부분적 강성 변화에 따른 효율적 부분 재해석 알고리즘

An Efficient Partial Reanalysis Algorithm for the Locally Changed Structures

김 치 경†
Kim, Chee-Kyeong

(논문접수일 : 2004년 9월 10일 ; 심사종료일 : 2004년 12월 6일)

요 지

본 연구에서는 부분적 강성 변경이 연속적으로 필요한 경우, 전체 구조물을 재해석하지 않고도 관심을 두고 있는 변위와 부재력을 실시간 응답 수준에서 재계산할 수 있는 "적응형 부구조물화를 이용한 부분 재해석 알고리즘"을 제안한다. PRAS 알고리즘의 핵심 개념은, 1) 대상 구조물을 강성변경부분과 강성고정부분으로 구분하고, 2) 강성고정부분을 강성변경부재들이 연결된 잔류자유도만을 갖는 부구조물로 응축한 후, 3) 강성변경부재들과 강성고정부분 부구조물의 결합으로 전체 구조물을 모델링함으로써, 최종 평형방정식의 잔류자유도수를 줄이는 데에 있다. 이 때 강성고정부분의 부구조물화 과정에서 본 연구에서 제시하는 또 하나의 알고리즘인 "적응형 부구조물화 알고리즘"을 적용하여 일단 초기 해석이 완료된 후에는 잔류자유도 구성이 달라질 때 다시 부구조물화에 소요되는 계산량을 최소화하였다.

핵심용어 : PRAS 알고리즘, 적응형 부구조물화, 응력분포계수, 구조재해석, 강성 변화, 정적 응축

Abstract

This paper presents an efficient reanalysis algorithm, named PRAS (Partial Reanalysis algorithm using Adaptable Substructuring), for the partially changed structures. The algorithm recalculates directly any displacement or member force under consideration in real time without a full reanalysis in spite of local changes in member stiffness or connectivity. The key procedures consists of 1) partitioning the whole structure into the changed part and the unchanged part, 2) condensing the internal degrees of freedom and forming the unchanged part substructure, 3) assembling and solving the new stiffness matrix from the unchanged part substructure and the changed members.

keywords : *PRAS algorithm, adaptable substructuring, response force distribution factor, structural reanalysis, stiffness change, static condensation*

1. 서 론

구조해석 시, 여러 가지 이유로 구조물의 강성을 부분적으로 변경해가며 재해석하여야 하는 경우들이 있다. 부분적 강성 변경이 필요한 경우로는 응력 및 변위 검토 결과에 따른 부재 단면 변경, 부재의 첨삭, 재료 비선형성에 의한 강성 변화 등을 생각할 수 있다. 이러한 경우 강성 변경이 부분적일지라도 전체 구조물을 재해석하여야 하며, 경우에 따라서는 강성 변경과 재해석 과정이 수십회 반복되면서 많은 시간과 노력이 투입되곤 한다.

본 연구에서는 부분적 강성 변경이 연속적으로 필요한 경우, 전체 구조물을 재해석하지 않고도 관심을 두고 있는 변위와 부재력을 실시간 응답 수준에서 재계산할 수 있는 "적응형 부구조물화를 이용한 부분 재해석 (PRAS : Partial Re-Analysis using Adaptable Substructuring)" 알고리즘을 개발하였다. PRAS 알고리즘의 핵심 개념은, 대상 구조물을 강성변경부분과 강성고정부분으로 구분하고, 강성고정부분을 양 부분이 공유하는 자유도만을 갖는 부구조물로 응축한 후, 강성변경부재들과 강성고정부분 부구조물의 결합으로 전체 구조물을 모델링함으로써, 최종 평형방정식

† 책임저자, 정회원 · 선문대학교 공과대학 건축학과 교수
전화: 041-530-2321 ; Fax: 041-530-2839
E-mail: ckkim@sunmoon.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

의 자유도수를 공유자유도수 정도로 줄이는 데에 있다. 이 때 강성고정부분의 부구조물화 과정에서 본 연구에서 제시하는 또 하나의 알고리즘인 "적응형 부구조물화"(AS : Adaptable Substructuring) 알고리즘을 적용하였다. 적응형 부구조물화 알고리즘은 일단 초기 해석이 한번 수행되면 이후 부분적 강성변경에 따른 재해석 시 계산량을 획기적으로 줄일 수 있다.

또한 본 연구에서는 구조물 내 각 자유도에 단위하중이 작용할 때 각 부재 내 자유도에 발생하는 응력을 나타내는 응력분포계수(RDF : Response force Distribution Factor)를 정의하였고, PRAS 알고리즘의 일부분으로 사용되었다.

이제까지 단 한 부재라도 변경이 있을 때 전체 구조물을 재해석해야 했음을 생각할 때, 본 연구의 PRAS 알고리즘이 제공하는 부분적 강성 변경에 따른 실시간 재해석 기능은 구조시스템 설계, 구조물 최적화[4], 변위 제어[1),2),5)] 등 대형구조물의 구조설계에 다양하게 활용됨으로써 설계 품질 및 생산성 향상에 크게 기여할 수 있을 것으로 기대된다. 또한 본 연구에서 제시한 적응형 부구조물화 알고리즘과 부재 응력분포계수를 활용하여 구조설계 및 해석 효율을 추가로 향상시키기 위한 연구를 여러 관점에서 진행 중에 있다.

2. 적응형 부구조물 알고리즘 유도

2.1 정적응축 및 부구조물화 기법 고찰

직접강성법(direct stiffness method)에서 평형방정식은 식 1과 같다.

$$\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{r} \; ; \; \boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{K}^{(i)} \tag{1}$$

여기에서, $\boldsymbol{K}$는 구조물 강성행렬, $\boldsymbol{K}^{(i)}$는 i번째 부재 강성행렬, $\boldsymbol{u}$는 변위벡터, $\boldsymbol{r}$은 하중벡터, m은 부재의 수이다.

정적응축(static condensation) 또는 부구조물화(substructuring) 기법은, 구조물의 강성행렬 $\boldsymbol{K}$와 하중벡터 $\boldsymbol{r}$을 조합하기 전에 전체 구조물의 평형방정식 중 일부를 미리 풀어 전체 자유도수를 줄이기 위하여 사용된다.[3)]

정적응축에서 사용되는 방정식을 구성하기 위하여 강성행렬, 변위벡터, 하중벡터를 식 2에서 보는 바와 같이 잔류자유도 변위 $\boldsymbol{u_a}$와 소거자유도 변위 $\boldsymbol{u_c}$로 구분하여 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{aa}} & \boldsymbol{K_{ac}} \\ \boldsymbol{K_{ca}} & \boldsymbol{K_{cc}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_a} \\ \boldsymbol{u_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r_a} \\ \boldsymbol{r_c} \end{bmatrix} \tag{2}$$

식 2의 두번째 방정식을 이용하면 식 3으로 정리할 수 있으며, 이를 식 2의 첫번째 방정식에 대입하면 식 4가 얻어진다.

$$\boldsymbol{u_c} = \boldsymbol{K_{cc}^{-1}}(\boldsymbol{r_c} - \boldsymbol{K_{ca}u_a}) \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{K_{aa}} - \boldsymbol{K_{ac}K_{cc}^{-1}K_{ca}})\boldsymbol{u_a} = \boldsymbol{r_a} - \boldsymbol{K_{ac}K_{cc}^{-1}r_c} \tag{4}$$

그러므로 정적응축기법을 이용하여 부구조물의 강성행렬을 구하기 위해서는 가우스소거법을 이용하여 응축 대상 자유도들을 소거하여야 하며, 응축 대상 자유도가 바뀌거나 부재 강성이 바뀌었을 때 다시 가우스소거를 수행하여야 한다.

2.2 $\boldsymbol{LDL^T}$ 분해에 의한 가우스소거 고찰

가우스소거를 정식화하기 위하여 가장 많이 사용되는 알고리즘의 하나가 $\boldsymbol{LDL^T}$분해(decomposition)이다. (1)식의 강성행렬 $\boldsymbol{K}$에서 i 번째 행의 대각요소 하부를 0으로 소거하는 계수행렬을 $\boldsymbol{L_i^{-1}}$이라 하면 (5)식과 (6)식이 성립한다. 여기에서 $\boldsymbol{S}$는 상부삼각행렬이다.

$$\boldsymbol{L_{n-1}^{-1}} \cdots \boldsymbol{L_2^{-1}L_1^{-1}K} = \boldsymbol{S} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{L_1L_2} \cdots \boldsymbol{L_{n-1}S} = \boldsymbol{LS} \tag{6}$$

이 때 $\boldsymbol{L_i}$는 $\boldsymbol{L_i^{-1}}$의 대각요소 하부 요소의 부호를 바꾸어 줌으로써 바로 구할 수 있다. 상부삼각행렬 $\boldsymbol{S}$는 다시 $\boldsymbol{S}$의 대각요소만으로 구성되는 대각행렬 $\boldsymbol{D}$와 $\boldsymbol{L^T}$의 곱으로 표현될 수 있으며, 결국 강성행렬은 식 7로 분해된다.

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{LDL^T} \tag{7}$$

식 7은 다음 두 단계에 의하여 식 1의 해 $\boldsymbol{u}$를 구하기 위하여 효과적으로 사용될 수 있다.

$$\boldsymbol{LV} = \boldsymbol{R} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{DL^TU} = \boldsymbol{V} \tag{9}$$

식 8로부터 다음 식에 의하여 $\boldsymbol{V}$를 구할 수 있고,

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L_{n-1}^{-1}} \cdots \boldsymbol{L_2^{-1}L_1^{-1}R} = \boldsymbol{L^{-1}R} \tag{10}$$

식 9로부터 역대입(back substitution)에 의하여 변위

벡터 $\boldsymbol{u}$를 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{L^T U = D^{-1} V} \tag{11}$$

일회 곱하기(또는 나누기)연산과 바로 이어지는 더하기 연산을 단일연산으로 하고, N개의 방정식으로 구성된 식 1의 강성행렬이 밴드폭 M으로 밴드화되었다고 할 때, 상기 과정에서의 계산량을 평가해보면 식 7의 분해를 위하여 $0.5NM^2$, 식 8 이후의 역대입에 2NM의 연산량이 소요된다.[3)]

2.3 적응형 부구조물화 알고리즘

식 2, 3, 4에 의해 정적응축된 부구조물의 강성 및 유연성행렬을 각각 K_{aa}, F_{aa}라 하면, F_{aa}의 요소 $F_{aa,ij}$는 j 번째 잔류자유도에 단위하중을 가할 때 i번째 잔류자유도에 발생하는 변위이므로 식 12가 성립된다. 여기에서 I_{aa}는 항등행렬으로서 i 번째 열은 i 번째 잔류자유도에 단위하중이 작용하는 하중벡터이다.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{aa}} & \boldsymbol{K_{ac}} \\ \boldsymbol{K_{ca}} & \boldsymbol{K_{cc}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F_{aa}} \\ \boldsymbol{F_{ca}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I_{aa}} \\ \boldsymbol{O_{ca}} \end{bmatrix} \tag{12}$$

일차 해석을 통하여 식 7에 주어진 $\boldsymbol{LDL^T}$ 분해가 수행되었다면, 식 12로부터 식 8 이후의 역대입만으로 $\boldsymbol{F_{aa}}$를 구할 수 있다. 한편, 부구조물의 강성행렬 $\boldsymbol{K_{aa}}$는 $\boldsymbol{F_{aa}}$의 역행렬로서 구할 수 있다.

전 절에서 기술한 바대로 하나의 하중벡터에 대한 변위벡터를 구하기 위해 2NM의 계산량이 소요되므로, Q개의 잔류자유도에 대한 유연성행렬 $\boldsymbol{F_{aa}}$를 구성하기 위해서는 2NMQ의 계산량이 필요하고, 이로부터 부구조물의 강성행렬 $\boldsymbol{K_{aa}}$를 구하기 위해서는 추가로 $\boldsymbol{F_{aa}}$의 역행렬을 구하기 위한 Q^3의 연산이 요구된다.

이와 같이 전체 구조물의 강성행렬에 대한 $\boldsymbol{LDL^T}$분해를 우선 수행하고, 잔류 자유도만으로 구성되는 부구조물 유연성행렬의 역행렬로서 부구조물의 강성행렬을 구하는 절차를 "적응형 부구조물화 (Adaptable Substructuring) 알고리즘"이라 명명하였다.

이 알고리즘은, 동일 구조물을 대상으로 서로 다른 잔류자유도를 갖는 여러 유형의 부구조물이 필요하고 각 부구조물의 잔류 자유도수가 적을 경우, 식 4에 의한 정적응축 알고리즘에 비해 매우 효율적이다.

3. 부분 재해석(PRAS) 알고리즘

3.1 알고리즘 개요

직접강성법에 의한 구조물의 해석에서 어느 한 부재라도 강성이 변하게 되면 전체 구조물을 재해석함이 일반적이다. 다음은 구조물 내 강성 변경과 그에 따른 재해석이 필요한 대표적인 경우들이다.

1) 응력 검토에 따른 부재 단면 변경
2) 변위/변형 검토에 따른 부재 강성 변경
3) 재료 비선형성에 의한 부재 강성 변화
4) 추가 부재 첨가 및 기존 부재 삭제

본 연구에서는 전술한 적응형 부구조물화 알고리즘을 이용하여, 구조물에 부분적인 강성 변경이 있을 때 전체 구조물을 재해석하지 않고도 관심을 두고 있는 변위(이하 "관심변위"라 함)와 부재력(이하 "관심부재력"이라 함)을 직접 구할 수 있는 "적응형 부구조물화를 이용한 부분 재해석", 약어로 PRAS(Partial Reanalysis using Adaptable Substructuring)알고리즘을 개발하였다. PRAS 알고리즘의 개념은 다음과 같다.

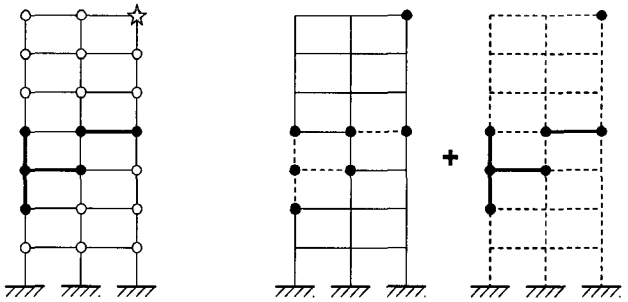

그림 1 강성 변경 부분과 강성 고정 부분의 분리

1) 그림 1 (a)에 주어진 초기 구조물을 해석한 후, 그림 1 (b)에서 보는 바와 같이 대상 구조물을 그림 좌측의 강성고정부분과 그림 우측의 강성변경부분으로 구분한다. 그림에서 굵은 선으로 표기된 부재는 강성변경부재를 뜻한다.
2) 그림 1 (a)에서 흑색점으로 표기된, 강성변경부재가 연결된 자유도(이하 "공유자유도"라 함)와 별표로 표기된 관심변위 자유도들을 잔류자유도로 선택한다.
3) 적응형 부구조물화 알고리즘에 의해 강성고정부분을 부구조물화하되, 2)항에서 선택된 잔류자유도만이 남

도록 나머지 내부 자유도들을 소거한다.

4) 3)항의 강성고정부분 부구조물과 강성변경부재들의 변경된 강성행렬을 조합하여, 잔류자유도만으로 구성된 강성 변경 후 강성행렬을 구성하고 해석한다.
5) 이상의 해석 결과로서 강성 변경 후 잔류자유도의 변위와 강성변경부재의 부재력을 구한다.
6) 강성변경부재의 부재력 변화량과 강성고정부재의 응력분포계수를 이용하여 강성고정부재의 변경 부재력을 계산한다. 응력분포계수에 대해서는 다음 3.2절에서 기술한다. 그림 2는 이상의 PRAS 알고리즘의 순서도를 보여준다.

PRAS 알고리즘은 1차 해석 후 부분적으로 구조물의 강성을 변경해 가며, 관심을 두고 있는 변위나 부재에 미치는 영향을 실시간으로 확인할 수 있다는 데 의미가 있다. 이는 부재 강성과 특정 변위, 또는 부재 강성과 여타 부재 부재력 사이의 상관성을 적은 계산량으로 정량화할 수 있으므로 감도해석을 위한 알고리즘으로서도 활용될 수 있다. 이외에도 본 알고리즘을 이용하여 구조물 해석 및 설계를 위한 다양한 기법 개발이 가능할 것으로 기대된다.

3.2 부재의 응력분포계수

유연성행렬의 요소 $\boldsymbol{F}_{ij}$는 j 번째 자유도에 단위하중을 가할 때 i 번째 자유도에 발생하는 변위이고, m 번째 부재 강성행렬의 요소 $\boldsymbol{K}_{ij}^{(m)}$는 j번째 자유도에 단위변위가 발생할 때 i 번재 부재 자유도에 발생되는 부재력이다. 그러므로 식 13에서 보는 바와 같이 m 번째 부재 강성행렬 $\boldsymbol{K}^{(m)}$과 구조물 유연성행렬 $\boldsymbol{F}$의 곱은 구조물 내 j 번째 자유도에 단위하중이 작용할 때 i 번째 부재 자유도에 발생하는 응력 $\boldsymbol{R}_{ij}^{(m)}$을 요소로 갖는, 부재 자유도수 NE개의 행과 구조물 자유도수 N개의 열을 갖는 행렬로 주어진다.

$$\boldsymbol{R}^{(m)} = \boldsymbol{K}^{(m)}\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{NE} \times \boldsymbol{N}] \tag{13}$$

본 연구에서는 식 13으로 계산되는 계수 $\boldsymbol{R}_{ij}^{(m)}$을 구조물 내 j 번째 자유도에 대한 부재 내 i 번째 자유도에 대응하는 응력분포계수(RDF : Reponse force Distribution Factor)라 정의하고, 이들 계수로 구성되는 행렬 $\boldsymbol{R}^{(m)}$을 부재 m의 응력분포계수행렬이라 명명하였다.

본 연구에서 부재의 응력분포계수는 부재간 응력 재분배 관계를 계산하기 위하여 사용되었다. 즉 어떤 이유에서든 구조물 내 한 부재 또는 여러 부재의 부재력에 변화가 있고

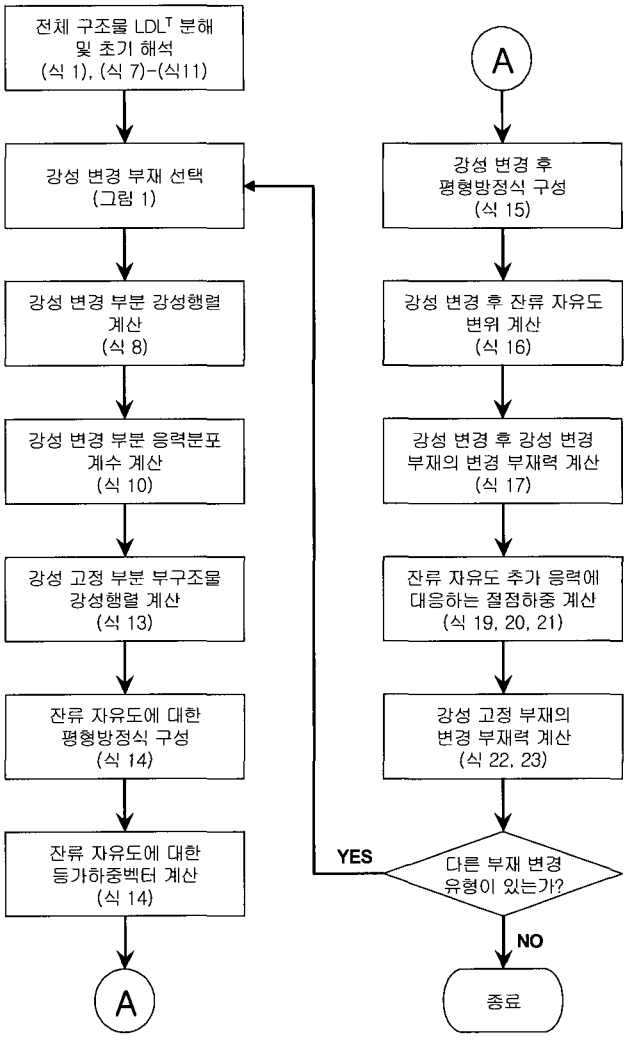

그림 2 PRAS 알고리즘 순서도

그 변화량이 계산되었을 때, 계산된 부재력 변화에 따른 여타 부재의 부재력 변화를 재계산하는데 응력분포계수가 사용되었다. 이에 대해서는 3.8절에서 자세히 기술한다.

이와 같이 부재의 응력분포계수는 부재간 상관관계등 각 부재의 고유한 특성을 내포하고 있어 구조물의 거동 및 응력 분포 특성을 여러 모로 분석하는데 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

3.3 강성변경부분과 강성고정부분의 구분

그림 1(a)에서 보는 바와 같이, 일단 구조해석이 완료된 후 부분적으로 강성을 변경하여 재해석해야 할 경우를 가정하자. 전체 구조물은 그림 1(b)에서 보는 바와 같이 그림 왼쪽의 강성고정부분과 그림 오른쪽의 강성변경부분으로 구분 가능하며, 이 두 부분 구조는 공유자유도에서 연결된다.

그러므로 전체 구조물의 강성행렬을 잔류자유도에 대하여 구성하되, 이는 식 14에 보는 바와 같이 강성변경부분 강성행렬 K^c와 강성고정부분 강성행렬 K^u로 구분할 수 있다. 여기에서 강성변경부재들은 모두 공유자유도와 연결되어 있으므로, 강성변경부분의 강성행렬 K^c_{aa}는 식 15에 보는 바와 같이 강성변경부재들의 부재 강성행렬의 합으로 구할 수 있다. 여기에서 M_c는 강성변경부재 수이다. 강성고정부분 강성행렬 K^u_{aa}는 다음 단계에서 구한다.

$$K_{aa} = K^c_{aa} + K^u_{aa} \tag{14}$$

$$K^c_{aa} = \sum_{i=1}^{Mc} K^{(i)} \tag{15}$$

한편, $KF = I$이므로, 이 식에 식 14를 대입하여 분배하면 식 16과 같으며, 여기에서 F_{aa}는 2.2절 적응형 부구조물화에서 기술한 바 대로 초기 구조해석 및 LDL_T 분해가 완료된 후이므로, 식 12에 의하여 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} K_{aa}F_{aa} &= \left(K^c_{aa} + K^u_{aa}\right)F_{aa} \\ &= K^c_{aa}F_{aa} + K^u_{aa}F_{aa} \\ &= I_{aa} \end{aligned} \tag{16}$$

3.4 강성고정부분 부구조물의 강성행렬

식 16을 정리하면 식 17이 구해진다.

$$\begin{aligned} K^u_{aa}F_{aa} &= I_{aa} - K^c_{aa}F_{aa} \\ &= I_{aa} - R^c_{aa} \end{aligned} \tag{17}$$

여기에서 모든 행렬의 크기는 잔류자유도수 Q×Q이고, K^u_{aa}는 강성고정부분을 잔류자유도만을 갖는 부구조물로 정적응축하였을 때 강성행렬, F_{aa}는 전체 구조물을 잔류자유도만을 갖는 부구조물로 정적응축하였을 때의 유연성행렬, I_{aa}는 항등행렬, K^c_{aa}는 식 15로 구해진 강성변경부분의 강성행렬, R^c_{aa}는 식 18로 계산되는 잔류자유도 단위하중에 대한 강성변경부분의 응력분포계수행렬이다.

$$R^c_{aa} = K^c_{aa}F_{aa} \tag{18}$$

식 17로부터 K^u_{aa}는 다음 식 19로 계산된다.

$$K^u_{aa} = \left(I_{aa} - R^c_{aa}\right)F^{-1}_{aa} \tag{19}$$

식 19에 의한 강성고정부분 부구조물의 강성행렬 계산은 본 연구에서 매우 중요한 의미를 갖는다. 즉, 식 19에 의하여, 전체 구조물에서 강성이 변경된 부분을 제외한 강성고정부분을 강성 변경 부재와 공유하는 자유도만을 갖는 부구조물로 응축할 수 있다. 이 과정은 2.3절의 적응형 부구조물화 알고리즘을 응용한 것으로서, 식 4에 의한 부구조물 강성행렬 계산에 대략 $0.5NM^2$의 연산이 필요한 반면, 식 19에 의한 동일 강성행렬 계산에는 $2NMQ+Q^3$의 연산이 소요된다. 그러므로 강성변경부분이 국부적으로 한정되어 잔류자유도수 Q가 전체 자유도 수 N, 또는 강성행렬의 밴드폭 M에 비하여 매우 작을 때, 식 19는 식 4 대비 매우 효율적이다.

3.5 잔류자유도에 대한 평형방정식 구성

전체 구조물의 강성행렬은 강성변경부재들의 강성행렬과 식 19로 계산된 강성고정부분 부구조물 강성행렬을 조합하여 구성할 수 있으며, 잔류자유도에 대응하는 구조물의 변위벡터, 하중벡터, 강성행렬을 각각 u_a, r_a, K_{aa}라 하면 잔류자유도에 대한 평형방정식은 식 20으로 표현된다.

$$\begin{aligned} K_{aa}u_a &= r_a \\ K_{aa} &= \left(K^c_{aa} + K^u_{aa}\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{Mc} K^{(i)}_{aa} + K^u_{aa}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

이미 초기해석이 수행되었으므로 잔류자유도 변위벡터 u_a는 해석 결과로 주어진 변위벡터 u로부터 정리할 수 있다. 또한 하중벡터 r의 잔류자유도에 대한 등가하중벡터 r_a는 식 20을 이용하여 계산할 수 있다.

이상의 과정을 통하여 당초 주어진 구조물은 그림 1(b)에 보는 바와 같이 잔류자유도만을 갖는 강성고정부분 부구조물과 강성변경부재들로 모델링될 수 있다.

3.6 강성 변경 후 평형방정식 구성과 재해석

강성변경부재들의 새로운 강성행렬을 $\tilde{k}^{(i)}$라 하고, 이들의 합으로 구성되는 강성변경부분의 강성행렬을 $\tilde{k}^c$라 하면, 강성 변경 후 평형방정식은 식 21로 구성되고 이 때의 새로운 변위 $\tilde{u}_a$는 식 22로, 강성변경부재의 새로운 부재력 $\tilde{f}^{(i)}$는 식 23으로 계산된다.

$$\left(\tilde{K}^c + K^u_{aa}\right)\tilde{u}_a = \left(\sum_{i=1}^{Mc} \tilde{K}^{(i)} + K^u_{aa}\right)\tilde{u}_a = r_a \tag{21}$$

$$\tilde{u}_a = \left(\sum_{i=1}^{Mc} \tilde{K}^{(i)} + K^u_{aa}\right)^{-1} r_c \tag{22}$$

$$\tilde{f}^{(i)} = \tilde{K}^{(i)}\tilde{u}_a, \quad i=1,...,Mc \tag{23}$$

그림 1(a)에 별표로 표기된 관심변위, 즉 부재 강성 변경에 따른 변위 변화를 관찰하고 싶은 자유도가 강성변경부재와 연결되어 있지 않을 경우라도 해당 자유도를 잔류자유도에 포함시킴으로서 식 22에 의해 해당 자유도의 변경 변위를 구할 수 있다.

3.8 강성고정부재의 부재력 계산

강성고정부분 내 부재들의 부재력은 해당 부재들의 응력분포계수를 이용하여 구할 수 있다. 강성변경부분에 발생한 부재력 변화량의 합 Δf^c는 식 24와 같이 각 강성변경부재 부재력 변화량의 합으로 또는 강성변경부분 강성행렬 및 대응 변위벡터의 곱으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta f^c &= \sum_{i=1}^{Mc}\left(\tilde{f}^{(i)} - f^{(i)}\right) \\ &= \tilde{K}^c\tilde{u}_a - K^c u_a\end{aligned} \tag{24}$$

잔류자유도 단위하중에 대한 강성고정부분의 잔류자유도 방향 응력분포계수행렬을 R^u_{aa}라 하면, R^u_{aa}는 식 25에 보는 바와 같이 $K^u_{aa}F_{aa}$ 또는 $I_{aa}-R^c_{aa}$로 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}R^c_{aa} + R^u_{aa} &= I \\ R^u_{aa} &= I - R^c_{aa}\end{aligned} \tag{25}$$

강성고정부분의 잔류자유도에 Δf^c_a-의 힘이 추가로 작용되도록 하기 위한 잔류자유도 절점 하중을 Δr_a라 하면 식 26의 방정식이 얻어지고, 식 27에 의해 Δr_a이 계산되며, 이 때 강성고정부분 내 각 부재에 발생되는 부재력 변화량 $\Delta f^{(i)}$은 식 28에 보는 바와 같이 Δr_a에 해당 부재의 응력분포계수를 곱하여, 그리고 변경된 부재력은 식 29와 같이 당초 부재력에 $f^{(i)}$에 $\Delta f^{(i)}$를 더하여 계산할 수 있다.

$$R^u_{aa}\Delta r_a = -\Delta f^c \tag{26}$$

$$\Delta r_a = R^{u,-1}_{aa}\left(-\Delta f^c\right) \tag{27}$$

$$\Delta f^{(i)} = R^{(i)}\Delta r_a, \quad i=1,...,Mu \tag{28}$$

$$\tilde{f}^{(i)} = f^{(i)} + \Delta f^{(i)}, \quad i=1,...,Mu \tag{29}$$

4. 적용예

본 연구에서는 PRAS 알고리즘에 따라 초기 해석 후 일부 부재의 강성을 변경할 때 부분 해석을 통해 관심 변위와 부재력를 재계산하는 PRAS 프로그램을 개발하고, 그 결과를 기존 유한요소 프로그램의 해석 결과와 비교하여 PRAS 알고리즘을 검증하였다. 프로그램은 MatLAB을 이용하여 작성하였으며, 검증 절차는 다음과 같다.

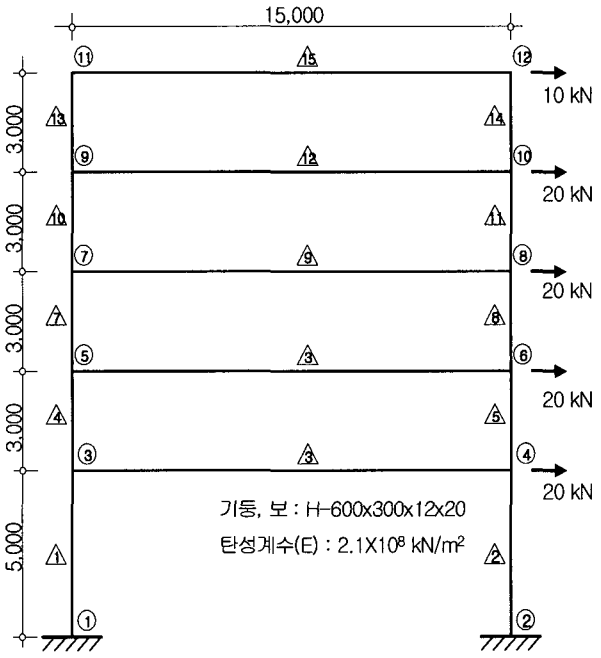

그림 3 예제 구조물

1) 그림 3에 주어진 5층 강골조 초기 구조물을 PRAS 프로그램과 SAP2000으로 해석한 후 초기 변형과 부재력을 비교한다. 이 때 모든 기둥과 보로서 H-600×300×12×20 (A=152.5cm^2, I=90,400 cm^4)형강이 사용되었다.
2) 예제 구조물에서 1번 기둥과 3번 보를 H-700×300×13×24(A=235.5cm^2, I=137,000 cm^4)로 교체하고, 12번 절점의 X방향 변위를 관심 변위, 15번 보의 부재력을 관심 부재력으로 선택하여 PRAS 알고리즘에 의한 해석을 수행한다.
3) 2)항의 조건과 마찬가지로 1번 기둥과 3번 보 단면을 교체하여 SAP2000으로 해석한 후, 강성변경부분과 관심 변위 및 부재력을 2)항의 PRAS 프로그램에 의한 부분 해석 결과와 비교한다.

PRAS 알고리즘에 의한 부분 해석 결과는 이론적으로 전체 구조물에 대한 재해석 결과와 동일하여야 하며, 본 예제

에서도 양 해석 결과가 동일함을 확인할 수 있었다. 이후로는 PRAS 프로그램의 수행 과정에서 계산되는 주요수치들을 제시함으로써 수행절차를 검증하고 계산량 면에서의 효율성을 보이고자 한다.

PRAS 프로그램과 SAP2000에 의한 초기 해석 결과는 동일함을 확인하였다. 유연성 행렬의 계산이 완료된 후, 1번 기둥과 3번 보 단면을 H-700×300×13×24로 교체하고 PRAS 프로그램에 의한 부분 해석을 수행하였다.

표 1 강성변경부분의 변경 전후 강성행렬 K^c, $\tilde{K}^c$

El. Dof \ Loading		3-X	3-Y	3-R	4-X	4-Y	4-R	12-X
3-X	Before	2.93E+5	0	5.95E+4	-2.70E+5	0	0	0
	After	3.70E+5	0	1.01E+5	-3.30E+5	0	0	0
3-Y	Before	0	8.09E+5	6.61E+3	0	-8.81E+2	6.61E+3	0
	After	0	9.91E+5	1.13E+4	0	-1.50E+3	1.13E+4	0
3-R	Before	5.95E+4	6.61E+3	2.64E+5	0	-6.61E+3	3.30E+4	0
	After	1.01E+5	1.13E+4	4.50E+5	0	-1.13E+4	5.63E+4	0
4-X	Before	-2.70E+5	0	0	2.70E+5	0	0	0
	After	-3.30E+5	0	0	3.30E+5	0	0	0
4-Y	Before	0	-8.81E+2	-6.61E+3	0	8.81E+2	-6.61E+3	0
	After	0	-1.50E+3	-1.13E+4	0	1.50E+3	-1.13E+4	0
4-R	Before	0	6.61E+3	3.30E+4	0	-6.61E+3	6.61E+4	0
	After	0	1.13E+4	5.63E+4	0	-1.13E+4	1.13E+5	0
12-X	Before	0	0	0	0	0	0	0
	After	0	0	0	0	0	0	0

표 2 강성변경부분의 응력분포계수행렬 R^c_{aa}

DOF \ DOF	3-X	3-Y	3-R	4-X	4-Y	4-R	12-X
3-X	9.63E-1	0	1.01E-1	3.66E-2	0	-1.01E-1	5.00E-1
3-Y	4.41E-2	1.00E+0	-1.76E-2	4.41E-2	1.44E-4	-1.76E-2	6.92E-1
3-R	3.95E-1	-1.08E-3	6.11E-1	2.66E-1	1.08E-3	1.24E-1	-8.10E-1
4-X	-4.40E-1	0	-3.78E-2	4.40E-1	0	3.78E-2	1.71E-4
4-Y	8.16E-2	-2.67E-4	-3.26E-2	8.16E-2	2.67E-4	-3.26E-2	1.83E-1
4-R	-6.14E-1	2.00E-3	2.11E-1	-6.10E-1	-2.00E-3	2.79E-1	-1.37E+0
12-X	0	0	0	0	0	0	0

표 3 강성고정부분 부구조물의 강성행렬 K^u_{aa}

DOF \ DOF	3-X	3-Y	3-R	4-X	4-Y	4-R	12-X
3-X	2.86E+4	2.12E+3	-5.62E+4	-2.50E+4	-2.12E+3	4.51E+4	-3.57E+3
3-Y	2.12E+3	2.99E+3	-3.00E+3	2.12E+3	-2.99E+3	-3.00E+3	-4.24E+3
3-R	-5.62E+4	-3.00E+3	1.71E+5	4.51E+4	3.00E+3	-8.34E+4	1.11E+4
4-X	-2.50E+4	2.12E+3	4.51E+4	5.24E+4	-2.12E+3	3.31E+3	-3.57E+3
4-Y	-2.12E+3	-2.99E+3	3.00E+3	-2.12E+3	8.11E+5	3.00E+3	4.24E+3
4-R	4.51E+4	-3.00E+3	-8.34E+4	3.31E+3	3.00E+3	3.70E+5	1.11E+4
12-X	-3.57E+3	-4.24E+3	1.11E+4	-3.57E+3	4.24E+3	1.11E+4	7.14E+3

표 4 강성 변경 후 강성행렬 $\tilde{K}^c_{aa} + K^u_{aa}$

DOF \ DOF	3-X	3-Y	3-R	4-X	4-Y	4-R	12-X
3-X	3.99E+5	2.12E+3	4.51E+4	-3.55E+5	-2.12E+3	4.51E+4	-3.57E+3
3-Y	2.12E+3	9.94E+5	8.26E+3	2.12E+3	-4.49E+3	8.26E+3	-4.24E+3
3-R	4.51E+4	8.26E+3	6.22E+5	4.51E+4	-8.26E+3	-2.72E+4	1.11E+4
4-X	-3.55E+5	2.12E+3	4.51E+4	3.82E+5	-2.12E+3	3.31E+3	-3.57E+3
4-Y	-2.12E+3	-4.49E+3	-8.26E+3	-2.12E+3	8.13E+5	-8.26E+3	4.24E+3
4-R	4.51E+4	8.26E+3	-2.72E+4	3.31E+3	-8.26E+3	4.82E+5	1.11E+4
12-X	-3.57E+3	-4.24E+3	1.11E+4	-3.57E+3	4.24E+3	1.11E+4	7.14E+3

표 5 등가하중벡터와 강성 변경 전후 변위벡터

DOF \ DOF	3-X	3-Y	3-R	4-X	4-Y	4-R	12-X
r_a (kN)	38.46	-1.24	-40.69	16.46	1.24	-36.91	35.09
u_a (mm, rad)	4.46	0.050	-0.0010	4.43	0.05	0.0010	12.58
$\tilde{u}_a$ (mm, rad)	3.20	0.041	-0.0008	3.21	0.05	0.0007	10..38

표 6 강성 변경 전후 부재력 $f^{(i)}$, $\tilde{f}^{(i)}$

E N \ DIR			X	Y	Moment
1	1	$f^{(i)}$	45.28	-40.25	163.97
		$\tilde{f}^{(i)}$	54.16	-40.55	198.42
	3	$f^{(i)}$	-45.28	40.25	62.43
		$\tilde{f}^{(i)}$	-54.16	40.55	72.36
3	3	$f^{(i)}$	9.53	-13.42	-100.73
		$\tilde{f}^{(i)}$	-1.41	-15.92	-121.30
	4	$f^{(i)}$	-9.53	13.42	-100.57
		$\tilde{f}^{(i)}$	1.41	15.92	-117.56

표 7 부재력 변화량과 추가 하중벡터

DOF \ DOF	3-X	3-Y	3-R	4-X	4-Y	4-R	12-X
Δf^c (tonf, rad)	-2.06	-2.20	-10.64	10.94	2.50	-16.99	0
Δr_a (tonf, rad)	22.11	0.83	-20.21	0.26	6.58	-48.55	0

1, 3번 부재로 구성되는 강성변경부분에 대하여 강성 변경 전 강성행렬 K^c와 강성 변경 후 강성행렬 $\tilde{k}^c$는 표 1과 같다.

다음으로 식 18에서 언급된 잔류자유도에 작용하는 단위하중에 대한 강성변경부분의 응력분포계수행렬 R^c_{aa}은 표 2와 같이 계산되었으며, 식 19에 제시된 강성고정부분 부구조물의 강성행렬은 표 3과 같다. 표 4는 표 1의 강성변경

후 강성변경부분 강성행렬과 표 3의 강성고정부분 강성행렬의 합으로 계산된 강성 변경 후 강성행렬을 보여준다.

식 20에 제시된 잔류자유도에 대한 등가하중벡터 r_a와 강성 변경 전 변위벡터 u_a는 표 5와 같으며, 또한 강성 변경 후 평형방정식을 구성하고 등가하중벡터 r_a에 대하여 구한 강성 변경 후 잔류자유도의 변위벡터 $\tilde{u}_a$도 표 5에 함께 제시되었다.

표 6은 강성 변경 전후의 강성변경부재의 부재력 $f^{(i)}$, $\tilde{f}^{(i)}$로서, 강성 변경 후 부재력 $\tilde{f}^{(i)}$은 식 23을 이용하여 변경된 부재강성행렬 $\tilde{K}^{(i)}$와 표 5의 강성 변경 후 변위벡터 $\tilde{u}_a$의 곱으로 계산되었다.

한편 강성고정부분 내 관심 부재인 15번 보의 부재력을 구하기 위해서는 우선 식 24에 의하여 강성변경부재 부재력 변화량 Δf^c, 식 25에 의하여 잔류자유도 단위하중에 대한 강성고정부분 응력분포계수 R^u_{aa}, 식 27에 의하여 강성고정부분에 $-\Delta f^c$를 추가로 작용시키기 위한 잔류자유도 하중벡터 Δr_a를 구하여야 하는데, 표 7과 8에 해당 계산결과가 각각 제시되어 있다.

표 8 강성 고정 부분의 응력분포계수행렬 R^u_{aa}

DOF \ DOF	3-X	3-Y	3-R	4-X	4-Y	4-R	12-X
3-X	3.66E-2	0	-1.01E-1	-3.66E-2	0	1.01E-1	-5.00E-1
3-Y	-4.41E-2	1.44E-4	1.76E-2	-4.41E-2	-1.44E-4	1.76E-2	-6.92E-1
3-R	-3.95E-1	1.08E-3	3.89E-1	-2.66E-1	-1.08E-3	-1.24E-1	8.10E-1
4-X	4.40E-1	0	3.78E-2	5.60E-1	0	-3.78E-2	-1.71E-4
4-Y	-8.16E-2	2.67E-4	3.26E-2	-8.16E-2	1.00E+0	3.26E-2	-1.83E-1
4-R	6.14E-1	-2.00E-3	-2.11E-1	6.10E-1	2.00E-3	7.21E-1	1.37E+0
12-X	0	0	0	0	0	0	1.00E+0

표 9 15번 보의 응력분포계수행렬 $R^{(15)}_{aa}$

Loading \ El. Dof	3-X	3-Y	3-R	4-X	4-Y	4-R	12-X
11-X	1.71E-4	0	-3.21E-4	-1.71E-4	0	3.21E-4	-4.84E-1
11-Y	-1.67E-3	5.46E-6	6.68E-4	-1.67E-3	-5.46E-6	6.68E-4	-1.35E-1
11-R	-1.25E-2	4.09E-5	4.98E-3	-1.26E-2	-4.09E-5	5.04E-3	-9.99E-1
12-X	-1.71E-4	0	3.21E-4	1.71E-4	0	-3.21E-4	4.84E-1
12-Y	1.67E-3	-5.46E-6	-6.68E-4	1.67E-3	5.46E-6	-6.68E-4	1.35E-1
12-X	-1.26E-2	4.09E-5	5.04E-3	-1.25E-2	-4.09E-5	4.98E-3	-1.02E+0

표 10 15번 보의 강성 변경 전후 부재력 $f^{(i)}$, $\tilde{f}^{(i)}$

E.N		DIR	X	Y	Moment
15	11	$f^{(i)}$	5.16	-2.75	-20.55
		$\tilde{f}^{(i)}$	5.17	-2.67	-19.93
	12	$f^{(i)}$	-5.16	2.75	-20.76
		$\tilde{f}^{(i)}$	-5.17	2.67	-20.14

식 28 및 식 29에 의하여 강성고정부분 내 각 부재의 부재력을 재계산하였으며, 그 결과는 SAP200을 이용한 재해석 결과와 동일함을 확인하였다. 표 9는 관심 부재인 15번 보의 응력분포계수이고, 표 10은 강성 변경 전후 15번 부재의 부재력이다.

5. 결 론

본 연구에서는 부분적으로 강성이 변경되거나 부재가 첨삭될 때 전체 구조물을 재해석하지 않고 부분 재해석을 통해 관심있는 변위와 부재력을 실시간으로 재계산할 수 있는 "적응형 부구조물화를 이용한 부분 재해석 (PRAS : Partial Re-Analysis using Adaptable Substructuring)"알고리즘을 제안하였다. 본 알고리즘의 검증을 위하여 제안된 알고리즘 절차에 따른 PRAS 프로그램을 개발하였으며, 동일 구조물을 PRAS 프로그램과 상용 유한요소프로그램인 SAP2000으로 해석하여 두 해석결과가 동일함과 PRAS 알고리즘의 계산 효율을 확인하였다. PRAS 알고리즘의 활용으로 구조물의 목표성능을 달성하기 위하여 실시간으로 해석 결과를 확인해가며 국부적으로 부재 강성을 변경하거나 부재를 첨삭함이 가능하다.

또한 가우스소거법을 이용하는 기존의 부구조물화 기법을 개선하여, 일단 초기 해석이 한번 완료되면 잔류변형도가 바뀌어도 극히 적은 계산향으로 부구조물 강성행렬을 구성할 수 있는 "적응형 부구조물화" 알고리즘도 제안하였고, PRAS 알고리즘 구성에 적용하였다. 적응형 부구조물화 알고리즘은 잔류자유도수가 적고, 여러 형태의 잔류자유도에 대한 부구조물이 필요한 경우 기존 가우스소거법에 비해 획기적으로 계산량을 줄일 수 있는 알고리즘이다.

외력에 대한 부재의 응답 속성을 파악할 수 있는 "부재 응력분포계수"도 정의되어 PRAS 알고리즘에 적용되었다. 응력분포계수는 외력과 부재력, 부재간 부재력, 부재력과 변위간의 상관성을 내포한 부재 속성으로서 PRAS 알고리즘에서는 강성변경부재의 응력 변화에 따른 여타 부재의 응력 변화 계산 등에 사용되었으나, 구조물의 거동 파악이나 하중 전달 경로 파악 등을 위하여 폭넓게 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

본 연구에서 제안된 PRAS 알고리즘, 적응형 부구조물화, 부재 응력분포계수 등은 최적설계, 응력 및 변위 조절, 동적 특성 조절, 구조물 거동 분석 등 대형구조물의 구조설계와 해석 기법 개발에 여러 용도로 활용될 수 있을 것으로 기대되며, 현재 이와 관련한 다방면의 연구가 진행중에 있다.

참 고 문 헌

1. 박효선, 서지현, "부재력 특성을 고려한 설계변수를 사용한 고층건물 변위조절설계법 개발," 한국전산구조공학회 논문집, 제17권 제2호, 2004, pp.215~222
2. 서지현, 박효선, "횡하중과 연직하중을 받는 고층건물의 변위설계를 위한 재분배기법 개발," 한국전산구조공학회 논문집, 제17권 제1호, 2004, pp.49~58
3. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1996, pp.717~718
4. Chan, C.M., "Automatic Optimal Design of Tall Steel Building Frameworks," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol.121, No.5., pp. 838~847
5. Charney, F.A., "The Use of Displacement Participation Factors in the Optimization of Drift Controlled Buildings," Proceedings of 2nd Conference on Tall Buildings in Seismic Regions, 55th Regional Conference, Los Angeles, 1991
6. Leon, S.J., *Linear Algebra with Applications*, Macmillan Publishing Co., New York, 1980
7. Miller, G.R. "Localized Tensor-Based Solvers for Interactive Finite Element Applications Using C++ and Java", *Computers & Structures*, Vol.81, 2003, pp.423~437
8. Rucki M.D., Miller G.R., "An Adaptable Finite Element Modeling Kernel," *Computers & Structures*, Vol.63, No.3, 1998, pp.399~409