잘라 정사면체의 면을 이루도록 하여라.
2. 다른 종이를 여러 조각으로 잘라 삼각기둥의 면을 이루도록 하여라.



가장 쉬운 답인 것 같다. 하지만, 다음처럼 많은 답이 존재한다.





Janos Bolyai
1802 - 1860

사실, 답은 무한히 많으며, 다음과 같은 "Bolyai-Gerwien 정리(1832)"를 생각할 수 있다.

만약 같은 면적의 두 다각형이 주어지면, 첫 번째 다각형을 유한한 수의 많은 다각형의 조각으로 잘라 그 조각을 재배치하여 두 번째 다각형을 얻을 수 있다. "재배치"란 모든 다각형 조각에 옮김이나 회전을 적용할 수 있다는 의미이다.

동양과 서양의 수학교육은 기본(fundamentals)과 전개(development) 사이의 균형을 찾고 있다 (Leung, 1998; Lim, 1998). 중국에서 "두 가지 기본" 하에서의 교육은 이미 가진 특성들 위에서 새로운 발전으로 향하고 있고 교실 수업에서 기초와 전개 사이의 균형을 찾으려 고투하고 있다. 어떠한 경우에도, "기본지식과 기본기술은 인생에서 영원히 중요할 것이다". 기본이 시간이 흐르면서 전개해야 한다.

REFERENCES

Bamberger, H. J. (1998):?Using a Standards-Based Approach to Teaching Mathematics.?The Business Monthly 1998 (January).?Also can be retrieved from http://www.bizmonthly.com/1_1998_focus/

Bao, J. (2002): *The Comparative Study on Mathematics Test Problems Between United Kingdom and China.* Doctoral Dissertation. Shanghai: East China Normal University.

Bishop, A. (1998): Culture, values and assessment in mathematics. In: H. S. Park, Y. H. Choe, H. Shin & S. H. Kim (Eds.), *Proceedings of the ICMI-EARCOME 1 - East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Vol. 1. Plenary lectures poster session* (pp. 2737). Seoul, Korea: Korea Society of Mathematical Education. MATHDI **1999a.**00492

Dai, Z. (2002): *A New Mathematics Teaching Approach: Open Ended Problem Solving* (In Chinese). Shanghai: Shanghai Education Press.

Huang, R. (2002): *Mathematics teaching in Hong Kong and Shanghai Analysis from prospective of variation.* Doctoral Dissertation. Hong Kong: Hong Kong University.

Hess, R. D. & Azuma, M. (1991): Culture Support for Schooling: Contrasts Between Japan and the United States. *Educational Researcher* **20(9)**, 28.

Leung, F. K. S. (1998): The traditional Chinese views on mathematics and education - implications for mathematics education in the new millennium. In: H. S. Park, Y. h. Choe, H. Shin & S. H. Kim (Eds.), *Proceedings of the ICMI-EARCOME 1 - East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Vol. 1. Plenary lectures, poster session* (pp. 6976). Seoul, Korea: Korea Society of Mathematical Education. MATHDI **1999a.**00490

Li, S. (1996): Does Practice Make *Perfect? For the Learning of Mathematics* **19(3)**, 3335.?MATHDI **2001a**.00933

Lim-Teo, S. K. (1998): Seeking a balance in mathematics education - the Singapore story. In: H. S. Park, Y. H. Choe, H. Shin & S. H. Kim (Eds.) *Proceedings of the ICMI-EARCOME 1 - East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Vol. 1. Plenary lectures, poster session* (pp. 287314). Seoul, Korea: Korea Society of Mathematical Education. MATHDI **1999a**.00485

Murphy, D. O. (1987): Education: A Hong Kong perspective. *Australian Universities Review* **30(2)**, 4344.

Thomas, P. R. & Bain, J. D. (1984): Contextual dependence of learning approaches: The effect of assessments. *Human Learning* **3**, 227240.

Watkins, D. & Bigg, J. (1996): *The Chinese learner: Culture psychological and contextual influences*. Hong Kong: CERC & ACER.

Wong, N. Y. (1998): In search of the CHC learner: smarter, works harder or something more? In: H. S. Park, Y. H. Choe, H. Shin & S. H. Kim (Eds.) *Proceedings of the ICMI-EARCOME 1 - East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Vol. 1. Plenary lectures, poster session* (pp. 8598). Seoul, Korea: Korea Society of Mathematical Education.

Zhang, D.; Leung, F. K. S. & Wong, N. (1998): Some characteristics of mathematics education in East Asia - an over-view from China. In: H. S. Park, Y. H. Choe, H. Shin & S. H. Kim (Eds.) *Proceedings of the ICMI-EARCOME 1 - East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Vol. 1. Plenary lectures, poster session* (pp. 4959). Seoul, Korea: Korea Society of Mathematical Education.?MATHDI **1999a**.00491

Zhang, D. & Lee, P. Y. (1990): Examination culture and mathematics teaching. In: *Proceedings of ICMI-China Regional Conference* (pp. 4046). Beijing.

Zhang, D. (2002): Textual research in Qing Dynasty and mathematics education. *Science* **54(2)**, 4347.

<부 록>

Jiangsu 성의 시골 및 도시 중등학교 학생들의 항등식 계산에 관한 연구4)

(1)시험의 주제 및 방법

1998년에, 중국의 Jiangsu 성의 8개 학교, 총 43개 학급의 2049명 학생에게 시험을 치루었다. 내용은 수학의 식의 계산에 관한 것으로서 간단히 하기, 제곱 완성하기 및 인수분해 하기이다. 다양한 난이도의 38개의 문제가 주어졌고, 시간제한은 10분이었다. 학생들의 기본 수학기술, 특히 완성의 속도에 대한 시험이었다.

(2) 시험에 대한 통계자료

다음 표에 결과를 나타내었다. X는 정답의 평균 개수, σ_n은 정답 수의 표준편차이고, Y(%)는 정답율이다. 정답율은 시험의 정답수를 각 학년의 학생의 수 곱하기 문제 수로 나누어, 100%를 곱한 것이다.

변수 \ 학년	8	9	10	11	12	전체
X	17.82	20.73	28.11	29.43	31.00	25.78
σ_n	6.08	7.05	4.22	4.34	4.20	7.29
Y	46.89	54.55	73.97	77.45	81.58	67.84

수학교육에서는, 수학 능력의 높은 표준을 형성하기 위해, 학생들의 기본 지식을 쌓고 그것에 견고한 훈련을 수반하는 것이 주된 목표이다. 위의 표본들에 대한 통계학적 분석에 기초하고, 수학 교사들의 경험과 그것을 결합하여, 세 개의 지수, 즉 평균과 통과 및 우수 등급으로 결론지을 있다. 통계적 결과에 따라, 다음과 같은 참조표준(reference standard)을 만들었다.

표준 / 학년	평균	통과	우수
	정답의 수	정답의 수	정답의 수
8	17.90	≧ 13	≧ 27
9	21.84	≧ 16	≧ 32
10	27.67	≧ 24	≧ 34
11	30.06	≧ 26	≧ 36
12	31.29	≧ 28	≧ 36

*정답의 최대 개수는 38이다.

4) Tian Zhong(Changshu College, 2003)이 수행하였다.

계산문제 시험문항

(I) 다음 식을 간단히 하여라 (1~5).

1. $1-3x^2y+5x^2y=$
2. $\frac{1}{4}ab^2-2ab^2=$
3. $\frac{1}{3}xy^2\cdot(-6x^2y)=$
4. $6ab^2c\div(-9ac)=$
5. $(-3xy^2)^3=$

다음을 인수분해 하여라 (6~8).

6. $(x2^m-9)=$
7. $x^2-3x+2=$
8. $y^2+y+\frac{1}{4}=$

다음을 완전제곱식으로 바꾸어라 (9).

9. $x^2-3x+1=$

(II) 다음 식을 간단히 하여라 (10~14).

10. $-\frac{2}{3}ab+\frac{3}{4}ab+ab$
11. $-y^2-2x^2-(-3y^2)$
12. $3x^2y\cdot\frac{1}{2}x\cdot(-2xy^2)$
13. $3x^2y+\frac{1}{3}xy\div(-xy)$
14. $[(-2n)^2]^3$

다음을 인수분해 하여라 (15~17).

15. $(a+b)^2-(x-y)^2$
16. $(x+y)^2+5(x+y)+6$
17. $(m-n)^2+4(m-n)+4$

다음을 완전제곱식으로 바꾸어라 (18).

18. $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{2}{3}$

(III) 다음 식을 간단히 하여라 (19~20).

19. $4x^3-(-6x^3)+9x^3$

20. $2a^2by\left[-\frac{1}{3}by\right]\div a^2by$

다음을 인수분해 하여라 (21~23).

21. $a^2-ab+ac-bc$

22. $m^2-n^2+am-an$

23. $x^2+2xy+y^2-z^2$

다음을 완전제곱식으로 바꾸어라 (24).

24. x^2+px+q

(IV) 다음 식을 계산하여라 (25~30).

25. $-\frac{1}{2}ab^2(b^2+3a^2b)$

26. $(x-2y^2)(-2x^2y)$

27. $(m^3n+mn^2)\div\frac{1}{3}mn$

28. $(a^3b^4c-2ab^3c)\div(-2ab)$

29. $(-2ab^2+a^2b+3ab^2)^2$

30. $(-a^2b)^5\div a^6b^2$

(IV) 다음 식을 계산하여라 (31~32).

31. $(4x^2y-5xy^2)-(3x^2y-4xy^2)$

32. $6ab^2\left[-\frac{1}{3}ab^4\right]\div 2a\square(-ab^2)$

(VI) 다음 식을 계산하여라 (33~38).

33. $2s^2t+\frac{1}{2}s^3t^2\div\frac{3}{2}st+\frac{2}{3}s^2t$

34. $ab^2c^2-ab\frac{1}{2}bc^2-ab^2c^2$

35. $xy^2z-xy\square x^2y\square(-xz)$

36. $-m^5n^3\frac{1}{3}m^2n^2mn+4m^2$

37. $(21a^2b^2-35a^3b^3)\div 7a^2b^2\cdot 2ab$

38. $2x^5y^4\div\frac{1}{2}xy^2+(-3x^2y^2)2x^2$