韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제3호. 2004. 9. 95-102

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18 No 3, Sep. 2004. 95-102

수학영재학생들에 대한 보충·심화 학습자료로서의 행렬

이 강 섭 (단국대학교)
박 용 범 (단국대학교 대학원)

수학영재교육이 활성화되기 위해서는 학습자료, 특히 보충·심화 학습자료의 개발이 시급하다. 이 논문에서는 교육과정에 나타난 행렬의 위치를 파악하여, 문제해결력 신장에 도움이 되는, 행렬을 소재로 한 몇 가지 예를 영재교육용 보충·심화 학습자료로 제시하였다.

Ⅰ. 들어가는 말

정보사회에서는 컴퓨터의 급속한 발달과 광범위한 보급으로 인하여 누구나 컴퓨터의 영향을 받으며 살아가고 있으며, 또 이 사회에 필요한 이산적구조를 논리적으로 접근할 수 있는 수학의 활용성이 강조되고 있다. 일반적으로, 컴퓨터 환경에서는 연속적인 대상보다는 이산적인 대상을 주로 다루고 있다. 즉, 많은 자료를 처리할 때에 연속적인 접근보다는 벡터로 행렬개념을 사용하여 분석하면 문제해결을 용이하게 할 수 있다. 이러한 점을 감안할 때, 우리 교육과정에서는 컴퓨터 활용에 필요한 이산적구조 특히 행렬의 개념을 얼마나 반영하고 있는지, 수학적 지식을 영재교육에 적극 활용하고 있는지를 심각히 고려하여야 한다.

우리나라에서는 교수요목기 시대부터 교육과정에 행렬식을 도입하였으나 제1차 교육과정에서는 삭제되었다. 그리고 제3차 교육과정부터 행렬을 본격적으로 도입하였으나 현행 제7차 교육과정에서는 오히려 제3차 교육과정의 시기보다도 행렬의 학습이 약화되어 있다. 한편, 수학과 과학의 영재양성을 목적으로 과학고등학교를 설치하였으나, 과학고등학교에서도 행렬의 학습은 충분히 다루지 못하고 있는 실정이다. 다만, 제 7차 교육과정에서는 '고급수학'이라는 교과목에서 비교적 많은 부분을 행렬과 관련하여 다루고 있다(교육부; 1993,1997,2000,2003 참조).

수학교육에 관한 연구의 측면에서 볼 때, 행렬을 소재로 한 관련 논문은 다수 있으나 석사학위 논문이 주류를 이루고 있으며 그것도 대부분은 교수-학습에 필요한 이론을 소개하고 있는 내용이 대부분이다. 특히, 수학영재학생을 대상으로 행렬을 소재로 한 논문은 전무한 상황이다. 다만, 박은영(2002)의 연구에서 사용된 '2×2 행렬 변환의 이해'는 수학영재교육의 환경 조성에 도움이 될 것이다. 한편, 최영한(2004)은 과학고등학교에서 다루는 '수학Ⅲ'과 '고급수학'을 분석하여 소개하였으며, 대학에서의 '선형대수'의 학습에서 고려되어야 할 사항을 언급하였다.

이 연구에서는, 교육과정에 나타난 행렬의 변천을 알아보고, 이를 바탕으로 수학영재교육에서의 보충·심화 자료로서 행렬을 소재로 한 몇 가지 예를 제시하였다.

Ⅱ. 학습자료로서의 행렬

최근의 행렬교육에 대한 관심의 초점은 행렬의 수학적인 내용보다는 행렬을 어떻게 활용할 수 있는가에 있다. 즉, 물리과학이나 컴퓨터과학에서의 활용 등 문제해결력 신장에 그 중요성을 두고 있다. 여기에서는, 우리나라 교육과정에 나타난 행렬의 위치와 그 강조점을 살펴보고, 행렬을 소재로 한 보충·심화 학습자료를 제시하였다.

1. 교육과정에서의 행렬

오늘날 급변하는 정보화사회의 기반을 이루는 것이 컴퓨터의 활용이다. 따라서, 컴퓨터로 대표되는 과학기술의 기반인 수학의 중요성이 강조되고 있으며 이산수학은 많은 산업분야에서 활용되고 있다. 특히, 행렬은 우리 생활에서 흔히 접하는 도로망, 가스공급망, 컴퓨터 네트워크 등에 다양하게 사용되고 있다.

1) 교육과정의 변천

교육부(2000)의 자료에 의하면, 교수요목기에 행렬식 단원을 대수학(40시)의 마지막 한 소단원으로 다루고 있다. 그러나 제1차 교육과정에서는 다루지 않고 있으며, 제2차 교육과정에서는 수학Ⅰ의 정규과정과는 별도로 직업계에서 선택하여 간략히 다루고 있다(문교부(1968)참조). 제 3차 교육과정에서는 수학Ⅱ에서 대수단원의 한 소단원으로 다루고 있으며, 제 4차 교육과정에서는 인문계열은 수학Ⅰ, 자연계열은 수학Ⅱ에서 다루고 있어서 그 폭이 확대되었다. 제 5차 교육과정은 제 4차와 같다. 그리고 제 6차 교육과정에서는 수학Ⅰ에서 기본 개념과 수학Ⅱ에서는 변환으로의 행렬을 다루고 있다. 실용수학에서 자료의 정리와 활용에 대하여 다루고 있다. 제 7차 교육과정에서는 수학Ⅰ에서 행렬의 기본개념을 배우고 이산수학의 그래프에 활용하고 있다. 이들을 요약하면 다음 <표 1>과 같다.

<표 1> 교육과정에 나타난 행렬

교수요목기	2학년에서 전체 선택 175시로 대수학 단원(40시)의 소단원으로 행렬식에서 행렬식을 구하는 방법과 소행렬식, 여인수 등
제1차 교육과정	전쟁과 사회혼란의 시기로 교육과정은 있었으나 이를 현장에서의 실천이 미흡 교과서의 제작의 어려움으로 제대로 시행하지는 못함 행렬에 대한 언급은 없다.
제2차 교육과정	수학Ⅰ의 과정에는 직업계에 필요한 정도로 추가 지도할 수 있는 삼각함수와 2차 곡선, 그리고 계산법과 행렬과 행렬식을 지도 행렬과 행렬식은 정의와 기본성질, 그리고 응용을 지도 ※ 실업계고등학교 수학(1968,1,10 초판, 1971, 3,1)에서 행렬식, 크라머의 방법, 행렬식 성질, 행렬의 연산(덧셈, 곱셈)

제3차 교육과정	수학Ⅱ에서 행렬에 대한 기본개념, 성질과 활용할 수 있는 능력 행렬의 뜻과 연산(3×3행렬 범위), 연립일차방정식, 간단한 일차변환(평면상에서 원점을 옮기지 않는 일차변환)
제4차 교육과정	수학Ⅱ(인문계)에서 행렬성질을 다루고 자연계에서는 간단한 변환까지
제5차 교육과정	4차 교육과정과 같은 내용으로 수학Ⅰ에서 행렬성질을 배우고 수학Ⅱ에서 간단한 변환까지
제6차 교육과정	수학Ⅰ에서 행렬과 그 연산과 연립일차방정식과 행렬으로 구성 수학Ⅱ에서는 대칭, 닮음, 회전 변환과 변환의 합성, 그리고 역변환 실용수학에서는 자료의 정리와 행렬, 행렬의 연산과 역행렬, 행렬의 활용
제7차 교육과정	이산수학에서는 행렬의 뜻, 그래프와 행렬(그래프 단원의 그래프의 활용) 수학Ⅰ에서는 행렬과 그 연산, 연립일차방정식과 행렬 수학Ⅱ에서는 다루지 않음

2) 중등교육과정에서의 행렬의 활용

행렬은 실생활의 다방면에 활용할 수 있으며, 행렬을 능숙하게 활용하는 것을 중등교육과정에서는 학습 개념의 확장과 적용으로 간주한다. 그러므로 행렬을 실생활의 문제해결과 연결하여 유용하게 활용할 수 있어야 한다. 또한 행렬은 수학의 각 영역의 단순한 모임이 아닌 통합적인 전체로 보이도록 교육과정 규준의 요구를 실행하는 수단이기도 하다(Thompson 외 2인, 1991).

① 수치자료의 조직과 저장

일반적으로 행렬을 가장 많이 사용하는 것은 자료를 저장할 때이다. 따라서, 행렬 개념을 도입할 때, 일상생활에서의 수치자료를 조직하거나 저장하는 것을 예로서 드는 것이 보통이다. 이를테면, 신문의 통계량 즉, 열과 행으로 쓰여진 것으로 야구의 여러 기록을 제시한 것, 비행기 시간표 등을 제시한다. 또, 예로서 제시한 것이 행렬과는 다르다고 하더라도 표현된 정보를 수학적 행렬로 이끌어 갈 수 있는 다양한 상황을 제시한다. 그리고 행과 열을 구분하여 자료가 저장된 상황을 이해하도록 구성한다.

② 행렬의 연산

교육과정의 각 단계에서 행렬의 연산을 소개하여 학생들이 행렬의 유용성과 연산의 성질을 배울 수 있도록 한다.

③ 그래프와 행렬

행렬은 그래프의 자료들을 저장하는 데에도 사용한다. 여기에서 그래프란 평면의 순서쌍의 집합으로 나타낸 것이 아니라 정점들을 가지고 이들 정점들 간에 선으로 이어지는 기하학적인 모양을 의미한다. 만약 선들의 방향이 있다면 최단거리에 관한 문제의 해결이나 순서의 분석도 용이하다.

④ 연립방정식에서의 행렬

행렬을 사용하는 대표적인 예의 하나이다. 여기에서는 연립방정식의 행렬표현과 역행렬 개념이 활용된다. 중등학교 교육과정에서는 2×2 행렬을 사용하며, 3×3 행렬 이상은 다루지 않는다.

⑤ 기하학과 기본행렬

행렬은 기하학의 학습에서도 많이 쓰이고 있다. 즉, 한 점 $(x,\ y)$을 점의 행렬 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$로 표현하고, 행렬이 수치적 자료를 저장하듯이 기하학에서도 행렬을 사용한다. 이렇게 하면, 평면도형의 n다각형의 꼭지점의 수를 2×n행렬로 표현할 수 있다.

예를 들면, 세 점 A(1, 1), B(4, 1), C(1, 6)를 꼭지점으로 하는 △ABC와 △BCA의 행렬표현은 각각 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$이다.

한편, 행렬의 변환(대칭, 닮음, 회전)은 도형의 이동에도 활용할 수 있다.

예를 들어, △ABC를 x축에 대칭변환한 삼각형은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$을 이용하여 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$과 같은 행렬표현으로 쓸 수 있다.

일반적으로 변환이 선형이면 $(x,\ y)$을 $(ax+by,\ cx+dy)$로의 변환이면 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 나타낸다. 즉, 행렬표현 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$이 된다.

한편 거리와 모양이 그대로 보존되는 평행변환은 행렬표현으로 평면과 공간에 활용되고 있다. 컴퓨터의 그래픽은 행렬의 기하학적 사용의 일부분을 활용한 것이다. 기하학에서 학생들은 행렬을 사용하여 변환을 알아보며, 행렬은 그림의 성질과 유사하거나 합동인 그림을 규명하는 등의 기하 외적인 기회도 제공하고 있다.

이 외에도 삼각법에서 행렬의 사용은 그 가치를 부여할 수 있다. 지금까지의 행렬의 개념으로 행렬로서 벡터를 나타낼 수 있게 할 수 있으며, 복소수의 삼각표현을 포함하는 복소수로 확장할 수 있다.

2. 영재교육용 보충 · 심화 학습자료

1) 게임이론

게임이론이란 일상생활뿐만 아니라 경제, 군사, 정치 등에서 이해가 엇갈리는 상황에서 각자가 어떠한 결정을 취해야 하며 그럴 경우 어떤 결과를 기대할 수 있는가에 대한 문제를 다루는 것이다. 그리고 게임이론은 단순히 경쟁적인 상황을 분석하는데 그치지 않고, 이해관계에 직접적으로 당사자들에게 적절한 행동전략을 제시해 준다. 게임이론을 이해하기 위하여 수학적 개념들이 필요성을 느끼지 못하지만 지도 이후에는 학생들이 형식적 수학이 필요하다는 것을 볼 수 있다(Perham외 1인 , 1991).

게임이론에서 문제에 대한 자유롭게 대답할 수 있고, 학생들 사이에서 논쟁과 논의를 불러일으킬 수 있어서 학생들은 수학이 역동적이고 현실성을 가지고 있으며, 실생활의 모든 측면에 적용될 수 있다라는 확신을 갖는다. 따라서 이 게임이론을 영재교육에 많이 활용하고 있으며 행렬은 컴퓨터와 관련하여 수학의 다양한 분야에서 이용된다.

예를 들면, 2인 게임으로 비협조(비영합)의 게임을 소개하면 다음과 같다.

두 남녀의 학생이 휴일을 어떻게 보낼 계획 세우는데 남자는 야구장을 여자는 연극 공연에 가기를 원한다. 이런 경우 두 전략(남녀모두 야구와 연극공연)에서 서로의 만족도를 (남자a, 여자b)로 나타낸다. a와 b사이의 만족도를 다음 행렬표현으로 볼 수 있는 경우가 비영합 게임이다(한용수, 1992).

$$\begin{array}{cc} & \text{여} \\ & \begin{array}{cc} \text{야구} & \text{연극} \end{array} \\ \text{남} & \begin{pmatrix} (3,\ 1) & (-2,\ -1) \\ (-1,\ 2) & (1,\ 3) \end{pmatrix} \end{array}$$

두 참여자의 만족도를 나타내는 행렬을 이득행렬이라고 하면 남자의 이득행렬(A)이고 여자는 B와 다음과 같다.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

만약 남자가 야구와 연극 전략을 $(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4})$인 경우는 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} (3,\ 1) & (-2,\ -1) \\ (-1,\ 2) & (1,\ 3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2},\ \frac{11}{4}) \end{pmatrix}$$

와 같이 여자가 유리하다.

같은 방법으로 여자의 혼합 전략에 대하여 누가 더 유리한가를 행렬으로 가능하다.

이밖에도 여러 분야의 전략게임의 형태를 행렬을 활용하여 접근이 가능하다.

2) 암호학

암호학의 이론 및 기술은 어떤 정보에 대한 비밀 등을 지키고자 하는 세력과 그것을 불법적으로 해킹 하려는 세력사이의 이해관계에 의하여 발전하였다. 가장 오래 된 암호체계는 기원전 50년경 로마의 황제 시저가 키케로에게 보낸 암호체계의 편지였다. 2차 세계대전도 정교한 암호체계를 어떻게 해독하느냐에 승패의 관권이 있었다. 그후 컴퓨터와 통신기술의 발달에 따라 컴퓨터 통신, 전자우편, 은행 간 대금 결제 등에 널리 암호를 쓰기 시작했다. 여러 과정을 거쳐 인간과 컴퓨터가 가장 난해한 해독해야하는 소인수분해를 이용한 암호법을 사용하게 되었다.

여기에서는 행렬이론을 활용하는 예를 다음과 같이 간략히 제시하고자 한다.

예) 암호문 만들기

“나는 항상 아름다움을 찾아가는 청소년이며 용기와 희망으로 가득합니다”를 암호문으로 만들어 보면 다음과 같은 행렬을 이용하게 된다.

<암호화 과정>

위의 무장의 글자 수는 30자이므로 30의 약수를 열과 행으로 하는 행렬을 만든다.

나	는	항	상	아	름	다	움	을	찾
아	가	는	청	소	년	이	며	용	기
와	희	망	으	로	가	득	합	니	다

위와 같이 3×10 행렬 형태로 만들 수 있다. 위의 전치행렬은

나	아	와
는	가	희
한	는	망
상	청	으
아	소	로
름	년	가
다	이	득
움	이	합
을	용	니
찾	기	다

이므로 암호문을 "나아와는가희한는망상정으아소로름년가다이득움이합을용니차기다"가 된다. 이 암호문의 해독은 30의 약수들의 행렬을 만들어 전치행렬을 구하는 과정이 필요하다(황동주, 2003).

위의 과정의 역으로 새로운 암호문을 제시하고 이 암호문을 해독하는 방법이다.

1단계: 암호문 글자 수를 확인

2단계: 짝인 약수(30: 1×30 2×15, 3×10, 5×6, 6×5, 10×3, 15×2, 30×1)들을 찾기

3단계: 2단계 중에서 선택하여 행렬으로 표현(1×30과 30×1형태의 행렬은 의미가 없다)

4단계: 표현한 행렬의 전치행렬을 구하고 그 행렬식의 1행 2행 … 해독

5단계: 한번 시행으로 해독이 불가능한 경우 2단계로 다시 돌아가 시행을 해독

예) 암호문: 나랑생는해함너우께를리해사평요

<해독과정>

1단계: 암호문 글자수 15, 2단계: 1×15, 3×5, 5×3, 15×1, 3단계: 3×5 선택하여 행렬으로 3×5 행렬으로 표현, 4단계: 주어진 행렬의 전치행렬, 5단계: 해독 또는 제시도

3단계	나랑생는해	4단계	나함리	5단계	"나함리랑너해생우사는께평해를요"
	함너우께를		랑너해		해독 실패
	리해사평요		생우사		
			는께평		
			해를요		
3단계	나랑생	4단계	나는너를사	5단계	"나는너를사랑해우리평생함께해요"
	는해함		랑해우리평		해독 성공
	너우께		생함께해요		
	를리해				
	사평요				

다른 방법으로 주어진 문장을 열로 표현의 경우도 고려한 예의 가능성을 고려해야한다.

힐의 행렬을 이용한 가역행렬로 평문을 암호문으로 만들고 해독하는 과정을 보면 다음과 같다.

예) 평문 "I LOVE YOU"

암호화하려면 먼저 알파벳 26글자를 A를 0으로 B를 1 … Z를 25라고 놓자.

알파벳의 집합을 Θ이라고 하자.

암호문을 만드는 과정은 다음과 같다.

1단계: 가역행렬인 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이고 $(det(A),\ |\Theta|)=1$이라고 하자.

임의의 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 이라고 하면 $(det(A),\ |\Theta|)=(3,\ 26)=1$이 된다.

2단계: I L O V E Y O U

8 11 14 21 4 24 14 20

와 같이 수를 두 개씩 짝을 지으면 마지막은 하나가 모자라므로 임의 수로 채운다. 즉, $p_1(8, 11)$, $p_2(14, 21)$, $p_3(4, 24)$, $p_4(14, 20)$이다.

3단계: $p_1A=(8, 11)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=(27, 84)=(1, 6)$ … **등을 계속하면**

$p_2A=(23, 24)$, $p_3A=(6, 12)$, $p_4A=(22, 20)$

이다.

4단계: 수를 대응하는 알파벳으로 바꾸면 암호문은 BGXYGMWU이다.

암호문 해독은 역행렬을 이용한다.

1단계: $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=9\begin{pmatrix} 4 & 21 \\ 25 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 36 & 189 \\ 225 & 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$**이다.**

2단계: 암호문을 수로 고치고 두 개씩 짝지어서 $C_1(1, 6)$ … $C_4(22, 20)$이 된다.

3단계: $C_1\ A^{-1}=(1, 6)\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}=(112, 115)=(8, 11)$ … $C_4\ A^{-1}=(14, 20)$**이다.**

4단계: 8 11 14 21 4 24 14 20

I L O V E Y O U

이다.

따라서 "I LOVE YOU"로 해독된다.

좀더 긴 문장이나 암호문과 가역행렬을 제시하여 해독하게 한다. 다른 방법으로 다양한 가역행렬을 사용하여 암호문을 만들고 해독하도록 제시한다.

한편 과학고등학교를 위한 교육프로그램개발 보고서의 내용에서도 행렬이론을 다양한 방법으로 다루고 있으나 위에서 제시한 구체적인 암호학이나 게임으로의 접근은 미약하다. 영재뿐만 아니라

일반 학생들에게도 다양한 교수방법으로 접근하는 데 도움이 되었으면 한다. 특히, 영재 교육의 다양성과 창의성 등을 키우는 방법적인 측면은 고려한 행렬이론의 활용한 예를 제시했다.

Ⅲ. 맺는말

이 논문에서는 영재학생들을 위한 보충·심화학습자료로서 행렬의 소재로 한 몇 가지 예를 제시하였다. 행렬교육은 수학영재교육에 만이 아니라 일반 중등수학교육에서도 중요하다. 그 이유는 앞에서 살펴본 바와 같이, 수학의 여러 분야에서 활용되며, 또 문제해결력의 지름길이 되기 때문이다. 특히, 정보화시대에 필수요소가 된 컴퓨터의 보안문제를 해결하는데 행렬의 개념은 유용한 도구가 된다.

이 논문의 맺음말로서, 정규 수업시간에 다루지 못하는 여러 가지 소재들을 보충·심화 학습에 도입함으로서 수학에 대한 흥미를 높히고, 수학의 실용성에 대한 관심을 높이기 위하여 이 방면에 대한 연구가 보다 강조되어야 함을 제언으로 삼는다.

참 고 문 헌

교육부 (1993). 과학고등학교 수학Ⅲ, 서울: 대한교과서(주).

______ (1997). 고등학교 수학Ⅲ, 서울: 대한교과서(주).

______ (2000). 초·중·고등학교 수학과 교육과정 기준(1946~1997), 서울: 대한교과서(주).

______ (2003). 교육프로그램개발 결과보고서(수학), 서울: 한국교육개발원.

문교부 (1968). 실업계 고등학교 수학, 서울: 대한교과서(주).

박은영 (2002). 고등학교 수학 영재를 위한 구성주의적 웹 기반 토론학습 환경 개발 연구, 박사학위 논문, 경북: 경북대학교.

최영한 (2004). 선형 대수의 가르침에 고려하여야 할 사항에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, pp.93~108, 서울: 한국수학교육학회.

한용수 (1992). 중등학교 수학과 교육과정에서 이산수학의 도입에 관한 연구, 석사학위 논문. 청원: 한국교원대학교.

황동주 (2003). 수학 프로그램 개발 - 암호론과 다면체를 중심으로-. 창의적 지식 생산자양성을 위한 영재교육(수학영역 워크숍), pp.327~350.

A. E. Perham & B. H. Perham (1991): *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12.* A Computer-based Discrete Mathematics Course. VA: NCTM.

D. R. Thompson,; S. L. Senk & S. S. Viktora (1991): *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12.* Matrices at the Secondary School Lovel. VA: NCTM.