

케이블에 의하여 매달려 있는 현수교 방정식의 발견과 연구의 흐름*

인하대학교 수학과 남혜원
hwnam@hanmail.net

인하대학교 수학교육과 최규홍
qheung@inha.ac.kr

현수교 방정식은 비선형 동역학 시스템 중 점프가 일어나는 비선형 부분을 갖는 대표적인 예이다. 터코마 내로스(Tacoma Narrows) 현수교의 붕괴 이후 현수교 유사한 조건에 대한 연구 및 현수교의 안정성에 대한 연구가 활발히 진행되었다. 이 논문에서는 현수교 방정식의 모델링과 해의 존재성 및 다중성 연구에 대하여 조사하였다.

주제어: 비선형 동역학 시스템, 현수교 방정식, 해의 존재성, 고리 이론

0. 서론

공학적 현상에 대한 모델링 중에서 점프가 일어나는 비선형 부분을 갖는 모델의 동역학 시스템(nonlinear dynamical system)은 아직 명확하게 설명되지 못한 부분이 많다. 비선형 도약이 발생하게 되면, 편미분 방정식의 연구에 예기치 않은 결과가 생기는데 이에 따라 시스템은 여러 개의 해를 가지게 된다. 이런 비선형 동역학 시스템의 비선형 도약을 가진 한 예가 현수교이다.

1940년 11월 7일 워싱턴 주에서 시속 42마일의 강풍에 의하여 터코마 내로스(Tacoma Narrow) 현수교가 붕괴되는 사건이 발생하였다[2]. 이러한 예기치 못한 큰 진동에 의하여 다리가 붕괴된 후, 원인을 규명하고 비교적 큰 주기적 외력에도 안전한 설계 요소를 찾는 연구가 필요하게 되었다.

터코마 내로스 현수교와 같은 일반적인 현수교는 케이블에 의하여 지지된다. 케이블에 의하여 매달려 있는 현수교는 하방 운동에 반발하고 상방 운동에는 영향을 미치지 않는다. 이런 현수교의 운동이 편미분 방정식에서 비선형 항을 생성하게 된다. 본

* 이 논문은 인하대학교 교수연구진흥비에 의하여 지원되었음.

논문은 연구에 필요한 현수교 방정식을 유도하고, 적절한 조건 하에서 현수교에 미치는 외력 변화에 따른 방정식의 해의 존재성과 다중성에 관하여 서술한다.

1. 위상적 방법에 의한 접근

자연 과학 분야와 사회 과학 분야의 비선형 편미분 방정식은 다양한 비선형 항을 포함한다. 이 편미분 방정식은 변분법(calculus of variations)에 의하여 범함수(functional)의 특이점을 구하는 문제(Euler-Lagrange 방정식)로 변형된다. 초기 변분법의 주된 방향은 안정된 특이점인 극대와 극소를 구하는 것이었으며, 이후 불안정한 특이점인 안장점(Saddle point)의 존재가 발견되었다. 특이점을 찾는 방법은 Morse index와 minimax를 이용하는 두 가지 위상적 방법(Topological method)으로 분류된다.

본 논문에서는 극대극소(minimax) 정리를 사용한다. 극대극소 정리는 Ljusternik & Shnirelman [16]가 안장점의 존재성을 증명하면서 제시한 방법으로, 특이점을 구하는 효과적인 방법으로 평가된다. 극대극소를 적용한 정리로서는 mountain pass, 안장점, 고리 이론(linking), limit relative category 정리 등이 있다. mountain pass 정리는 Ambrosetti & Rabinowitz [3]에 의하여 증명되었으며, saddle point 정리는 Ahmad & Lazer & Paul [1]과 Castro & Lazer [4]에 의해 연구되었다. linking 정리는 Rabinowitz [10]에 의해 증명되었으며, Felmer [9]와 Figueiredo & Felmer [11]는 Hamiltonian system과 elliptic system의 주기해 연구에 이를 응용하였다. 또한 Marino & Micheletti & Pistoia [17]는 반선형(semilinear) 문제에 응용하였다. Fournier & Lupò & Ramos & Willem [12]은 limit relative category의 개념을 특이점 정리에 적용하였다. Micheletti & Saccon [19]는 고리 이론과 limit relative category를 적용하여 floating beam 방정식의 해의 다중성을 증명하였다.

2. 현수교 방정식의 모델링

현수교는 양단이 지지된 출렁이는 일차원 단순보(beam)의 진동에 의해 모델링한다. 현수교의 특성상 보의 폭과 두께는 전장과 비교하면 무시할 수 있을 수치이므로 전장만을 고려하여 일차원 단순지지 보(a simply supported one-dimensional beam)로 간주하여도 무방하다.

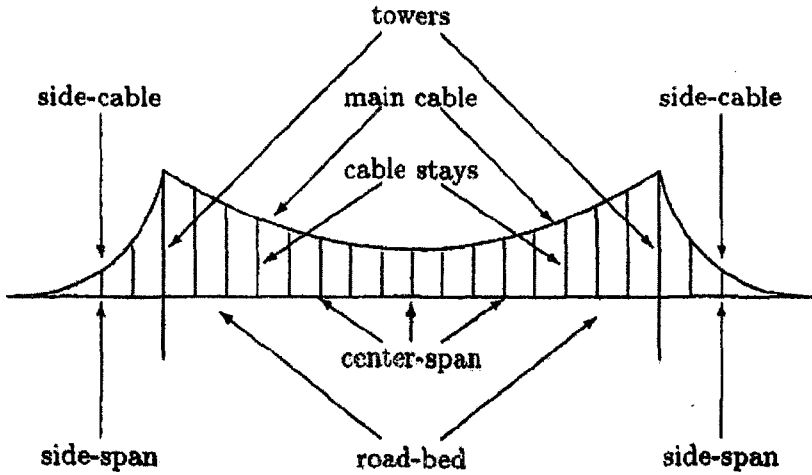


그림 1. 일차원 현수교의 모델링에 사용된 주요 구성 요소

양단이 지지된 출렁이는 일차원 단순보(beam)는 바람으로 인한 외부의 주기적인 힘과 중력 및 중력의 반대 방향으로 작용하는 cable stay의 복원력의 영향을 받는다. 이러한 stay들에 의해 지지된 구조물은 강체(a solid and immovable object)로 간주할 수 있다.

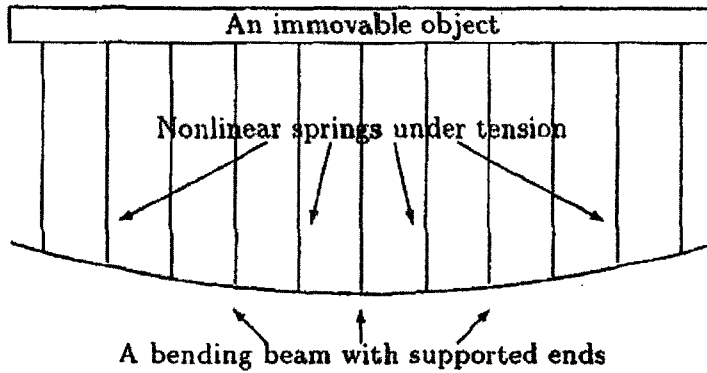


그림 2. 현수교의 단순 모델

보의 변위 $u(x, t)$ 는 다음과 같은 비선형 편미분 방정식 (1)과 경계 조건 (2)로 주어진다.

$$(1) \quad m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + b^* \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -xu^+(x, t) + W(x) + \varepsilon f^*(x, t)$$

$$(2) \quad \begin{aligned} u(0, t) = u(L, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0, \\ u(x, t+2\pi) = u(x, t), \quad -\infty < t < \infty, \quad x \in (0, L) \end{aligned}$$

방정식에서 사용된 변수는 다음과 같다.

- m : 보의 단위 길이당 질량
- E : Young의 계수
- I : 단면의 관성 모멘트
- b^* : 감쇄계수
- x : cable의 강성계수
- W : 보의 단위 길이당 무게
- ϵf^* : 바람으로 인한 외부의 주기적인 힘
- L : 보의 center span의 길이

식 (1)과 경계 조건 (2)는 양단이 지지된 길이가 L 인 일차원 단순보(beam)의 진동을 묘사한다. 점 x 와 시간 t 에서의 변위 $u(x, t)$ 는 아래 방향으로 측량되었다. 방정식의 첫 번째 항은 관성력을 표현하며 두 번째 항은 탄성력이고 좌변의 마지막 항은 유체 감쇄를 나타낸다. 우변은 중력의 반대방향으로 작용하는 cable stay의 복원력, 중력, 그리고 바람으로 인한 외부의 주기적인 힘을 나타낸다. cable stay는 척력은 작용하지 않고 인력만 작용하는, 후크(Hooke)의 법칙을 따르는 편방향 용수철이다. 따라서 cable stay의 복원력은 xu^+ 에 의하여 표현되며, 이때 $u^+ = \max\{0, u\}$ 이다. 본 논문에서는 회전관성력은 고려하지 않는다.

위의 모델링은 Lazer & McKenna [14]에 의해 소개되었으며, 현수교 연구의 시발점으로 많은 학자들에 의하여 인용된다. 이는 현수교의 정확한 진동을 묘사하지는 못하지만, 단순화된 형태는 실제와 유사한 모습을 보여준다.

변수 x 의 배수를 치환하고 질량 m 으로 나누므로 방정식의 표현을 다음과 같이 단순화시키는 것이 유용하다.

$$(3) \quad \begin{aligned} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + \beta u_t + xu^+ = W(x) + \epsilon f^*(x, t), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0, \\ u(x, t+2\pi) = u(x, t), \quad -\infty < t < \infty, \quad x \in (0, \pi) \end{aligned}$$

여기서 $\alpha^2 = \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \neq 0$ 이고 $\beta = \frac{b^*}{m} > 0$ 이며 나머지 기호는 동일하게 사용한다.

3. 현수교 방정식의 연구에 대한 진행 상황

지금까지 현수교 방정식의 연구는 크게 세 가지 방향으로 진행되어 왔다.

첫 번째 방향은 편미분 방정식을 상미분 방정식으로 변환하기 위한 분포 하중과 외력항의 단순화에 대한 연구와, 완전한 동역학 구조임을 보이기 위해 적용될 수 있는 동역학 시스템에 대해 연구하는 것이다[8].

두 번째 방향은 비선형 함수 해석을 적용하여 편미분 방정식의 해의 존재성을 증명하는 연구이다. McKenna & Walter[18], 최규홍 & 정택선 & McKenna[5], Humphreys[13], 최규홍 & 정택선[6]는 무한 차원의 Hilbert 공간에서 해의 존재성을 연구하였다.

마지막 방향은 현수교 방정식의 해를 수치적 방법으로 구하는 연구이다. McKenna & Walter는 “hit or miss” 방법을 적용하여 주기해를 구하였으며[15], Choi & Jen & McKenna는 continuation 방법에 의하여 해를 구하였다[7].

본 논문은 현수교 방정식의 감쇄항인 βu_t 가 0일 경우, 방정식의 해의 다중성과 source term의 관계에 대하여 연구한다. source term f 가 고유함수들로 생성된 3차원 부분공간에 속할 때, 특이점 정리를 이용하여 현수교 방정식의 해의 다중성과 source term의 관계를 연구한다. source term $f = (u^+)^2 - (u^-)^3$ 일 때, linking 정리와 limit relative category 정리를 이용하여 Hilbert 공간에서 정의된 범함수의 특이점을 찾으므로 현수교 방정식의 해의 존재성을 증명한다.

4. 존재성 및 다중성에 관한 연구

구조물에 미치는 외력에 비하여 공기에 의한 감쇄는 매우 작으므로 감쇄항인 βu_t 는 0이라고 가정한다. 변수의 치환을 통해 식 (3)은 다음 식 (4)로 변형된다.

$$(4) \quad \begin{aligned} u_{tt} + u_{xxxx} + bu^+ &= f \quad \text{in } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \mathbb{R} \\ u\left(\pm \frac{\pi}{2}, t\right) &= u_{xx}\left(\pm \frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \end{aligned}$$

여기서, f 는 x 와 t 에 대하여 우함수(even)이고 주기가 π 인 주기함수이다.

현수교 방정식에 대응하는 고유함수 ϕ_{mn} 들은 Hilbert 공간의 직교기(orthogonal basis)이다. 이 논문은 $3 < b < 15$ 이고 source term f 가 ϕ_{00} , ϕ_{10} 와 ϕ_{20} 에 의해 생성된 3차원 부분공간 V 에 속할 때, 현수교 방정식의 해의 다중성과 source term의 관계를 연구한다.

현수교 방정식 (4)는 다음 두 개의 방정식 (5) 및 (6)과 동치이다.

$$(5) \quad w_{tt} + w_{xxxx} + (I - P)(b(v + w)^+) = 0$$

$$(6) \quad v_{tt} + v_{xxxx} + P(b(v + w)^+) = s_1 \phi_{00} + s_2 \phi_{10} + s_3 \phi_{20}$$

여기서 P 는 Hilbert 공간 H 에 대한 V 위로의 사영이다. 임의의 $v \in V$ 에 대하여 식 (5)는 v 에만 의존하는 유일해를 가지므로 방정식 (4)에 대한 연구는 식 (6)에 대한 연구로 귀결된다. 식 (6)에 대응하는 map $\Phi: V \rightarrow V$ 를 정의하고, V 를 다음과 같이 서로소인 네 개의 부분집합으로 분류한다.

$$C_1 = \{v = c_1 \phi_{00} + c_2 \phi_{10} + c_3 \phi_{20} \mid c_1 \geq 0, v = c_1 \phi_{00} + c_2 \phi_{10} + c_3 \phi_{20} \geq 0\}$$

$$C_2 = \{v = c_1 \phi_{00} + c_2 \phi_{10} + c_3 \phi_{20} \mid c_2 \geq 0, v \notin (\text{Int} C_1) \cup (\text{Int} C_3)\}$$

$$C_3 = \{v = c_1 \phi_{00} + c_2 \phi_{10} + c_3 \phi_{20} \mid c_1 \leq 0, v = c_1 \phi_{00} + c_2 \phi_{10} + c_3 \phi_{20} \leq 0\}$$

$$C_4 = \{v = c_1 \phi_{00} + c_2 \phi_{10} + c_3 \phi_{20} \mid c_2 \leq 0, v \notin (\text{Int} C_1) \cup (\text{Int} C_3)\}$$

ϕ_{00} 와 ϕ_{10} 에 의해 생성된 V 의 부분공간에 대한 Φ 의 제한(restriction)의 성질을 이용하여 Φ 에 의한 C_i 의 치역을 얻는다. 특이점 정리를 이용하여, $s_2 = s_3 = 0$ 이고 $s_1 > 0$ 인 경우에 현수교 방정식 (4)는 양의 해와 적어도 하나의 sign-changing 해를 가짐을 증명한다. 마지막으로 degree 정리를 이용하여 다음과 같은 정리를 증명한다.

정리 1. $3 < b < 15$ 인 경우, V 에서 cone R_1 , R_2' , R_3 과 R_4' 이 존재하여 다음을 만족한다.

(1) $f \in \text{Int} R_1$ 이면 방정식 (4)는 양의 해와 적어도 두 개의 sign-changing 해를 갖는다.

(2) $f \in \partial R_1$ 이면 방정식 (4)는 양의 해와 적어도 하나의 sign-changing 해를 갖는다.

다.

(3) $f \in \text{Int}R_i'$ ($i=2, 4$)이면 방정식 (4)는 적어도 하나의 sign-changing 해를 갖는다.

(4) $f \in \text{Int}R_3$ 이면 방정식 (4)는 음의 해만 갖는다.

(5) $f \in \partial R_3$ 이면 방정식 (4)는 음의 해를 갖는다.

또 계수 b 가 양의 상수이고 source term $f=(u^+)^2-(u^-)^3$ 일 때, Hilbert 공간 H 에서 정의된 범함수의 특이점을 찾으므로 현수교 방정식 (4)의 해의 존재성을 증명한다.

음의 고유치를 Λ_i^- 로, 양의 고유치를 Λ_i^+ 로 놓고 대응하는 고유함수를 각각 e_i^- 와 e_i^+ 로 나타낸다. 범함수 I_b 는 다음과 같이 정의한다.

$$I_b(u) = \frac{1}{2} \|P^+ u\|^2 - \frac{1}{2} \|P^- u\|^2 + \frac{b}{2} \| [Au]^+ \|^2 - \int_{\Omega} F(Au) dx$$

여기서 $A=R+S$, $S(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^- e_i^-}{\sqrt{-\Lambda_i^-}}$, $R(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^+ e_i^+}{\sqrt{-\Lambda_i^+}}$, $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$

이다. 이때 범함수 I_b 의 도함수는 다음과 같다.

$$\nabla I_b(u) = P^+ u - P^- u + bA(Au)^+ - Af(Au)$$

그리고 I_b 는 $(P.S.)_{\gamma}^*$ 조건을 만족한다. $\nabla I_b(u)=0$ 이면 $w=(R+S)(u)$ 는 현수교 방정식의 약한(weak) 해이다. 공간 H 의 적절한 분해에 따라 두 개의 Linking 부등식을 증명한다. 또한 Limit relative category 정리를 적용하여 다음과 같은 결과를 증명한다.

정리 2. $f=(u^+)^2-(u^-)^3$ 일 때,

(1) $\Lambda_1^- < -b < 0$ 이면 방정식 (4)는 적어도 하나의 비자명해를 갖는다.

(2) $\Lambda_i^- < -b < \Lambda_{i-1}^- (i \geq 2)$ 이면 방정식 (4)는 적어도 세 개의 비자명해를 갖는다.

5. 연구 과제

현수교에서 진동을 기술한 새로운 모델이 Lazer & McKenna에 의하여 발전되었다 [15]. Lazer & McKenna에 의하여 제시된 새로운 모델은 연립 비선형 편미분 방정식으로 서술되었다. 본 논문의 향후 연구 방향은 연립 비선형 편미분 방정식에 linking 정리와 limit relative category 정리를 적용하여 해의 존재성 및 다중성과 외부력과의 관계를 연구하는 것이다.

참고 문헌

1. Ahmad, S. · Lazer, A.C. · Paul, J.L., "Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problems at resonance," *Indiana Univ. Math. J.* 25(1976), 933-944.
2. Amann, O.H. · T. Von Karman · Woodruff, G.B., *The Failure of the Tacoma Narrows Bridge*, Federal Works Agency, Washington DC, 1941.
3. Ambrosetti, A. · Rabinowitz, P.H., "Dual variational methods in critical point theory and applications," *J. Funct. Anal.* 14(1973), 349-381.
4. Castro, A. · Lazer, A.C., "Applications of a maximin principle," *Rev. Colombiana Mat.* 10(1976), 141-149.
5. Choi, Q.H. · Jung, T. · McKenna, P.J., "The study of a nonlinear suspension bridge equation by a variational reduction method," *Appl. Anal.* 50(1993), 71-90.
6. Choi, Q.H. · Jung, T., "A nonlinear suspension bridge equation with nonconstant load," *Nonlinear Analysis* 35(1999), 649-668.
7. Choi, Y.S. · Jen, K.C. · McKenna, P.J., "The structures of the solution set for periodic oscillations in a suspension bridge model," *IMA J. Appl. Math.* 47(1991), 283-306.
8. Doole, S.H. · Hogan, S.J., "Piecewise linear suspension bridge model: nonlinear dynamics and orbit continuation," *Dynam. Stability Systems* 11(1996), no. 1, 19-47.
9. Felmer, P., "Periodic solutions of superquadratic Hamiltonian systems," *J. Differential Equations* 102(1993), 188-207.
10. D.G. de Figueiredo, "On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem," *Nonlinear Anal. T.M.A.* 8(4) (1984), 655-665.
11. D.G. de Figueiredo · Felmer, P.L., "On superquadratic elliptic systems," *Trans.*

- Am. Math. Soc.* 343(1994), 99-116.
12. Fournier, G. · Lupo, D. · Ramos, M. · Willem, M., "Limit relative category and critical point theory," *Dynam. Report.* 3(1993), 1-23.
 13. Humphreys, L., "Numerical and theoretical results on large amplitude periodic solutions of a suspension bridge equation," *Ph.D. thesis, University of connecticut*(1994).
 14. Lazer, A.C. · McKenna P.J., "Large scale oscillatory behaviour in loaded asymmetric systems," *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 4(1987) no. 3, 243-274.
 15. Lazer, A.C. · McKenna P.J., "Large amplitude periodic oscillations in suspension bridges: Some new connections with nonlinear analysis," *SIAM Rev.* 32(1990), 537-578.
 16. Ljusternik, L. · Schirelmann, L., *Methodes topologique dans les problèmes variationnels*, Jermann and Cie, Paris, 1934.
 17. Marino, A. · Micheletti, A.M. · Pistoia, A., "Some variational results on semilinear problems with asymptotically nonsymmetric behaviour," *Nonlinear Analysis "A tribute in honour of G.Prodi"*, S.N.S. Pisa, 1991, 243-256.
 18. McKenna, P.J. · Walter, W., "Nonlinear oscillations in a suspension bridge," *Arch. Rational Mech. Anal.* 98(1987), 167-177.
 19. Micheletti, A.M. · Saccon, C., "Multiple nontrivial solutions for a floating beam via critical point theory," *J. Differential Equations* 170(2001), 157-179.

The Bridge Suspended by Cables and the History of Investigation of the Equation Induced from It

Dept. of Mathematics, Inha Univ. **Hyewon Nam**

Dept. of Mathematics Edu., Inha Univ. **Q-Heung Choi**

A suspension bridge is an example of a nonlinear dynamical system, especially systems with the so called jumping nonlinearity. The fact that we deal with a serious and topical problem is demonstrated for example by the collapse of the Tacoma Narrow suspension bridge. So it would be very contributive to determine under what conditions a similar situation cannot occur and find out safe parameters of the bridge construction. In this paper, we show various possibilities how to model the behaviour of suspension bridge. Then we introduce our own results concerning existence and uniqueness of time-periodic solutions.

Key words : Nonlinear Dynamical System, Suspension Bridge Equation, Linking Theory.

2000 Mathematics Subject Classification : 35B10, 35B30, 35M10.

논문 접수 : 2005년 3월 14일,

심사 완료 : 2005년 4월