

< 논문 >

노이즈 필터링을 적용한 반응표면 기반 순차적 근사 최적화

이용빈* · 이호준** · 김민수*** · 최동훈†

(2004년 11월 19일 접수, 2005년 3월 23일 심사완료)

Sequential Approximate Optimization Based on a Pure Quadratic Response Surface Method with Noise Filtering

Yongbin Lee, Ho-Jun Lee, Min-Soo Kim and Dong-Hoon Choi

Key Words : Response Surface Method (반응표면법), Sequential Approximate Optimization (순차적 근사 최적설계), Trust Region Algorithm (신뢰영역 알고리즘)

Abstract

In this paper, a new method for constrained optimization of noisy functions is proposed. In approximate optimization using response surface methods, if constraints have severe noise, the approximate feasible region defined by approximate constraints is apt to include some of the infeasible region defined by actual constraints. This can cause the approximate optimum to converge into the infeasible region. In the proposed method, the approximate optimization is performed with the approximate constraints shifted by their deviations, which are calculated using a diagonal quadratic response surface method. This can prevent the approximate optimum from converging into the infeasible region. To fit the objective and constraints into diagonal quadratic models, we select the center and 4 additional points along each axis of design variables as experimental points. The deviation of each function is calculated using the differences between the real and approximate function values at the experimental points. A sequential approximate optimization technique based on the trust region algorithm is adopted to manage approximate models. The proposed approach is validated by solving some design problems. The results of the problems show the effectiveness of the proposed method.

1. 서 론

도함수에 기반한 기존의 최적설계 방법들은 함수가 매끈한 곡선의 형태를 가지는 문제의 경우에는 도함수값을 명시적으로 알고 있지 않더라도 유한차분법등을 활용하여 최적화를 수행할 수 있다. 그러나 실제 문제들의 많은 경우 컴퓨터에 의한

수치해석시 발생하는 자름오차(Truncation Error) 및 버림오차(Round-off Error), 또는 실험시 발생하는 확률적 오차(Stochastic Error) 등에 의하여 함수에 노이즈(Noise)가 발생한다. 이러한 경우 함수의 전반적인 형태가 매끈한 모양을 가지고 있다 하더라도, 어떠한 점 x 주위의 작은 변위 δx 에 대한 함수 값은 그 함수의 일반적인 경향을 나타내는 것이 아닌 노이즈에 의한 영향을 포함하게 되어 유한차분법에 의한 도함수의 계산은 신뢰할 수 없게 된다. 따라서 이러한 경우 유한차분법을 이용한 최적화는 사실상 불가능 하게 된다.

노이즈가 있는 함수의 최적화를 위하여 여러 가지 방법들이 제안되어 왔는데, 그 중 하나는 Nelder와 Mead(1965)가 제안한 심플렉스 방법

† 책임저자, 회원, 한양대학교,
최적설계기술연구소
E-mail : dhchoi@hanyang.ac.kr
TEL: (02)2290-0443, FAX: (02)2269-1710

* 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 국방과학연구소

*** 국민대학교

(Simplex Method)이다.⁽¹⁾ 이 방법은 함수 f 에 대하여 근사화를 하지 않고 실제 함수 값들을 직접 비교하는 것으로 함수의 연속성에 대한 가정 없이 어느 문제에도 적용된다. 심플렉스 방법은 Nocedal과 Powell에 의하여 노이즈 함수의 최적화를 위한 방법으로 추천되기도 하였다.^(2,3)

다른 방법으로 함수의 일정한 전개식(Expansion)으로부터 노이즈 요소들을 여과하는 방법이 있다. 이러한 방법은 여과방법(Filtering Algorithm)이라 불려지는데, 함수가 낮은 진폭과 높은 주파수의 노이즈를 가지고 있는 경우, 실제함수의 일정한 전개식에서 Fourier 변환 등을 이용하여 노이즈 요소들을 여과하는 방법이다. 이렇게 형성된 함수는 실제함수의 전반적인 경향을 잘 나타낼 뿐 아니라, 노이즈가 없는 매끈한 형태를 가지게 되기 때문에 도함수에 기반한 최적화 방법들에 적용하는 것이 용이하다.⁽⁴⁾

또 다른 방법으로는 Box & Wilson(1951)에 의해서 처음 소개된 반응표면법(Response Surface Method)이 있다.⁽⁵⁾ 반응표면법은 최소자승법(Least Squares Method)을 이용해 함수를 근사화하여 매끈하게 만든 후 최적화를 수행하는 방법으로,⁽⁶⁾ 처음 소개된 이후 주어진 설계영역(Design Space)에서 적절한 실험점을 선택하는 실험계획법(Design of Experiments) 및 근사 반응모델의 형태를 결정하는 분야에서 연구가 활발히 진행되어 왔다. 또한 반응표면법에 기반하여 순차적으로 설계영역을 이동하면서 최적화를 수행하는 순차적 근사 최적화 방법(Sequential Approximate Optimization)이 개발되었는데, 개발 초기에는 설계영역이 설계자의 경험에 의하여 인위적으로 조절되는 방법이 주를 이루었다. 하지만 그 후 이동제한 기법(Move Limit Strategy)이 제안되면서 순차적 근사 최적화 방법의 효율성이 증가되었고,⁽⁷⁻⁹⁾ 최근 신뢰영역 알고리즘(Trust Region Algorithm)의 적용이 활발히 이루어지고 있다.⁽¹⁰⁻¹³⁾ 신뢰영역 기반의 순차적 근사 최적화 기법은 수렴성을 보장할 수 있다는 장점이 있다.

그러나 노이즈 함수의 최적화를 위한 기존의 방법들은 목적함수의 처리에만 초점이 맞추어졌으며 구속조건을 처리하는 데에는 미숙한 면을 보여왔다. 심플렉스 방법은 구속조건이 없는 최적화 문제만을 다룰 수 있으며, 여과방법은 설계변수에 대한 상/하한치의 구속조건만을 다룰 수 있다. 또한 반응표면법에 의한 구속조건의 근사화는 구속조건에 노이즈가 심할 경우, 근사화된 가용영역이 비가용영역을 포함하는 정도가 심하게 되어 최적해가 비가용영역으로 수렴할 수 있다는 단점을 가

지고 있다.

이러한 문제점을 해결하기 위하여, 본 연구에서는 대각 이차 반응표면법을 이용한 순차적 근사 최적화 방법을 제안한다. 제안된 방법은 설계공간 상에서 중심점과 각 설계변수 축 상의 4 개의 축점을 선택하며, 이 실험점을 바탕으로 목적함수 및 구속조건들의 근사함수를 대각 이차 함수로 형성한다. 또한 함수의 노이즈에 대한 표준편차는 실험점에서의 근사함수 값과 실제함수 값의 차이를 이용하여 구한다. 최적화는 구속조건들이 표준편차만큼 이동된 근사 가용영역에서 수행되며, 근사모델의 효과적인 관리를 위하여 신뢰영역 기반의 순차적 근사 최적화 방법이 도입된다.

제 2 장에는 본 연구에서 제안한 대각 이차 반응표면법을 이용한 순차적 근사 최적화 방법을 설명하며, 제 3 장에서는 예제들을 통해 제안된 방법의 효율성을 보인다. 마지막으로 제 4 장에서는 결론을 기술한다.

2. 대각 이차 반응표면법을 이용한 순차적 근사 최적화 방법

2.1 노이즈 함수의 근사 최적화시 발생하는 문제점

반응표면법을 이용하여 근사 최적화를 수행할 경우, 함수에 약간의 노이즈만이 있는 경우에는 근사함수가 실제함수의 전반적인 경향을 잘 나타낼 뿐 아니라 일정영역 안에서는 근사함수와 실제함수 사이에 큰 차이가 없어 별 어려움 없이 최적화를 수행할 수 있게 된다. 그러나 함수가 다소 큰 노이즈를 가지고 있는 경우에는, 근사화된 구속조건에 의해 표현되는 근사 가용영역(Approximate Feasible Region)이 실제 문제에 있어서의 비가용영역(Actual Infeasible Region)을 포함하는 정도가 심하게 되어, 최적해가 비가용영역으로 수렴할 수 있게 된다. 구속조건에 노이즈가 많은

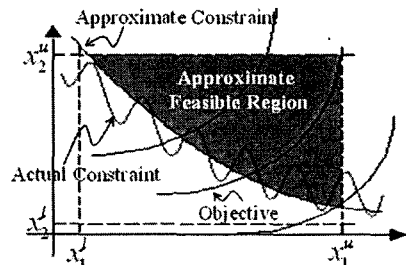


Fig. 1 Approximate Feasible Region for a Noisy Constraint

경우의 반응표면법에 의한 근사 가용영역이 Fig. 1에 표시되어 있다.

Fig. 1은 설계변수가 2개인 문제의 설계영역을 나타낸 것으로, 각 설계변수에 대하여 상/하한치가 있고 한 개의 구속조건이 있다. 그림에서 보는 바와 같이 구속조건에 노이즈가 심한 경우에는, 반응표면법으로 근사화된 구속조건과 실제 구속조건 사이에 많은 차이가 생기게 되고, 이러한 차이로 인하여 근사 구속조건에 의해 표시되는 근사 가용영역이 실제 문제에서의 비가용영역을 포함하게 된다. 따라서 노이즈 함수에 대하여 근사 최적화를 수행할 시, 최적해가 실제문제에 있어서의 비가용영역으로 수렴할 수 있다는 단점을 가지게 된다.

2.2 노이즈 구속조건의 근사화 방안

본 절에서는 2.1 절에서 설명한 노이즈 함수의 근사 최적화시 발생하는 문제점을 해결하기 위한 방법을 제안하고자 한다. 제안된 방법에서는 대각 이차 반응표면법에 의하여 $1 + 4k$ 의 실험점으로 이차 반응표면 모델을 생성하고 근사 구속조건들에 대하여 표준편차를 구한 후, 구속조건들을 표준편차만큼 이동시켜 구한 근사 가용영역에서 최적화를 수행하게 된다. 이렇게 근사 구속조건들을 이동시켜줌으로써 근사 최적해가 실제 문제에서의 비가용영역으로 수렴하는 정도를 줄일 수 있게 된다. 또한 근사모델의 효율적인 관리를 위하여 신뢰영역 기반의 순차적 근사 최적화 방법을 도입하며, 순차적 근사 최적화 방법에서 구속조건들을 처리하기 위하여 L , 완전 벌칙 함수(L , Exact Penalty Function)를 사용한다

2.2.1 근사함수와 표준편차

함수에 노이즈가 심한 경우에는 최소자승법 (Least Squares Method)에 의해 생성된 근사함수가 실제함수의 전반적인 경향을 잘 나타낸다 할지라도 일부 국부적인 지점에서는 근사함수와 실제함수 사이에 적지 않은 차이가 생기게 된다. 이러한 차이는 노이즈에 의한 것으로, 본 연구에서는 ‘표본평균과 표준편차’의 개념을 도입하여 그 정도를 파악한다. 즉, 각 실험점에서 구한 실제함수 값을 표본이라 하여 표본에 대한 평균함수를 구하고, 각 실험점에서의 평균함수 값과 실제함수 값의 차이를 이용하여 표본분산을 구하는 것이다. 이때 함수의 노이즈에 대한 표준편차는 표본분산의 양의 제곱근이 된다. 이러한 관계를 이용하면, 실제함수는 평균함수와 표준편차의 합으로 근사화

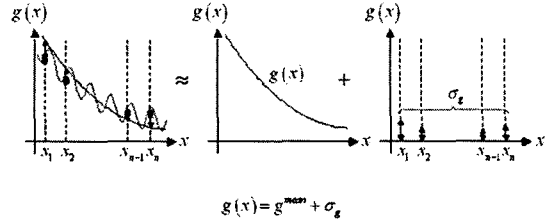


Fig. 2 Relationship between the real function, the mean function and the standard deviation

될 수 있다. Fig. 2는 이러한 관계를 표현한 것이다. 여기서 구속조건 g 는 설계변수 x 의 함수이고, n 은 실험점의 수를 나타낸다. 그림에서 보듯이 표준편차가 크다는 것은 함수에 노이즈가 심하다는 것을 의미하게 된다. 본 연구에서는 평균함수를 최소자승법에 의해 생성된 근사함수로 설정하였는데, 이는 최소자승법의 정의상 근사함수가 실험점들의 중앙을 지나도록 되어 있어 평균의 개념을 가지고 있기 때문이다.

일반적으로 n 개의 표본을 추출하였을 때, 표본에 대한 분산과 표준편차는 다음과 같다.⁽¹⁴⁾

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \sigma = s \quad (1)$$

여기서 \bar{x} 는 표본평균을 나타낸다. 따라서, n 개의 실험점을 가지고 반응표면법을 이용하여 근사 반응함수를 만들었을 때, 이 함수의 노이즈에 대한 표본분산과 표준편차는 다음과 같이 구해진다.

$$s_g^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{g_i - \bar{g}(x_i)\}^2, \quad \sigma_g = s_g \quad (2)$$

여기서 g_i 는 실험점에서의 실제 함수값을 의미한다.

2.2.2 대각 이차 반응표면법

본 논문에서는 실험점으로 설계공간상의 중심점과 각 설계변수의 축을 따라 4개의 점을 선택하였고, 근사 반응모델로는 테일러 급수(Taylor Series Expansion)에서 Hessian 행렬의 대각 요소들이 없는 대각 이차 모델로 설정하였다. 다음 식은 대각 이차 모델을 나타낸 것이다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i=1}^k a_{i+1} x_i^2 \quad (3)$$

여기서 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_k]^T$ 로 설계변수를 나타내고, k 는 설계변수의 개수이다.

대각 이차 반응표면법에 있어서 총 실험점의 수 $n = 1 + 4k$ 가 된다. 실험점의 수를 이렇게 선택한 이유는 설계변수가 한 개인 경우 근사 반응모델을

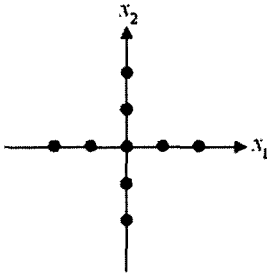


Fig. 3 Experimental Points for the Diagonal Quadratic RSM with two design variables

생성하기 위하여서는 최소 세 개의 실험점이 있어야 하고, 표준편차를 구하기 위하여서는 한 개 이상의 실험점을 추가로 선정해야 하는데, 좌우 대칭성을 고려하여 두 개의 실험점을 추가하여 중심점과 축을 따라 네 개의 점을 선택한 것이다. Fig. 3은 설계변수가 두 개인 경우에 있어서의 실험점을 나타낸 것이고, 식 (4)는 설계변수가 k 개 일 때의 대각 이차 반응표면법에 의한 근사함수의 노이즈에 대한 표본분산 및 표준편차를 나타낸 것이다. 여기서 g_i 는 실험점에서의 실제 함수값을 의미한다.

$$s_g^2 = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{1+4k} \{g_i - \tilde{g}(x_i)\}^2, \sigma_g = s_g \quad (4)$$

본 연구에서는 근사 반응모델을 대각 이차 방정식으로 설정하였는데, 문제의 성격에 따라 얼마든지 다른 형태의 방정식으로 설정하는 것이 가능하다. 예로, 설계변수 간의 교호작용이 중요한 문제에 있어서는 교호작용항을 추가하여 근사 반응모델을 설정할 수 있으며, 이렇게 함으로써 더욱 실제함수에 가까운 근사 모델을 형성할 수 있다.⁽¹⁶⁾

2.2.3 최적설계 문제 수식화

본 연구에서는 노이즈 구속조건을 근사화 시 발생하는 근사 가용영역의 문제점을 해결하기 위하여 근사 구속조건들을 식 (4)에 의하여 구해진 표준편차만큼 이동시켜 얻은 근사 가용영역에서 최적화를 수행한다. 식 (5)와 Fig. 4는 일반적인 근사 최적화 문제의 수식과 설계변수가 2개인 설계영역에서의 근사 가용영역을 나타낸 것이고, 식 (6)과 Fig.5는 구속조건이 표준편차만큼 이동된 근사 최적화 문제의 수식과 설계변수가 2개인 설계영역에서의 근사 가용영역을 나타낸 것이다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \tilde{f}(x) \\ & \text{Subject to } \tilde{g}_j(x) \leq 0 \quad j=1, \dots, p \\ & \quad \quad \quad x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i=1, \dots, k \end{aligned} \quad (5)$$

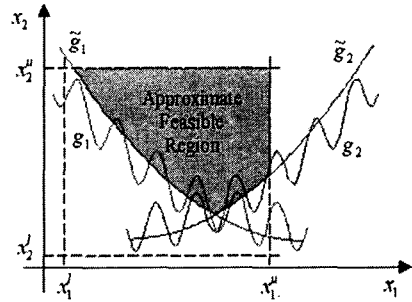


Fig. 4 Feasible region for the conventional approximate optimization

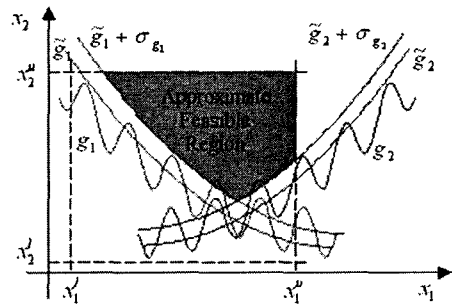


Fig. 5 Feasible region for the approximate optimization with constraints shifted by their standard deviations

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \tilde{f}(x) \\ & \text{Subject to } \tilde{g}_j(x) + \sigma_{g_j}(x) \leq 0 \quad j=1, \dots, p \\ & \quad \quad \quad x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i=1, \dots, k \end{aligned} \quad (6)$$

그림에서 보는 바와 같이 근사 구속조건들을 표준편차만큼 이동시킨 가용영역이 그렇지 않은 가용영역보다 훨씬 안전적임을 알 수 있다.

2.3 신뢰영역 기반의 순차적 근사 최적화 방법의 도입

본 연구에서 제안하는 방법에서는 신뢰영역 기반의 순차적 근사 최적화 방법을 도입하게 되는데, 본 절에서는 위에서 제안한 대각 이차 반응표면법의 접목 및 신뢰영역 알고리즘에서의 구속조건 처리를 위한 L_1 완전 벌칙 함수 등 순차적 근사 최적화 방법을 도입하는데 필요한 사항들을 설명한다.

2.3.1 신뢰영역에서의 실험점 선택

순차적 근사 최적화 방법에서는 각 반복적 실행 단계에서 신뢰영역을 조절하고 그 안에서 근사 최적화 문제를 풀게 된다. 이 때 신뢰영역에서의 근사화를 위한 실험점으로는 한 개의 중심점, 각 설

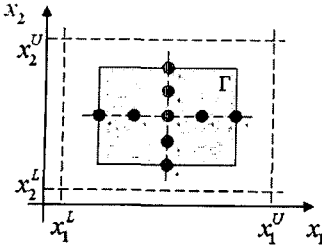


Fig. 6 Experimental points in the trust region for the Diagonal Quadratic RSM with two design variables

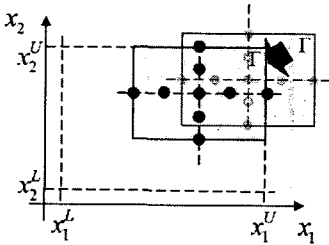


Fig. 7 Shift of the trust region into the boundaries of design variables

계변수의 축과 신뢰영역 테두리가 만나는 두 점 그리고 그 점들로부터 중심점까지를 이등분한 두 점이 선택된다. Fig. 6은 설계변수가 두 개인 설계공간상에서 신뢰영역 내에서의 실험점들을 나타낸 것이다.

신뢰영역 알고리즘은 신뢰영역의 크기를 조절하고 그 위치를 이동해 가면서 반복적으로 근사 최적화를 수행하게 되는데, 경우에 따라서는 신뢰영역이 설계변수의 상/하한치를 벗어날 수 있게 된다. 이러한 경우에는 신뢰영역이 그 크기를 유지한 채 설계변수의 상/하한치로 나타나는 공간에 들어갈 수 있도록 이동된다. 이러한 관계가 Fig. 7에 나타나 있다.

2.3.2 L_1 완전 벌칙 함수

본 연구에서는 구속조건이 존재하는 일반적인 최적화 문제에 대하여 목적함수와 구속조건들을 각각 근사화 한다. 또한, 근사모델의 효과적인 관리와 수렴 보장을 위해 신뢰영역 알고리즘(Trust Region Algorithm)을 도입하는데, 근사함수의 감소치와 실제함수의 감소치의 비를 구하기 위하여 목적함수와 구속조건들을 하나의 범함수(functional)로 만들 필요가 있다. 그 이유는 신뢰영역 알고리즘이 구속조건이 없는 문제에 대하여 정의되어 있기 때문이다. 이를 위해서 본 연구에서는 L_1 완전 벌칙 함수(L_1 Exact Penalty Function)를 사용한다.⁽¹⁰⁾

이 범함수를 사용한 이유는 최적화 과정이 진행되어 국부 최적해로 수렴하게 되면, 그 점에서의 L_1 완전 벌칙 함수값은 실제 문제에서의 목적함수 값과 일치하기 때문이다. L_1 완전 벌칙 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$L_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p r_j \max\{0, g_j(\mathbf{x})\} \quad (7)$$

여기서, $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_p]^T$ 는 구속조건들에 대한 가중치(Weighting Factor)를 나타내고, p 는 구속조건의 개수이다. 목적함수의 정규화(Normalization)을 위하여 다음과 같이 변형된 L_1 완전 벌칙 함수를 사용하여도 된다.

$$L_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{f(\mathbf{x}) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} + \sum_{j=1}^p r_j \max\{0, g_j(\mathbf{x})\} \quad (8)$$

여기서 f_{\max} 와 f_{\min} 는 실험점에서 구한 목적함수의 실제값들 중에서 최대값과 최소값이다.

2.3.3 신뢰영역 조절

본 연구에서는 2.3.2 절에서 설명한 L_1 완전 벌칙 함수를 이용하여 예측감소량과 실제감소량을 구한 다음, 감소비를 계산하여 신뢰영역을 조절한다. k 번째 반복단계에서의 예측감소량 Δ_{pred_k} , 실제 감소량 Δ_{act_k} , 그리고 감소비 r_k 에 대한 식은 다음과 같다.

$$\Delta_{pred_k} = L_1(\mathbf{x}_k) - \tilde{L}_1(\mathbf{x}_k^*) \quad (9)$$

$$\Delta_{act_k} = L_1(\mathbf{x}_k) - L_1(\mathbf{x}_k^*) \quad (10)$$

$$r_k = \Delta_{act_k} / \Delta_{pred_k} \quad (11)$$

신뢰영역은 식 (11)에서 구해진 감소비 r_k 에 의하여 조절되는데, 그 방법은 다음과 같다.

경우 1: $r_k \leq 0$

근사 최적해에서 근사화된 L_1 함수는 감소하였지만, 실제 L_1 함수는 감소하지 않았다. 따라서 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$ 로 설정하고, $h_{k+1} = \gamma_1 h_k$ 로 설정하여 신뢰영역을 감소시킨다. 여기서 γ_1 은 $0 < \gamma_1 < 1$ 을 만족하는 임의의 상수이다.

경우 2: $0 < r_k < \eta$ 또는 $0 < r_k^{-1} < \eta$

$0 < r_k < \eta$ 이면, 실제 감소량이 예측 감소량 보다 덜 감소된 것이다. 또한 $0 < r_k^{-1} < \eta$ 이면, 실제 감소량이 예측 감소량 보다 더 감소된 것이다. 이 경우 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k^*$ 로 설정하고, 신뢰영역을

$h_{k+1} = \gamma_1 h_k$ 로 감소 시킨다. 여기서 η 는 $0 < \eta < 1$ 을 만족하는 임의의 상수이다.

경우 3: $\eta < r_k < 1$ 또는 $\eta < r_k^{-1} < 1$

이 경우는 실제 감소량과 예측 감소량이 비슷하다. $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k^*$ 로 설정하고, $h_{k+1} = \gamma_2 h_k$ 와 같이 신뢰영역을 조절한다. 여기서 γ_2 는 $\gamma_1 < \gamma_2 < 1$ 을 만족하는 임의의 상수이다.

경우 4: $r_k \approx 1$

이 경우는 근사 모델이 정확한 것이다. $\|\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k\| = h_k$ 이면 $h_{k+1} = \gamma_3 h_k$ 이고 그러하지 않으면, $h_{k+1} = h_k$ 로 설정한다. $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k^*$ 로 설정한다. 여기서 γ_3 는 $\gamma_3 > 1$ 을 만족하는 임의의 상수이다.

2.4 제안된 방법의 수치적 절차

본 연구에서 제안하는 노이즈 함수 최적화를 위한 대각 이차 반응표면법을 이용한 순차적 근사 최적화 방법의 수치적 절차는 다음과 같다.

- 0 단계: 신뢰영역 조절에 필요한 상수 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 와 η 을 설정하고, 초기 설계점 \mathbf{x}_1 과 초기신뢰영역 $\Gamma_1(h_1) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| \leq h_1\}$ 을 선정한다. 그리고 반복단계 $k=1$ 로 설정하고 중심점에서 해석을 수행한다.
- 1 단계: 신뢰영역내에서 각 설계변수의 축을 따라 등간격으로 4 개의 지점을 실험점으로 선택하고, 각 실험점에서 해석을 수행한다.
- 2 단계: 해석결과를 가지고 최소자승법을 이용하여 목적함수 및 구속조건에 대한 근사함수와 표준편차를 구한다.
- 3 단계: 신뢰영역 내에서 다음의 근사 최적화 문제를 푼다.

$$\begin{aligned}
 & \text{Find} && \mathbf{x} \\
 & \text{minimize} && \tilde{f}(\mathbf{x}) \\
 & \text{subject to} && \tilde{g}_j(\mathbf{x}) + \sigma_{g_j} \leq 0 \quad j = 1, \dots, p \\
 & && \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \leq h_k
 \end{aligned} \tag{12}$$

- 4 단계: 근사 최적해에서 목적함수와 구속조건의 실제 함수값을 구한다. 예측 감소량 $\Delta_{pred_k} = L_1(\mathbf{x}_k) - \tilde{L}_1(\mathbf{x}_k^*)$ 과 실제 감소량

$\Delta_{act_k} = L_1(\mathbf{x}_k) - L_1(\mathbf{x}_k^*)$ 을 구하고, 감소비 $r_k = \Delta_{act_k} / \Delta_{pred_k}$ 를 계산한다.

- 5 단계: 2.3.3 절에서 설명한 바와 같이 감소비 r_k 에 따라 다음 단계를 위하여 중심점을 이동하고 신뢰영역을 조절한다.
- 6 단계: 수렴조건을 만족하면 최적화를 종료하고, 그렇지 않으면 $k=k+1$ 로 설정하고 5 단계에서 재조정된 중심점과 신뢰영역을 가지고 1 단계로 간다.

3. 적용사례

본 장에서는 제안된 방법의 유효성을 검증하기 위하여 몇 가지 예제를 풀어본다. 먼저 제안된 방법의 기본적인 신뢰성에 대한 검증과 노이즈의 정도에 따른 영향을 파악하기 위하여 최적설계 프로그램인 DOT(Design Optimization Tools) 메뉴얼에 있는 예제인 피스톤(Piston) 설계와 외팔보(Cantilevered Beam) 설계 두 문제를 풀어본다.⁽¹⁵⁾ 이때 노이즈에 따른 영향을 파악하기 위해 문제에 임의로 노이즈 요소를 첨가한다. 마지막으로 실제 문제인 HDD 슬라이더(Slider) 설계에 제안된 방법을 적용하여 최적화를 수행한다. 제안된 방법에 의한 최적화 결과는 일반적인 반응표면법을 이용하는 순차적 근사 최적화 방법(구속조건들의 이동이 없는 최적화 방법)에 의한 결과와 비교되어 그 유효성이 검증된다. 참고로 DOT 의 Modified Method of Feasible Directions 에 의한 최적화 결과도 함께 수록하였다.

3.1 Piston 설계

본 문제는 상용 최적화 프로그램인 DOT⁽¹⁵⁾에 수록되어있는 문제이다. 목적함수는 하중 Q 를 0 도에서 45 도까지 들어 올리는데 필요한 기름의 부피를 최소화하는 것이다.

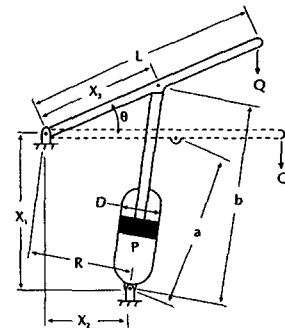


Fig. 8 Piston Design

구속조건으로는 힘의 평형상태, 보의 최대 굽힘응력, 피스톤 스트로크의 최소값에 관한 것이 있다. 또한, X_3 는 $L/2$ 의 위치를 넘어서는 안되며, 지지 위치 X_2 는 적어도 피스톤 직경 D 의 $1/2$ 이상이어야 한다. 설계변수는 거리 X_1, X_2, X_3 그리고 D 이다. 초기 설계점 $\mathbf{x}_0 = [80.0 \ 80.0 \ 50.0 \ 7.0]^T$ 이고, 설계변수의 하한치는 모두 0.05 이며, 상한치는 설계변수 X_3 만 120 이고 나머지는 모두 1000 이다. 초기 신뢰영역은 설계변수의 상/하한치로 나타나는 설계공간의 40% 로 설정하였다.

본 문제에 대한 최적설계 문제 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize} \quad V = \frac{\pi}{4} D^2 (b-a) \quad (13)$$

subject to

$$QL \cos \theta - R(\theta)F \leq 0 \quad (14)$$

$$Q(L - X_3) - 1.8 \times 10^6 \leq 0 \quad (15)$$

$$1.2(b-a) - a \leq 0 \quad (16)$$

$$D/2 - X_2 \leq 0 \quad (17)$$

여기서

$$R = \frac{-X_2(X_3 \sin \theta + X_1) + X_1(X_2 - X_3 \cos \theta)}{\sqrt{(X_3 \sin \theta + X_1)^2 + (X_2 - X_3 \cos \theta)^2}}$$

$$F = \frac{\pi}{4} PD^2$$

$$a = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + X_1^2}$$

$$b = \sqrt{(X_3 \sin 45^\circ + X_1)^2 + (X_2 - X_3 \cos 45^\circ)^2}$$

Payload(Q) = 10,000 lbs

Beam Length(L) = 240 in

Oil Pressure(P) = 1,500 psi

Maximum Allowable Bending Moment of the Beam = 1.8×10^6 lbs-in

본 연구에서는 노이즈가 최적설계에 미치는 영향을 파악하기 위하여 각 구속조건에 다음과 같이 노이즈를 인위적으로 첨가하였다.

$$g_j \Rightarrow g_j + \alpha |g_j| \sin \left(\sum_{i=1}^4 x_i \right) \quad j=1, \dots, 5$$

같은 조건하에서 본 연구에서 제안하는 방법과 일반적인 반응표면법에 의한 순차적 근사 최적화 방법 두 가지를 사용하여 최적화를 수행하였고, 그 결과를 Fig. 9 에 나타내었다. $\alpha = 0.001$ 인 경우,

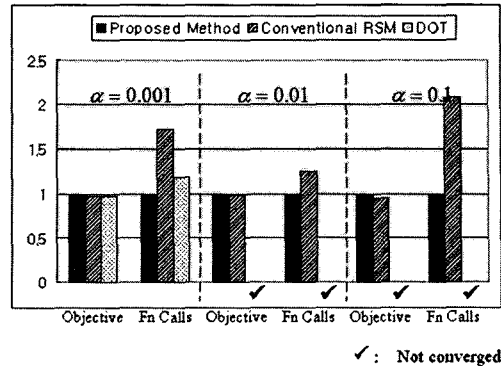


Fig. 9 Comparison of optimization results of Piston Design Problem by different method

$\alpha = 0.01$ 인 경우, 그리고 $\alpha = 0.1$ 인 경우 세 가지에 대하여 최적화를 수행하였으며, 최적화 결과는 제안된 방법에 의한 결과를 1로 하여 상대적인 차이로 나타내었다. 그래프에서 'Objective'는 최적해에서의 목적함수 값을, 'Fn Calls'는 최적화 과정동안 수행된 총 해석 횟수를 나타낸다. 참고로 DOT에 의한 최적화 결과도 나타내었다.

Fig. 9에서 보는 바와 같이, 제안된 방법이나 일반적인 반응표면법에 의한 방법 모두 비슷한 목적함수 값을 가져왔다. 그러나 제안된 방법이 일반적인 반응표면법에 의한 방법보다 훨씬 적은 해석 횟수를 필요로 함을 알 수 있다. 이는 수렴속도와 관련된 것으로 제안된 방법이 빨리 최적해로 수렴했음을 나타낸 것이다. 이러한 결과가 나온 것은 일반적인 반응표면법에 의한 방법은 신뢰영역내의 근사 최적화에서 비가용영역으로 수렴할 가능성이 크며, 이로 인해 다음 단계에서 가용영역으로 다시 들어가기 위한 추가적인 노력이 필요하기 때문인 것이라 추측된다. 반면에 제안된 방법에서는 신뢰영역 내의 근사 최적화에서 비가용영역으로 수렴할 가능성이 상대적으로 적기 때문에 위와 같은 추가적인 노력 없이 빠른 수렴속도를 가지고 최적해를 찾을 수 있게 된다. 참고적으로 DOT에 의한 방법은 $\alpha = 0.01$ 인 경우와 $\alpha = 0.1$ 인 경우 최적해로 수렴하지 않았다.

3.2 Cantilevered Beam 설계

본 문제 역시 상용 최적설계 프로그램인 DOT⁽¹⁵⁾에 수록 되어있는 문제이다. 목적함수는 Fig. 10에서 보는 바와 같이 하중 P 를 받는 5개의 마디로 구성된 외팔보의 부피를 최소화하는 것이다. 구속조건으로는 각 마디들에 대한 허용응력 및 처짐에 관한 것이 있고, 마디의 높이가 너비의 20배를 넘으면 안 된다는 기하학적인 것이 있다.

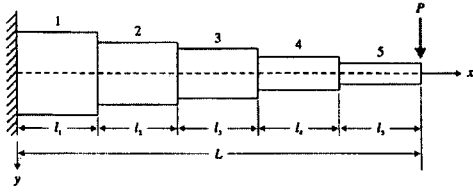


Fig. 10 Cantilevered Beam Design

설계변수는 각 마디의 너비 b_i 과 높이 h_i 이다. 각 마디의 너비에 대한 초기치는 4.0 을, 높이에 대한 초기치는 40.0 을 주었고, 너비에 대한 상/하한치는 100.0/1.0 이고, 높이에 대한 상/하한치는 100.0/5.0 이다. 초기 신뢰영역은 설계변수의 상/하한치로 나타나는 설계공간의 40%로 설정하였다.

본 문제에 대한 최적설계 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } V = \sum_{i=1}^5 b_i h_i l_i \quad (18)$$

Subject to

$$\frac{\sigma_i}{\bar{\sigma}} - 1 \leq 0 \quad i = 1, \dots, 5 \quad (19)$$

$$h_i - 20b_i \leq 20 \quad i = 1, \dots, 5 \quad (20)$$

$$\frac{y}{\bar{y}} - 1 \leq 0 \quad (21)$$

$$1.0 \leq b_i \leq 100.0 \quad i = 1, \dots, 5$$

$$5.0 \leq h_i \leq 100.0 \quad i = 1, \dots, 5$$

여기서

$\bar{\sigma}$: allowable bending stress

\bar{y} : allowable displacement

본 예제에서도 노이즈가 최적설계에 미치는 영향을 파악하기 위하여 다음과 같이 구속조건들에 인위적으로 노이즈 요소를 첨가하였다.

$$g_j \Rightarrow g_j + \alpha |g_j| \sin \left(\sum_{i=1}^4 x_i \right) \quad j = 1, \dots, 5$$

이때, 마디의 높이와 너비의 기하학적 관계에 대한 구속조건에는 노이즈를 첨가하지 않았으며, Piston 설계에서와 마찬가지로 $\alpha = 0.001$ 인 경우, $\alpha = 0.01$ 인 경우, 그리고 $\alpha = 0.1$ 인 경우 세 가지에 대하여 최적화를 수행하였다. Fig. 11 에 제안된 방법을 이용한 순차적 근사 최적화 방법의 결과와 일반적인 반응표면법을 이용한 순차적 근사 최적화 방법의 결과가 비교되어 있다. 참고로 DOT 에 의한 최적화 결과도 비교되어 있다.

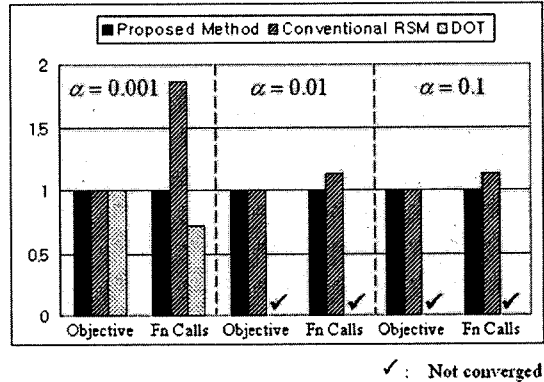


Fig. 11 Comparison of optimization results of cantilevered beam design problem by different methods

Fig. 11에서 Cantilevered Beam 설계 문제 또한 Piston 설계 문제와 같은 성향의 결과를 보임을 알 수 있다. 제안된 방법과 일반적인 RSM을 이용하는 방법 모두 비슷한 목적함수 값을 가져왔지만, piston 설계 문제와 마찬가지로 제안된 방법이 적은 해석회수를 가졌다.

3.3 HDD Slider 설계

본 문제는 Hard Disk Drive의 Slider에 대한 형상 최적설계이다. 목적함수는 Fig. 12에서 보는 바와 같이 Slider의 Flying Height와 Roll Angle의 편차를 최소화하는 것이다.⁽¹⁷⁾ 구속조건으로는 Pitch Angle에 대한 상/하한치와 Roll Angle에 대한 하한치가 있다. 본 문제는 축소기반방법(Reduced Basis Method)을 이용하여 최적화를 수행하게 된다. 따라서 설계변수는 Fig. 13에서 보는 바와 같이 세 가지의 Basis Model에 대한 Basis Coefficient이다.

또한 여기서 세 Basis Coefficient의 합은 1이 되어야 하기 때문에 설계변수는 다시 두 개로 줄어든다.

본 문제는 노이즈가 많은 것으로 알려져 있어 도함수에 기반한 일반적인 최적화 방법으로는 최적해를 찾는 데 어려움이 있다. 본 문제 역시 제안된 방법을 이용한 순차적 근사 최적화 방법과

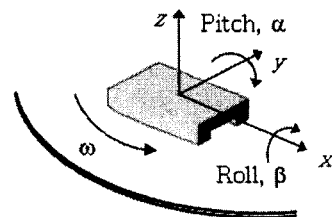


Fig. 12 HDD Slider Design

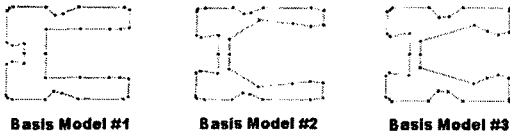


Fig. 13 Basis Models of HDD Slider

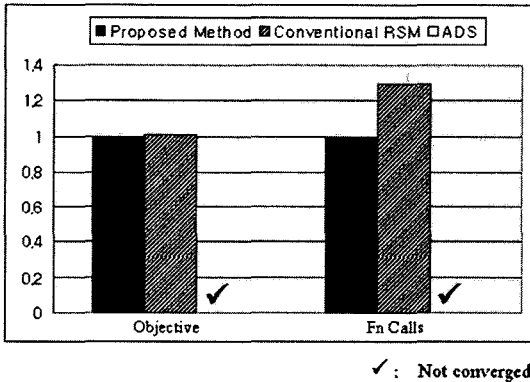


Fig. 14 Comparison of optimization results of HDD slider design problem by different methods

일반적인 반응표면법을 이용한 순차적 근사 최적화 방법으로 각각 최적화를 수행했으며, 그 결과가 Fig. 14에 나타나 있다. Fig. 14에서도 제안된 방법에 의한 결과를 1로 하여 상대비교를 하였으며, 최적화 상용 프로그램인 ADS는 최적해에 수렴하지 못했다.

Fig. 14에서도 앞의 두 예제와 같이, 제안된 방법에 의한 순차적 근사 최적화 방법이 일반적인 반응표면법에 의한 방법보다 적은 해석 횟수로 빨리 수렴했음을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 수치적 노이즈를 가진 함수의 최적화를 위하여 대각 이차 반응표면법을 이용한 신뢰영역 기반의 순차적 근사 최적화 방법을 제안하였다. 제안한 기법은 노이즈의 정도를 나타내는 지표인 표준편차만큼 구속조건들을 이동시켜 준 근사 가용영역을 만들어 줌으로써 노이즈에 의한 영향을 최소화하여 최적해가 실제문제에서의 비가용영역으로 수렴하는 정도를 줄일 수 있게 하였다. 또한 신뢰영역 알고리즘 기반의 순차적 근사 최적화 방법을 도입함으로써 그 수렴성을 보장하였다.

마지막으로 제안한 기법을 구현하는 최적화 프로그램을 개발하였으며, 예제를 통하여 상용 최적설계 프로그램인 DOT 를 이용해서는 풀 수 없는 문제를 풀어내는 물론 기존의 반응표면법에 의한 방법에 비해 수렴속도가 평균 30.6% 빨라졌음을

보임으로써 제안한 기법의 우수성을 입증하였다.

후 기

본 연구는 한양대학교 2001년 교내일반연구비와 한국과학재단 지정 최적설계신기술연구센터의 지원으로 수행되었습니다. 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Nelder, J.A. and Mead, R., 1965, "A Simplex Method for Function Minimization," *Computer Journal*, Vol. 7, p. 308.
- (2) Nocedal, J., 1992, "Acta Numerica 1992 (A. Iserles, ed.): Theory of Algorithms for Unconstrained Optimization," Cambridge University Press, Cambridge, pp. 199~242.
- (3) Powell, M.S.D., 1998. "McKenna J. & Temam R. (eds.): A Review of Algorithms for Nonlinear Equations and Unconstrained Optimization," *ICIAM 1987 Proceedings*, SIAM, Philadelphia. pp. 220~232.
- (4) Gilmore, P. and Kelley, C.T., 1994, "An Implicit Filtering Algorithm for Optimization of Function with Many Local Minima," *Tech. Report CRSC-TR94-23*, North Carolina State University.
- (5) Box, G.E.P. and Wilson, K. B., 1951, "On the Experimental Attainment of Optimum Conditions," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 13, pp.1~45.
- (6) Myers, R.H. and Montgomery, D. C., 1995, "Response Surface Methodology - Process and Product Optimization Using Designed Experiments," John Wiley & Sons.
- (7) Guinta, A.A., Dudley, J.M., Narducci, R., Grossman, B., Haftka, R.T. and Mason, W. H., 1994, "Noisy Aerodynamic Response Surface and Smooth Approximations in HSCT Design," *HPCCP Related Papers*, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- (8) Karidis, J.P. and Turns, S.R., 1984, "Efficient Optimization of Computationally Expensive Objective Functions," *Proceedings of ASME 18th Mechanisms Conference, 10th Design Automation Conference*, October.
- (9) Vanderplaats, G.N., 1979, "Approximation Concepts for Numerical Airfoil Optimization," *NASA Technical Paper I370*.
- (10) Fletcher, R., 1987, "Practical Method of Optimization", John Wiley & Sons, Chichester.
- (11) Dennis, J.E. and Torczon, T., 1996, "Approxim-

- ation Model Management for Optimization,” *Proceedings of the 6th AIAA/NASA/USAF Multidisciplinary Analysis & Optimization Symposium*, AIAA 96-4046, Bellevue, Washington, September 7-9, pp. 1044~1046.
- (12) Alexandrov, N., 1996, “Robustness Properties of a Trust Region Frame Work for Managing Approximations in Engineering Optimization,” *Proceedings of the 6th AIAA/NASA/USAF Multidisciplinary Analysis & Optimization Symposium*, AIAA 96-4012-CP, Bellevue, Washington, September 7-9, pp. 1056~1059.
- (13) Rodriguez, J.F., Renaud, J.E. and Watson, L.T., 1988, “Trust Region Augmented Lagrangian Methods for Sequential Response Surface Approximation and Optimization,” *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 120, pp. 58~66.
- (14) Kreyszig, E., 1993, “Advanced Engineering Mathematics,” John Wiley & Sons, New York
- (15) Vanderplaats, G.N., 1995, “DOT (Design Optimization Tools) USERS MANUAL: Version 4.20,” Vanderplaats Research & Development, Inc., Colorado Springs.
- (16) Kyung-Jin Hong, Min-Soo kim and Dong-Hoon Choi, 2001, “Efficient Approximation Method for Constructing Response Surface Model,” *KSME international Journal*, Vol. 7, pp. 876~888
- (17) Sang-Joon Yoon, Dong-In Kim, Tae-Sik Kang, Tae-Gun Jeong and Dong-Hoon Choi, 2003, “An Optimization of Air-Lubricated Slider Bearings Using the Reduced Basis Concept,” *transactions of the KSME(A)*, Vol. 27, No. 3, pp. 343~348