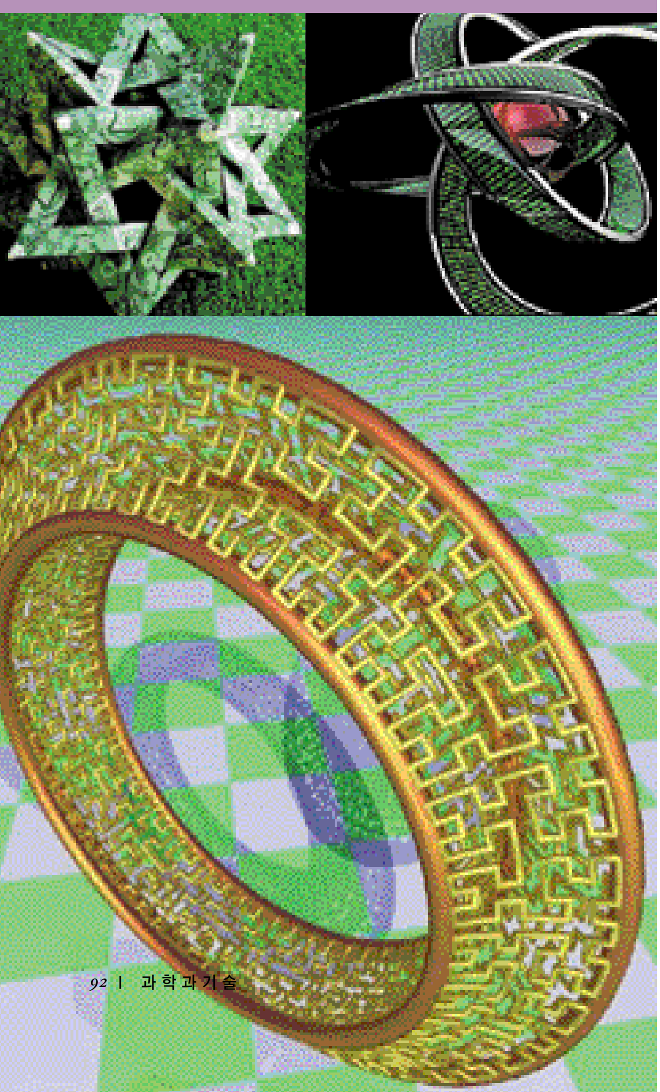
수학이 세상을 바꾼다

글 _ 김도한 서울대학교 수리과학부 교수 dhkim@math.snu.ac.kr

기획연재순서
❶ 21세기의 물리학
❷ 21세기의 화학
❸ 21세기의 생명과학
❹ 21세기의 수학
❺ 21세기의 지질학



현재 수학의 중요한 발전은 어떤 것들인가, 수학은 어디로 가고 있는가 하는 질문은 수학자들에게도 아주 중요한 질문이다. 이 질문은 20세기초에 한 사람의 위대한 수학자에 의해서 정리되었으나 지난 1백년간 수학은 비약적인 발전을 거듭했고 범위도 엄청나게 넓어져 이제는 그것이 불가능하게 되었다. 먼저 20세기 현대 수학의 발전 방향을 제시한 힐버트의 23개 문제와 21세기의 방향을 제시한 클레이 연구소의 7개 문제를 간략히 설명하겠다. 그리고 미국 수학회에서 '우리의 실생활에서 수학이 얼마나 중요하게 쓰이고 있는지' 를 보여주기 위해 수학의 응용에 관하여 정리한 '수학의 순간' 을 간추려 소개함으로써 독자들에게 수학의 중요성을 알려줄 수 있으리라 생각한다.

100만 달러 상금이 걸린 수학 문제

다비트 힐베르트(1862~1943)는 1900년 여름 파리에서 개최되는 제2회 국제 수학자 대회에서 특별 강연을 의뢰하는 초청장을 받았다. 수학의 발전에 개개의 문제들이 매우 중요한 역할을 한다고 생각했던 그는 이 특별 강연에서 앞으로 수학자들이 풀어야 할 중요한 23개의 문제를 발표하는 것으로 20세기 수학의 발전 방향을 제시하였다. 20세기 수학사의 중요한 부분은 이 23개 문제가 어떻게 해결되었는지를 요약하는 것으로 설명이 가능할 정도이다.

이후 100여 년이 지나는 동안 다른 문제들은 모두 풀렸지만 6번과 8번, 16번의 3개 문제는 아직까지도 미해결 상태다. 그 중 '힐베르트의 기본문제 16번' 의 해법 일부를 스웨덴의 한 여대학생이 찾아내어 수학 잡지에 발표할 예정이라는 보도가 작년 말에 있었으나, 오류가 발견되어 해프닝으로 끝났다.

이러한 수학적 전통을 이어 받아 미국의 실업가 L. 클레이가 매사추세츠주 캠브리지에 클레이수학연구소(http: //www.claymath.org)를 세우고, 저명한 수학자 앨런 코너스, 아서 제이프, 앤드루 윌리스(페르마 문제 해결), 에드워드 위튼 등의 조언을 구하여 2000년 5월 24일 가장 어렵다고 생각하는 미해결 수학문제 일곱 개를 골라 각각 100만 달러 씩의 상금을 걸었다. 발표한 도시는 프랑스 파리로 100년 전 힐베르트가 새로운 세기를 위한 23문제를 제시하였던 바로 그 곳이다. 클레이수학연구소는 문제 해결자가 결과를 과학 저널에 발표한 후 2년에 걸친 검증에서 하자가 없어야 문제를 푼 것으로 인정한다고 규정하고 있다. 그 문제들 중 독자들이 흥미를 느낄 만한 내용에 대해서는 클레이연구소의 공식 설명을 번역하여 곁들이기로 한다. (클레이

연구소 홈페이지 참조).

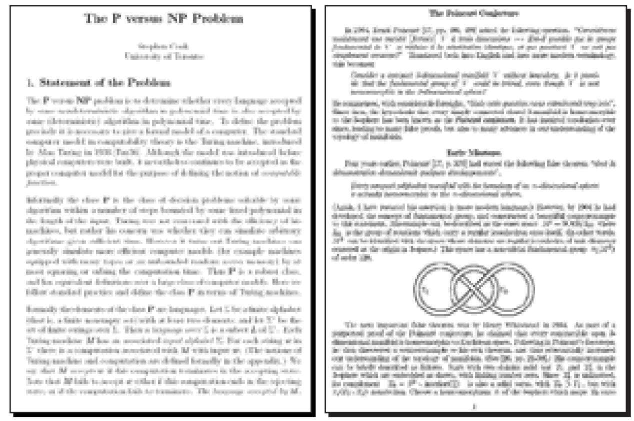
1. 버치(Birch)와 스위너튼 다이너(Swinnerton-Dyer) 예상 : 타원곡선에 관한 문제
2. 하지(Hodge) 예상: 대수적 다양체에 관한 문제
3. 나비어 스토크스(Navier-Stokes) 방정식

수학자와 물리학자들은 나비어-스토크스 방정식의 해를 이해하면 산들바람이나 난기류에 대해 설명하고 예측할 수 있으리라 믿는다. 이 방정식은 19세기에 기술되었으나 아직도 알려진 바는 매우 적다. 문제의 내용은 나비어-스토크스 방정식에 숨겨진 비밀을 풀기 위한 수학이론의 실제적인 발전이다.

4. P 대 NP

이 문제는 일곱 문제 중 가장 이해하기 쉬운 문제라고 말해진다 (그렇다고 풀이가 쉽다는 말은 아니지만). 예를 들어 당신이 대학에서 400명의 학생을 기숙사에 배정한다고 생각해 보자. 기숙사에 수용할 수 있는 학생의 수는 100명으로 제한되어 있다. 또한 책임자는 당신에게 서로 사이가 좋지 않은 학생들의 명단을 넘겨주면서 명단에 적힌 사람들이 함께 기숙사에 들어가지 않도록 하라고 지시했다. 위의 문제가 컴퓨터 과학자들이 NP문제라고 부르는 문제 중 하나이다. 왜냐 하면 이 문제는 당신이 모든 방 배정을 마친 후에 그것이 올바른 배정인지 확인하는 것은 매우 쉽기 때문이다(단순히 책임자가 준 명단과 배정된 학생들의 명단을 비교하면 된다). 그러나 가능한 모든 리스트를 작성하고 그 중에 조건에 맞는 것을 뽑는 방법은 너무나도 어렵고 비실용적이다. 실제로 400명의 학생 중에서 100명을 뽑는 경우의 수는 우주에 알려진 원소의 개수보다도 많다. 인류문명이 아무리 발전해도 앞에서와 같은 단순한 방법으로 문제를 푸는 슈퍼 컴퓨터를 만드는 일은 불가능할 것이다. 어떤 문제의 답이 맞았는지 틀렸는지는 쉽게 확인할 수 있으면서 실제로 풀기에는 불가능하다고 할 정도로 많은 시간이 걸리는 문제가 존재하는가의 여부는 전산과학에서 가장 중요한 문제 중의 하나이다. 위에 언급한 문제가 그러한 문제인 것처럼 보인다. 그러나 그것이 위 문제를 쉽게 풀 수 있는 방법이 있는데 찾지 못하고 있는 것인지 아니면 정말로 없는 것인지는 아직 아무도 증명하지 못했다. P(쉽게 풀리는 문제) 대 NP(쉽게 확인할 수 있는 문제) 이 두 가지가 같은가, 다른가를 보이는 것이 P 대 NP 문제이다.

5. 푸앙카레(Poincaré) 예상

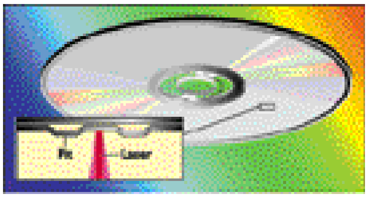


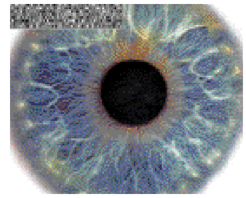
고무줄을 사과와 같은 둥근 물체의 표면 주위로 늘린 후 그것을 사과 아래쪽으로 다시 줄어들게 하면 고무줄을 자르거나 고무줄이 사과의 표면에서 떨어지지 않게 하면서 한 점으로 모을 수 있다. 그러나 같은 고무줄이 도넛을 감고 있다고 생각해보자. 이번에는 고무줄이나 도넛 중 한쪽을 끊지 않는 한 고무줄을 한 점으로 모을 수 없다. 2차원에서는 사과의 표면과 같이 구멍이 없는 경우 '단순 연결'되어 있다고 하고 도넛은 단순 연결되어 있지 않다고 한다. 푸앙카레는 이미 100여년 전에 2차원 구가 모든 단순 연결 구조를 대표한다는 것을 알았고 3차원 구(4차원 공간에서 원점에서의 거리가 1인 점들의 집합)에 대해서도 "단순 연결이고 닫힌 3차원 다양체는 본질적으로 3차원 구인가?"라는 질문을 던졌다. 이 문제는 수학에서 가장 어려운 문제로 알려졌으며 n이 4보다 큰 경우는 스매일, n=4인 경우는 프리드만이 풀어 각각 필즈 상을 받았다.

현재 러시아 수학자인 페렐만이 이 문제를 푼 것으로 보고 세계적으로 저명한 수학자들이 검증하고 있는 중이다. 풀이가 맞으면 그는 클레이 수학연구소가 제시한 100만 달러 상금을 받는 첫 번째 수학자가 된다.

6. 리만(Riemann) 가설

이 문제는 페르마 정리가 풀린 이후 수학자들이 가장 많은 관심을 갖는 문제이다. 2, 3, 5, 7 같이 1을 제외한 보다 작은 두 수의 곱으로 쓸 수 없는 소수(prime numbers)는 순수 수학과 응용 수학 양쪽 모두에서 중요한 역할을 한다. 이러한 소수들은 자연수 안에서 규칙적으로 분포되어 있지 않다. 그러나 독일의 수학자 리만은 소수가 나타나는 빈도가 리만 제타 함수ζ(s) 라고 불리




는 정교하게 만들어진 함수와 연관되어 있음을 발견했다. 리만 가설은 방정식 $\zeta(s) = 0$의 해는 잘 알려진 음의 정수인 실근을 제외하면 모두 실수부가 1/2인 하나의 직선 위에 있다는 것이다. 이 가설은 처음 1억5천만개의 해에 대해서는 '참'으로 확인되었다. 이것이 참이라는 증명은 소수의 분포에 관련된 수많은 의문을 해결하는데 중요한 역할을 한다.

7. 양-밀스(Yang-Mills) 이론: 수리물리학에 관한 문제

광활한 수학의 응용

미국 수학회(http://www.ams.org/mathmoments)는 자연과학, 자연현상, 공학, 문화 등 다양한 분야에서 수학이 어떻게 응용되고 있으며, 미래를 어떻게 열어갈 것인가를 다음과 같이 설명하고 있다.

■ 계산의 혁명(Revolutionizing Computing)

20년 안에 컴퓨터 칩은 훨씬 더 작아져서 양자역학이 현재 우리가 받아들이고 있는 물리 법칙들을 대신하게 될 것이다. 오늘날의 계산이 상태 0이거나 또는 상태 1인 비트에 기초한다면 양자계산은 동시에 상태 0과 상태 1일 수도 있는 양자비트(quantum bit, qubit)에 기초한다. 이상한 세계인 양자계산에서는 많은 단계의 작업을 동시에 수행할 수 있게 됨으로써 큰 수의 인수분해와 같은 복잡한 과정을 보다 빠르게 처리할 수 있다. 이 분야를 연구하는 수학자, 물리학자, 전산과학자, 공학자들의 목표는 현재 가장 강력한 컴퓨터를 이용해서도 10억년 이상 걸리는 문제를 단 수초 만에 풀 수 있는 양자 컴퓨터를 만드는 것이다.

■ 음악 듣기(Listening to Music)

모차르트에서 가요에 이르기까지 음악이나 데이터가 아무리 복잡한 것이라도 디스크에 오직 0과 1만을 이용해서 저장할 수 있다. 이를 위해서는 각각의 음악의 재생 과정에 고등 및 초등 수학의 여러 분야가 모두 쓰인다.

원래의 소리 신호는 섀논의 샘플링 정리에 의하여 신호처리된다. 각 신호의 크기는 0과 1의 16(요즈음은 24) bit 열로 저장되고 먼지와 금이 가서 못 읽게 되는 부분은 에러 정정 부호 기법에 의하여 교정된다. 끝으로 CD의 데이터를 가운데에서 가장자리로 옮기면서 레이저로 데이터를 읽을 때 미적분을 사용하여 읽는 속도가 일정하도록 모터가 움직여야 한다.

■ DNA 해독(Deciphering DNA)

정원용 호스를 사용해본 사람들이면 누구나 엉뚱한 곳에 매듭이 생기는 것을 경험한다. 과학자들은 우리가 일상적으로 경험하고 부딪치는 여러 문제들이 매듭이론으로 설명될 수 있다는 것을 발견했다. 예를 들어 DNA가 어떻게 작용하고 자신을 복제하는지를 이해하는데 수학이 매우 중요한 역할을 한다.

어떤 효소는 DNA의 가닥을 한 점에서 끊고 다른 가닥의 부분을 공백을 통하여 통과하게 하고 잘라진 부분을 봉한다. 이러한 복잡한 조작은 매듭 이론의 중심이 되는 문제로 DNA 복구 작업과 유전자 조절 · 조작 등을 포함한 여러 과정에서 매우 중요하다.

■ 안구를 이용한 신원확인(Eye-dentifying Yourself)

현금 지급기를 사용할 때 자신의 신원이 확인되는 홍채 인식 기술은 우리를 비밀번호가 없는 세상에서 살 수 있게 해줄 것이다. 홍채 인식을 통한 신원확인은 무늬인식기술, 웨이블렛, 통계에 기초를 둔다. 앞의 두 가지 분야는 사람의 홍채를 0과 1의 조합으로 표현하고 통계는 스캔된 홍채가 본인의 것인지 확인하는데 쓰인다.

■ 현명하게 입찰하기(Bidding Wisely)

가장 높은 가격을 부른 사람에게 낙찰되는 누구에게나 익숙한 기본적인 경매 형태는 수많은 경매의 방법 중 하나일 뿐이다. 예를 들어 '두 번째 가격 경매'라는 경매에서는 제일 높은 가격을 부른 사람이 '두 번째로 높은 가격을 부른 사람이 부른 값'을 지불한다(이 방법은 판매자에게 불리한 것처럼 보이지만 실제로는 더욱 공격적으로 값을 부르게 되어 그다지 불리하지 않다). 이런

방법과 다른 경매의 방법들은 수학적 모형화, 게임이론, 조합론, 정수 계획법, 최적화문제 등을 이용해서 연구한다. 이러한 연구자들이 공통적으로 도달하는 궁극적인 결론은 경험이 없는 경매 참가자는 항상 너무 많은 값을 부른다는 것이다.

■ **시장에서 투자하기**(Investing in Markets)

지난 20년간 경제를 주도한 파생상품(derivative)와 같은 새롭고 복잡한 금융 도구가 생겨났다. 금융 파생 상품은 그 가치가 다른 물건의 가치로부터 생기는 수학적 도구이다. 어떤 사람들은 이 파생상품을 위험한 것으로 보나 그 목적은 위험을 다른 사람과 같이 부담하여 줄이는 데에 있다.

■ **항공기 설계**(Designing Aircraft)

공기 또는 물의 흐름은 100년이 넘게 연구되어 왔으나 최근에 와서야 수학자들은 공기역학의 중요한 부분인 난기류의 복잡한 현상에 대해 이해하기 시작했다. 수학과 현대 컴퓨터를 이용함으로써 항공학 디자인에서 풍동은 거의 쓰이지 않게 되었다.

■ **지문 저장**(Storing Fingerprints)

수백만 개의 디지털화된 지문을 저장하고 대조하는 것은 상상할 수 없이 엄청난 양의 일이다. 압축되지 않은 FBI의 지문 자료는 200 테라바이트(200조 바이트)의 용량이다. 새로운 수학의 분야인 웨이블렛은 자료의 압축을 빠르고 일정하게 만들어서 비용을 절감시켜준다.

■ **심장 실험**(Experimenting with the Heart)

사람의 심장을 이용한 실험은 불가능하다. 그러나 정확한 수학적인 모형을 이용한 인간 심장에 대한 실험은 심장의 복잡한 기능을 이해하는데 도움이 된다. 수학과 컴퓨터는 실험실에서의 실험을 대체하고 있다. 예를 들어 수학적으로 얻은 결과가 인공 밸브의 완성과 디자인의 실현시기를 앞당겼다.

■ **일기 예보**(Forecasting Weather)

날씨를 예측하는 것은 막대한 양의 자료와 계산을 요구한다. 날씨의 정확한 모형을 알기 위해서는 각기 다른 지역과 고도에서의 기온과 습도, 기압과 풍속을 알아야 한다. 비록 부정확했던 예보가 기억에 남긴 하지만 최근의 3일에서 7일간의 예보는 20년 전의 36시간 예보보다 더 정확하다. 계산능력의 향상은 일기 예보의 정확성을 높이는데 도움을 주지만 정확성을 높여주는 모형 뒤에는 수학이 있다.

■ **인터넷 보안**(Securing Internet Communication)

수학적인 암호화가 없다면 인터넷을 이용해서 사업을 하거나 공과금을 납부하거나 물건을 사는 일은 불가능하다. 지난 25년간 만들어진 현대의 암호화 기술은 비록 수세기 전의 대수 이론에 기초하고 있으나 훨씬 더 정교해졌다.

■ **교통문제 해결**(Beating Traffic)

당신이 느끼기에만 그런 것이 아니라 실제로 지난 30년간 자동차들의 총 이동 거리는 두 배로 증가한 반면 도로 공간은 6%밖에 증가하지 않았을 정도로 교통문제는 심각해지고 있다. 새로운 도로의 증설도 이 문제의 해결을 보장하지는 않는다. 직관에 반하는 결과이지만 교통 과학에서는 새로운 도로가 오히려 네트워크에서의 밀집을 증가시킨다. queuing 이론과 편미분방정식과 같은 수학 분야가 후진 전파 파동인 교통흐름을 이해하는 데 기여한다.

■ **휴대전화**(Cutting the Cord)

우리가 사용하는 휴대전화는 너무나 작아서 그 안에서 많은 일들이 처리되고 있다는 사실을 느끼지 못한다. 디지털 전화기에서 당신의 목소리는 0과 1의 조합으로 변환되어지고 기지국으로 보내지고 받는 쪽 전화에서 다시 받아서 원래의 소리로 재변환된다. 당신의 말을 전송할 때 당신의 전화기는 식별코드를 전송하고 가장 가까운 기지국을 찾는다. 핸드오프 알고리듬은 전화기의 위치가 변해도 연속적인 통화가 가능하게 한다.

■ **프랙탈을 통해 세상보기**

(Seeing the World Through Fractals)

프랙탈은 컴퓨터 그래픽과 모의실험을 보다 사실적으로 만들어주는 자기 닮은(self-similar) 수학적 물체이다. 프랙탈의 자기 닮은 성질은 양치류나 해안선의 성질과 비슷하다. 연속적인 확대는 원본과 닮은 이미지를 만들어낸다.

이 밖에 만화영화, 결정 키우기, 상품 트래킹, 더 좋은 렌즈 만들기, 뇌를 2차원에 그리기, DNA 칩, 로봇, 스케줄 짜기, 세포의 신비 풀기 등 여러 분야에서 보통 사람들이 모르는 사이에 수학이 쓰이고 있다. 앞으로 21세기에는 IT, BT, NT 등 첨단 과학과 기술 분야에서 수학의 비중이 더 커질 것이다.

글쓴이는 서울대 공대 전자공학과, 대학원 수학과를 졸업하고 미국 럿거즈 대학에서 수학박사 학위를 받았다. 1982년부터 서울대 교수로 재직중이며 현재 수리과학부장직을 맡고 있다.