

< 논문 >

탄소성 최소 제곱 수식화와 이를 이용한 무요소법

권기찬[†] · 윤성기^{*}

(2004년 11월 30일 접수, 2005년 3월 28일 심사완료)

The Meshfree Method Based on the Least-Squares Formulation for Elasto-Plasticity

Kie-Chan Kwon and Sung-Kie Youn

Key Words : LSMFM(최소 제곱 무요소법), Least-Squares(최소 제곱), Meshfree Method(무요소법), Elasto-Plasticity(탄소성), Metal Forming(금속 성형)

Abstract

A new meshfree method for the analysis of elasto-plastic deformations is presented. The method is based on the proposed first-order least-squares formulation, to which the moving least-squares approximation is applied. The least-squares formulation for the classical elasto-plasticity and its extension to an incrementally objective formulation for finite deformations are proposed. In the formulation, the equilibrium equation and flow rule are enforced in least-squares sense, while the hardening law and loading/unloading condition are enforced exactly at each integration point. The closest point projection method for the integration of rate-form constitutive equation is inherently involved in the formulation, and thus the radial-return mapping algorithm is not performed explicitly. Also the penalty schemes for the enforcement of the boundary and frictional contact conditions are devised. The main benefit of the proposed method is that any structure of cells is not used during the whole process of analysis. Through some numerical examples of metal forming processes, the validity and effectiveness of the method are presented.

1. 서론

소성 변형과 같은 대변형 문제의 유한요소 해석은 일반적으로 요소의 재구성과 같은 번거로움을 수반한다. 이런 문제에 있어서 불규칙적으로 분포된 절점들만으로 형상함수를 구성하는 무요소법은 큰 장점을 가질 수 있다. 그러나 현재까지 대부분의 무요소법은 수식화의 적분이나 비압축성 조건의 처리를 위해 요소와 비슷한 격자의 사용에 의존하고 있으며, 이는 무요소법의 효용성을 반감시키는 요인이다.

무요소법을 사용한 소성 문제의 해석은 Chen 등에 의해 최초로 시도되었다.⁽¹⁾ 여기서 이들은 기존의 Galerkin 수식화에 라그랑지안(Lagrangian) 무요소 근사화 방법을 적용하였다. 이런 방법은 최근까지 수행된 소성 문제의 무요소법 해석에 대한 연구 대부분에서 그대로 사용되고 있다.⁽²⁻⁵⁾ 라그랑지안 형상함수는 변형전 초기 형상(configuration)에서 구한 형상함수를 현재 변형 형상으로 변환(transformation)하여 구해진다. 이는 마스터 요소에서의 형상함수를 변형 형상으로 변환하는 유한요소법의 경우와 거의 비슷하다고 볼 수 있다. 따라서 심한 변형은 유한요소법에서 요소의 찌그러짐을 유발하듯이, 무요소법에서도 초기에 설정된 형상함수의 영향영역(influence region)이 찌그러지게 되어 형상함수의 재구성이 요구된다. 그러나 이런 시도는 아직 이루어지지 않고 있다.

Galerkin 수식화에 기반한 유한요소법은 현재까지

[†] 책임저자, 회원, 한국원자력연구소 사용후핵연료기술개발부
E-mail : kc_kwon@hanmail.net

^{*} 회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : skyoun@sorak.kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3034

가장 강건한 수치 해석 방법이라 할 수 있다. 그러나 Galerkin 무요소법의 경우 무요소법의 효용성을 저해하는 몇 가지 문제점이 존재한다. Galerkin 수식화에서 수치해의 정확성은 적분의 정확성에 크게 영향을 받는다. 따라서 신중하게 구성된 적분 격자를 필요로 하며, 보통은 요소와 같은 격자에 높은 차수의 Gauss 구적공식을 사용한다. 이런 문제를 피하기 위해 많은 연구들이 진행되어 왔다.⁽⁶⁻¹⁰⁾ 또 다른 어려움은 비압축성 조건을 처리하는데 있다. 유한요소법에서는 비압축성 조건의 야기되는 체적 잠김(volumetric locking) 현상을 해결하기 위해 선택 감차 적분이나 혼합 수식화(mixed formulation)를 이용한다. 이런 방법들은 요소 개념에 기초하고 있어서, 무요소법에 적용하려면 이를 위한 격자를 필요로 한다.⁽¹¹⁻¹³⁾

반면, 최소 제곱 수식화(least-squares formulation)는 적분 오차에 강건하고,⁽¹⁴⁻¹⁷⁾ 일차 수식화의 경우 비압축성 조건하에서도 체적 잠김이 발생하지 않고 동일한 수렴 특성을 보인다.⁽¹⁸⁻²⁰⁾ 이런 특성들은 무요소법의 효용성을 향상시키는데 크게 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

본 논문에서는 탄소성 변형 해석을 위한 최소 제곱 무요소법(least-squares meshfree method, LSMFM)을 제안한다. 이를 위해 먼저 미소 변형 이론에 기반한 일차 최소 제곱 수식화를 제안하고, 이를 대변형에 적용하기 위해 증분적 객관성(incremental objectivity)을 가지는 수식화로 확장한다. 또한 제안된 최소 제곱 무요소법에서 경계 조건 및 마찰 접촉 조건을 처리하기 위한 벌칙법(penalty method)을 제시하고, 접촉부 근처에서의 국부적인 변형이 심해지면 무요소 형상함수의 영향영역을 재구성하는 개념을 해석에 적용한다. 마지막으로 수치 예제들을 통해 제안된 방법의 효용성을 제시한다.

2. 이동 최소 제곱 근사화

본 장에서는 무요소 형상함수를 도출하는 방법중 가장 널리 사용되는 이동 제곱 근사화 방법 대해 간단히 기술한다.^(21,22)

선형 독립 기저 함수들을 $\{p_i\}_{i=1}^n$, 절점들 $\{x_j\}_{j=1}^N$, 각 절점에서의 가중함수를 $\{w_j\}_{j=1}^N$ 라 하면, I -번째 절점의 형상함수 ψ_I 는 다음과 같이 주어진다.

$$\psi_I(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}_I(x) \quad (1)$$

여기서

$$\mathbf{p}^T(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)] \quad (2a)$$

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(x) \mathbf{P} \quad (2b)$$

$$\mathbf{B}_I(x) = w_j(x) p(x_j) \quad (2c)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_N) & \dots & p_n(x_N) \end{bmatrix} \quad (2d)$$

$$\mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} w_1(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & w_N(x) \end{bmatrix} \quad (2e)$$

본 연구에서는 선형 기저 함수 $\mathbf{p}^T = [1, x, y]$ 와 다음과 같은 가중 함수를 사용하였다.

$$w_j(x) = \begin{cases} \sqrt{4/\pi} (1 - \|x - x_j\|^2 / h_j^2)^4 & \text{if } \|x - x_j\| < h_j \\ 0 & \text{if } \|x - x_j\| \geq h_j \end{cases} \quad (3)$$

여기서 h_j 는 영향반경(influence radius)으로, 본 연구에서는 절점간의 거리의 1.5 배를 사용하였다.

3. 탄소성 최소 제곱 수식화

최소 제곱 수식화를 이용한 유한요소 해석은 유체나 전자기 문제 등과 같이 비자기수반(non-self-adjoint) 문제에 주로 사용되어 왔다.⁽²³⁾ Galerkin 수식화와는 달리 최소 제곱 수식화는 적분 항등식을 사용하지 않으므로 적분에 약간의 오차가 있어도 수치해에 큰 영향을 미치지 않는다.⁽¹⁴⁻¹⁷⁾ 또한 일차 최소 제곱 수식화는 일종의 혼합 수식화로 간주할 수 있으므로, 비압축성 조건에서 체적 잠김 현상이 발생하지 않는 장점이 있다.⁽¹⁸⁻²⁰⁾ 이런 특성들은 무요소법에서 격자의 이용을 배제하는데 기여할 수 있다. 본 장에서는 먼저 미소 변형을 가정한 탄소성 변형에 대한 지배 방정식을 살펴보고, 여기에 J_2 -유동 법칙을 가정한 일차 최소 제곱 수식화를 제안한다. 그리고 제안된 수식화에 이동 최소 제곱 근사화를 적용한 무요소법을 제시한다.

3.1 지배 방정식

미소 변형 이론에 기초한 탄소성 변형의 지배 방정식들은 해석 영역 Ω 에 대해 다음과 같다.⁽²⁴⁾

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (4a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} \quad (4b)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla W(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^P) \quad (4c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \gamma \partial \phi / \partial \boldsymbol{\sigma} \quad (4d)$$

$$\dot{\alpha} = \gamma \partial \phi / \partial q \quad (4e)$$

$$\gamma \phi(\sigma, q) = 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \phi(\sigma, q) \leq 0 \quad (4f)$$

여기서 σ 와 ε 은 각각 응력과 변형을 텐서들이며, u 는 변위, $\dot{\varepsilon}^P$ 는 소성 변형을 속도, ϕ 는 항복 함수, γ 는 일관성 변수(consistency parameter)이다. 식 (4a)는 평형 방정식이고, 식 (4b)는 변형율과 변위의 관계식으로 여기서 $\nabla^S = (\nabla + \nabla^T)/2$ 이다. 식 (4c)는 응력과 탄성 변형율과의 관계이며, 변형 에너지 함수 $W(\varepsilon - \varepsilon^P)$ 는 상보(complementary) 에너지 함수 $\chi(\sigma)$ 와 Legendre 변환에 의해 아래와 같은 관계를 갖는다.

$$W(\varepsilon - \varepsilon^P) = -\chi(\sigma) + \sigma : (\varepsilon - \varepsilon^P) \quad (5)$$

식 (4c)는 식 (5)를 ε 또는 $(\varepsilon - \varepsilon^P)$ 에 대해 미분하면 얻어진다. 식 (4d)는 유동 법칙의 수직성(normality) 조건이며, 식 (4e)는 경화(hardening) 법칙, 식 (4f)는 항복 조건이며, 이들은 소성 변형은 에너지 소산이 최대가 되도록 일어난다는 원리로부터 유도된다. 내부 변수 α 는 켈레(conjugate) 변수 q 와 아래와 같은 관계를 가지고 있다.

$$\alpha = -\partial \Theta(q) / \partial q \quad (6)$$

여기서 $\Theta(q)$ 는 상보 경화 포텐셜이다.

구성 방정식을 시간 $t = t_n$ 에서 t_{n+1} 까지 적분하기 위해 식 (4b)에서 (4f)까지 후방(backward)-Euler 차분법을 적용하면 다음과 같다.

$$\nabla^S u_{n+1} - \varepsilon_{n+1} = 0 \quad (7a)$$

$$\sigma_{n+1} - \nabla W(\varepsilon - \varepsilon^P)_{n+1} = 0 \quad (7b)$$

$$\varepsilon_{n+1}^P - \varepsilon_n^P - \Delta \gamma \partial \phi_{n+1} / \partial \sigma = 0 \quad (7c)$$

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n - \Delta \gamma \partial \phi_{n+1} / \partial q = 0 \quad (7d)$$

$$\Delta \gamma \phi_{n+1} = 0, \quad \Delta \gamma \geq 0, \quad \phi_{n+1} \leq 0 \quad (7e)$$

여기서 $(A)_n$ 과 $(A)_{n+1}$ 은 각각 변수 A 의 시간 t_n 과 t_{n+1} 에서의 값을 나타내며, $\Delta \gamma = \gamma_{n+1} \Delta t$, $\phi_{n+1} = \phi(\sigma_{n+1}, q_{n+1})$, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ 이다. 식 (7)은 탄소성 구성 방정식을 적분하기 위한 근점 투영법(closest point projection method)을 수학적으로 표현한 것으로, 시간 t_n 의 상태 변수들과 ε_{n+1} 이 주어졌을 때 식 (7)에 의해 시간 t_{n+1} 에서의 상태 변수들을 구할 수 있다. 이런 계산은 수치적으로 반지름 회귀법(radial return method) 등에 의해 이루어진다.

이제 식 (7)을 상보 형태로 표현해 보자. 식 (5)

에 의해 식 (7b)는 아래와 같이 기술된다.

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^P - \partial \chi_{n+1} / \partial \sigma = 0 \quad (8)$$

이때 식 (7c)는 식 (7a)와 (8)에 의해 아래와 같이 상보 형태로 표현된다.

$$\nabla^S u_{n+1} - \varepsilon_n^P - \partial \chi_{n+1} / \partial \sigma - \Delta \gamma \partial \phi_{n+1} / \partial \sigma = 0 \quad (9)$$

또한 식 (6)에 의해 식 (7d)는 아래처럼 표현할 수 있다.

$$-\partial \Theta_{n+1} / \partial q + \partial \Theta_n / \partial q - \Delta \gamma \partial \phi_{n+1} / \partial q = 0 \quad (10)$$

따라서 시간에 대해 이산화(discretization)된 탄소성 구성 방정식은 식 (9), (10), (7e)와 같이 상보 형태의 표현들로 이루어진다. 그리고 여기에는 구성 방정식 적분을 위한 근점 투영법이 내부적으로 포함되어 있다. 다음 절에서 다룰 최소 제곱 수식화는 이 상보 형태에 기초한다. 그러므로 반지름 회귀법의 실제적인 수행은 필요하지 않다.

3.2 일차 최소 제곱 수식화

최소 제곱 수식화를 위해 지배 방정식을 상보 형태로 표현한 것을 정리해보자. 아래 식들에서 시간 $t = t_n$ 의 상태에서부터 시간 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 의 상태를 구하기 위한 식들로 $(n+1)$ -번째 하중단계에 해당한다고 볼 수 있다.

$$\text{div} \sigma = 0 \quad (11a)$$

$$\nabla^S u - \varepsilon_n^P - \partial \sigma \chi(\sigma) - \gamma \partial \sigma \phi(\sigma, q) = 0 \quad (11b)$$

$$-\partial_q \Theta(q) + \partial_q \Theta(q_n) - \gamma \partial_q \phi(\sigma, q) = 0 \quad (11c)$$

$$\gamma \phi = 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \phi \leq 0 \quad (11d)$$

여기서 표현의 편의를 위해 아래 첨자 $(\cdot)_{n+1}$ 을 생략하였다. 예를 들면, σ 는 실제로 σ_{n+1} 을 의미한다. 그리고 정확한 표기인 $\Delta \gamma$ 대신에 γ 를 사용하였으며, 앞으로의 기술에서도 γ 는 실제로 $\Delta \gamma$ 를 의미한다.

Galerkin 수식화에서 평형 방정식 (11a)는 약화식으로 만족시킨다. 그리고 유동 법칙 (11b), 경화 법칙 (11c), 항복 조건 (11d)는 각 적분점에서 정확히 만족시키는데, 이는 식 (7b)에서부터 (7e)에 기초한 반지름 회귀법에 의해 이루어진다.

그러나 본 논문에서 제안하는 최소 제곱 수식화는 변위 u 와 응력 σ 를 독립 변수로 사용하여, 평형 방정식과 유동 법칙은 잔여오차(residual)들의 제곱을 최소화하는 개념으로 만족시킨다. 그리고 경화 법칙과 항복 조건만을 각 적분점에서 정확히 만족시킨다.

이제 J_2 -유동 법칙에 기초한 탄소성 구성 방정

식을 생각하자. 선형 등방성 경화 법칙(hardening law)을 따르며, von-Mises 이론에 근거한 항복 조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\phi(\sigma, q) \equiv f(\sigma) - \sqrt{2/3} \kappa(q) \quad (12a)$$

$$\dot{q} \equiv \sqrt{2/3} \|\dot{\epsilon}^p\| = \sqrt{2/3} \gamma \quad (12b)$$

$$\kappa(q) \equiv \sigma_Y + \bar{K} q \quad (12c)$$

$$f(\sigma) \equiv \|\mathbf{s}\| = \sqrt{s_{ij}s_{ij}} \quad (12d)$$

여기서 ϕ 는 항복 함수, q 는 내부 변수로 상당(effective) 소성 변형을 $\bar{\epsilon}^p$ 와 같은 값이며, σ_Y 는 항복 응력, \bar{K} 는 재료 상수이다. 그리고 \mathbf{s} 는 편차 응력 텐서이다. 식 (12b)에 후방-Euler 차분법을 적용하면 다음과 같다.

$$q = q_n + \sqrt{2/3} \gamma \quad (13)$$

여기서 γ 는 실제로 $\gamma \Delta t$ 를 의미한다. 이때 식 (12a)는 다음과 같이 된다.

$$\phi = f - (2/3) \bar{K} \gamma - \sqrt{2/3} \kappa(q_n) \quad (14)$$

재료의 탄성 변형은 아래와 같이 선형이라고 가정한다.

$$\chi(\sigma) \equiv (1/2) \sigma^T \mathbf{C} \sigma \quad (15)$$

여기서 $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{E}$ 는 재료의 탄성 계수 행렬로 상수이다.

앞으로의 수식 전개에 편의를 위해 다음과 같이 정의된 기호들을 사용하기로 한다.

$$\mathbf{u} \equiv [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T \quad (16a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13}]^T \quad (16b)$$

$$\mathbf{e}^p \equiv [\epsilon_{11}^p \quad \epsilon_{22}^p \quad \epsilon_{33}^p \quad 2\epsilon_{12}^p \quad 2\epsilon_{23}^p \quad 2\epsilon_{13}^p]^T \quad (16c)$$

$$\mathbf{s} \equiv [s_{11} \quad s_{22} \quad s_{33} \quad s_{12} \quad s_{23} \quad s_{13}]^T \quad (16d)$$

$$\bar{\mathbf{s}} \equiv [s_{11} \quad s_{22} \quad s_{33} \quad 2s_{12} \quad 2s_{23} \quad 2s_{13}]^T = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \quad (16e)$$

$$\mathbf{P} \equiv \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (16f)$$

$$\mathbf{B}_s \equiv \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (16g)$$

$$\mathbf{B}_e \equiv \mathbf{B}_s^T \quad (16h)$$

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu \end{bmatrix} \quad (16i)$$

식 (16i)에서 E 는 영의 계수이고, ν 는 포와송의 비, μ 는 전단 계수이다.

변위와 응력 성분들을 독립 변수로 가정하고, 위 기호들을 사용하면 유동 법칙과 평형 방정식의 잔여오차는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{R}_u \equiv \mathbf{B}_e \mathbf{u} - \mathbf{e}_n^p - \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} - \gamma \partial_\sigma f \quad (17a)$$

$$\mathbf{R}_\sigma \equiv \mathbf{B}_s \boldsymbol{\sigma} \quad (17b)$$

최소 제곱 수식화를 위해 다음과 같은 잔여오차의 제곱의 적분을 생각한다.

$$I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \equiv \int (\mathbf{R}_u^T \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_\sigma^T \mathbf{R}_\sigma) d\Omega \quad (18)$$

최소 제곱 수식화에서는 $I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ 를 최소화하는 \mathbf{u} 와 $\boldsymbol{\sigma}$ 를 찾는다. 따라서 정류조건(stationary condition)을 적용하면 다음과 같은 변분식을 얻을 수 있다.

$$\int (\mathbf{R}_u^T \delta \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_\sigma^T \delta \mathbf{R}_\sigma) d\Omega = 0 \quad (19)$$

여기에 선형화를 위해 Newton 방법을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\int (\delta \mathbf{R}_u^T \Delta \mathbf{R}_u + \delta \mathbf{R}_\sigma^T \Delta \mathbf{R}_\sigma) d\Omega = \int (-\mathbf{R}_u^T \delta \mathbf{R}_u - \mathbf{R}_\sigma^T \delta \mathbf{R}_\sigma) d\Omega \quad (20)$$

위 식에서 고차항 $\Delta(\delta \mathbf{R}_u)$ 는 무시하였다.

이제 식 (20)에 있는 잔여오차들의 일차 변분을 생각하자. 식 (17a)로부터 \mathbf{R}_u 의 일차 변분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta \mathbf{R}_u = \mathbf{B}_e \delta \mathbf{u} - \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\sigma} - \delta \gamma \partial_\sigma f - \gamma \partial_{\sigma\sigma}^2 f \delta \boldsymbol{\sigma} \quad (21)$$

식 (16)의 기호들을 사용하면 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma})^{1/2} \quad (22)$$

따라서 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 의 일차와 이차 미분들은 아래처럼 표현할 수 있다.

$$\partial_{\sigma} f = (1/f)P\sigma = (1/f)\bar{s} \equiv n \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma\sigma}^2 f &= \frac{1}{f^2} [P f - P\sigma \frac{1}{f} (P\sigma)^T] \\ &= \frac{1}{f} (P - nn^T) \end{aligned} \quad (23b)$$

항복 조건은 각 적분점에서 정확히 만족되어야 하므로, 소성 변형이 발생하는 경우 $\delta\phi = 0$ 을 이용하면 $\delta\gamma$ 를 구할 수 있다. 식 (14)에 변분을 취하면 아래와 같다.

$$\delta\phi = \delta f - \frac{2}{3} \bar{K} dy = (\partial_{\sigma} f)^T \delta\sigma - \frac{2}{3} \bar{K} \delta\gamma \quad (24)$$

따라서 $\delta\gamma$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta\gamma = \frac{3}{2\bar{K}} (\partial_{\sigma} f)^T \delta\sigma \quad (25)$$

식 (23)과 (25)를 식 (21)에 대입하고 정리하면, δR_u 를 독립 변수들의 일차 변분, 즉 δu 와 $\delta\sigma$ 만으로 표현할 수 있다.

$$\delta R_u = B_e \delta u - \Sigma \delta\sigma \quad (26)$$

여기서 Σ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Sigma \equiv C + \frac{3}{2\bar{K}} nn^T + \frac{\gamma}{f} P - \frac{\gamma}{f} nn^T \quad (27)$$

탄성 변형만 발생하는 경우는 $\Sigma = C$ 가 사용된다. 식 (17b)로부터 R_{σ} 의 일차 변분은 아래와 같다.

$$\delta R_{\sigma} = B_s \delta\sigma \quad (28)$$

이제 식 (20)의 각 적분항들을 살펴보자. 좌변 첫 번째 항은 식 (26)에 의해 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \delta R_u^T \Delta R_u &= (B_e \delta u - \Sigma \delta\sigma)^T (B_e \Delta u - \Sigma \Delta\sigma) \\ &= \delta u^T B_e^T B_e \Delta u - \delta u^T B_e^T \Sigma \Delta\sigma \\ &\quad - \delta\sigma^T \Sigma B_e \Delta u + \delta\sigma^T \Sigma \Sigma \Delta\sigma \end{aligned} \quad (29a)$$

식 (20)의 좌변 두 번째 항은 식 (28)에 의해 다음과 같이 전개된다.

$$\delta R_{\sigma}^T \Delta R_{\sigma} = \delta\sigma^T B_s^T B_s \Delta\sigma \quad (29b)$$

또한 식 (20)의 우변의 적분항들은 아래와 같다.

$$R_u^T \delta R_u = \delta u^T B_e^T R_u - \delta\sigma^T \Sigma R_u \quad (30a)$$

$$R_{\sigma}^T \delta R_{\sigma} = \delta\sigma^T B_s^T R_{\sigma} \quad (30b)$$

식 (29)와 (30)을 식 (20)에 대입하면 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left[\int \delta u^T K_{uu} \Delta u \, d\Omega + \int \delta u^T K_{u\sigma} \Delta \sigma \, d\Omega \right] = \left[\int \delta u^T F_u \, d\Omega \right] \\ \left[\int \delta\sigma^T K_{\sigma u} \Delta u \, d\Omega + \int \delta\sigma^T K_{\sigma\sigma} \Delta \sigma \, d\Omega \right] = \left[\int \delta\sigma^T F_{\sigma} \, d\Omega \right] \quad (31)$$

위 식에 사용된 기호들은 아래처럼 정의된다.

$$K_{uu} = B_e^T B_e \quad (32a)$$

$$K_{u\sigma} = -B_e^T \Sigma \quad (32b)$$

$$K_{\sigma u} = -\Sigma B_e \quad (32c)$$

$$K_{\sigma\sigma} = \Sigma \Sigma + B_s^T B_s \quad (32d)$$

$$F_u = -B_e^T R_u \quad (33a)$$

$$F_{\sigma} = \Sigma R_u - B_s^T R_{\sigma} \quad (33b)$$

식 (27)을 보면 $1/\bar{K}$ 계수를 가지고 있다. 따라서 본 수식화는 완전 소성(perfectly plastic) 변형에는 적용할 수 없다. 이는 상보 형태에 기초한 수식화들의 특성이다.⁽²⁵⁾

이제 무요소법 구현을 위해 미지 변수 u 와 σ 에 대해 이동 최소 제곱 근사화를 적용한다.

$$u = \psi^I \hat{u}^I \quad (34a)$$

$$\sigma = \psi^I \hat{\sigma}^I \quad (34b)$$

여기서 ψ^I 는 I -번째 절점에 대한 무요소 형상함수이고, \hat{u}^I 와 $\hat{\sigma}^I$ 는 각각 변위와 응력에 대한 절점의 근사화 계수들로 이루어진 벡터이다.

식 (34)를 식 (31)에 적용하면, 다음과 같이 최소 제곱 수식화에 대한 선형 연립 대수 방정식을 얻을 수 있다.

$$K U = F \quad (35)$$

위 식에서 K 와 F 는 각각 시스템 행렬과 벡터이며, U 는 미지 변수에 대한 절점의 근사화 계수 벡터이다. 이들은 아래와 같이 성분 행렬 또는 벡터들로 이루어진다.

$$K = [K_{IJ}] \quad (36a)$$

$$F = \{F_I\} \quad (36b)$$

$$U = \{U_I\} \quad (36c)$$

여기서 K_{IJ} 는 시스템 행렬의 I -번째와 J -번째 절점들에 대한 성분 행렬이며, F_I 는 시스템 벡터의 I -번째 절점에 대한 성분 벡터이다. U_I 는 미지 벡터의 성분 벡터이다. 이들 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} K_{IJ} &= \int \psi^I \left[\begin{array}{cc} K_{uu} & K_{u\sigma} \\ K_{\sigma u} & K_{\sigma\sigma} \end{array} \right] \psi^J \, d\Omega \\ &= \left[\begin{array}{cc} \int \psi^I K_{uu} \psi^J \, d\Omega & \int \psi^I K_{u\sigma} \psi^J \, d\Omega \\ \int \psi^I K_{\sigma u} \psi^J \, d\Omega & \int \psi^I K_{\sigma\sigma} \psi^J \, d\Omega \end{array} \right] \end{aligned} \quad (37a)$$

$$F_I = \int \psi^I \left\{ \begin{matrix} F_u \\ F_\sigma \end{matrix} \right\} d\Omega = \left\{ \begin{matrix} \int \psi^I F_u d\Omega \\ \int \psi^I F_\sigma d\Omega \end{matrix} \right\} \quad (37b)$$

$$U_I = \left\{ \begin{matrix} \Delta \hat{u}^I \\ \Delta \hat{\sigma}^I \end{matrix} \right\} \quad (37c)$$

식 (37a)의 각 피적분항은 식 (34)를 식 (32)에 대입하여 구해진다. 예를 들면, 마지막 피적분항은 다음과 같다.

$$\psi^I K_{\sigma\sigma} \psi^J = \psi^I \psi^J \Sigma^T \Sigma + (B_s(\psi^I))^T B_s(\psi^J) \quad (38a)$$

마찬가지로 식 (37b)의 피적분항은 식 (34)를 식 (33)에 대입하여 구한다. 예를 들면, 두번째 성분은 다음과 같다.

$$\psi^I F_\sigma = \psi^I \Sigma R_u - (B_s(\psi^I))^T R_\sigma \quad (38b)$$

각 적분점에서 영향영역이 이 적분점을 포함하는 절점들에 대해 식 (37a)와 식 (37b)의 성분 행렬과 벡터를 계산하고 전체 시스템 행렬과 벡터에 더해 줌으로써 식 (35)의 선형 대수 연립 방정식을 얻을 수 있다. 식 (35)는 각 Newton 하중단계 내의 한 축차 과정에서의 선형화된 시스템 방정식이다.

이제 (n+1)-번째 하중단계에서의 (i+1)-번째 축차 과정을 생각하자. 식 (35)를 풀면 변위와 응력의 증분, 즉 $\Delta u_{(n+1,i+1)}$ 와 $\Delta \sigma_{(n+1,i+1)}$ 가 구해진다. 따라서 현재의 변위와 응력은 이들 증분들을 더함으로써 계산될 수 있다. 그러나 이들 증분량이 너무 크면, 이들 증분을 그대로 더하는 것은 잔여오차의 제곱 $I(u, \sigma)$ 를 오히려 증가시킬 수 있다.

이런 이유로 본 논문에서는 다음과 같이 선형 탐색(line search) 방법을 사용해 현재 상태의 해를 계산하였다.

$$u_{(n+1,i+1)} = u_{(n+1,i)} + \alpha \Delta u_{(n+1,i+1)} \quad (39a)$$

$$\sigma_{(n+1,i+1)} = \sigma_{(n+1,i)} + \alpha \Delta \sigma_{(n+1,i+1)} \quad (39b)$$

여기서 스칼라 양인 α 는 계산된 증분 방향에서 $I(u, \sigma)$ 가 최소가 되도록 결정한다.⁽²⁶⁾ 각 하중단계에서 축차는 $I(u, \sigma)$ 가 주어진 작은 값 이하가 될 때까지 수행된다.

변위와 응력의 증분에 대해 내부 변수 γ 는 각 적분점에서 경화 법칙과 항복 조건을 정확히 만족시키도록 계산된다. 이를 위해 먼저 아래의 식을 계산한다.

$$\tilde{\phi} = f(\sigma_{(n,i+1)}) - \sqrt{2/3} \kappa(q_n) \quad (40)$$

위 식에서 $\tilde{\phi} \leq 0$ 이면, 적분점은 현재 탄성 영역에

있다고 가정하며 따라서 $\gamma_{(n+1,i+1)} = 0$ 이 된다. 그리고 $\tilde{\phi} > 0$ 인 경우, 소성 변형이 일어난 것으로 판단하고 내부 변수 γ 와 소성 변형률 e^p 은 다음과 같이 구한다.

$$\gamma_{(n+1,i+1)} = \frac{3}{2K} \tilde{\phi} \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} e_{(n+1,i+1)}^p &= e_n^p + \gamma_{(n+1,i+1)} \partial \sigma f_{(n+1,i+1)} \\ &= e_n^p + \frac{\gamma_{(n+1,i+1)}}{f_{(n+1,i+1)}} P \sigma_{(n+1,i+1)} \end{aligned} \quad (41b)$$

식 (41a)는 식 (14)에서 $\phi_{(n+1,i+1)} = 0$ 의 조건으로부터 얻어진다.

4. 증분적 객관성을 가지는 수식화

대변형의 경우, 구성 방정식은 객관성을 만족시키는 형태로 기술된다. 본 장에서는 시간 적분에 대해 증분적 객관성을 가지는 구성 방정식을 살펴보고, 이를 바탕으로 3.2 절에서 제안한 미소 변형에 대한 최소 제곱 수식화를 대변형 수식화로 확장한다.

4.1 증분적 객관성을 가지는 구성 방정식
대변형을 가정하면, J_2 -유동법칙에 기초한 구성 방정식은 아래와 같이 기술된다.

$$\dot{\sigma}^{Tr} = E \cdot (d - d^p) \quad (42a)$$

$$d^p = \gamma \partial \phi / \partial \sigma = \gamma \partial f / \partial \sigma \quad (42b)$$

여기서 d 는 변형률 속도(rate of deformation)이며 d^p 는 소성 변형에 대한 변형률 속도를 나타낸다. 그리고 다른 기호들의 의미는 식 (12)에서와 같다. 식 (42a)는 식 (4c)의 확장된 형태이며, 식 (42b)는 식 (4d)에 해당한다. 구성 방정식이 객관성을 만족하기 위해서는 식 (42a)의 좌변은 객관적 응력 속도(stress rate)여야 하며, 본 연구에서는 Cauchy 응력에 대한 Truesdell 응력 속도를 사용하였다.

구성 방정식의 시간 적분을 위해 후방-Euler 차분법을 식 (42)에 적용하면 다음과 같다.

$$\Delta t \hat{\sigma}_{n+1}^{Tr} = E \cdot (\Delta t d_{n+1} - \Delta t d_{n+1}^p) \quad (43a)$$

$$\Delta t d_{n+1}^p = \Delta \gamma \partial f_{n+1} / \partial \sigma \quad (43b)$$

위 식들에서 $\Delta t \hat{\sigma}_{n+1}^{Tr}$ 와 $\Delta t d_{n+1}$ 은 증분적 객관성을 만족하도록 계산되어야 한다. 이를 위해 본 연구에서는 물질 좌표계에서 표현된 텐서들의 시간 증분을 이용한다. 즉, Cauchy-Green 텐서 C 와 2차

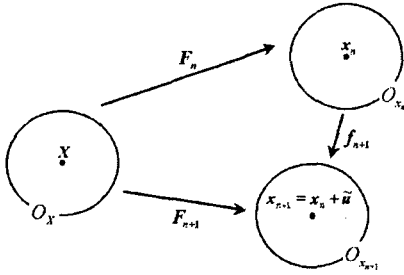


Fig. 1 Deformation gradients between configurations

Piola-Kirchoff 응력 텐서 S 의 증분을 고려하며, 이들은 물질 좌표계에서 증점된 강체 운동에 대해 변하지 않는다.

먼저 시간 간격 $[t_n, t_{n+1}]$ 에서 $\Delta t d_{n+1}$ 의 증분적 객관성을 갖는 근사화를 위해 아래의 항등식을 생각한다.

$$\dot{C} = 2F^T dF \quad (44)$$

여기서 F 는 변형 구배(deformation gradient)이다. 위 식에 후방-Euler 차분법을 적용하면 아래와 같다.

$$\Delta t \dot{C}_{n+1} = C_{n+1} - C_n = 2\Delta t F_{n+1}^T d_{n+1} F_{n+1} \quad (45)$$

위 식에서 $F_{n+1} = \partial x^{n+1} / \partial X$ 은 변형전 형상에서 시간 t_{n+1} 에서의 변형 형상으로서의 변형 구배이다. Fig. 1은 본 논문에서 사용한 각 변형 형상 간의 변형 구배 기호의 정의를 보여준다. 이를 이용하면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta t d_{n+1} &= \frac{1}{2} F_{n+1}^{-T} (C_{n+1} - C_n) F_{n+1}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (I - f_{n+1}^{-T} f_{n+1}^{-1}) \end{aligned} \quad (46)$$

여기서 $f_{n+1} = \partial x^{n+1} / \partial x^n$ 이다. 이제부터 수식 전개 편의를 위해 $\Delta t d_{n+1}$ 를 $\tilde{\epsilon}_{n+1}$ 로 표현하기로 한다. 첨자 표기법으로 $\tilde{\epsilon}_{n+1}$ 은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} (\tilde{\epsilon}_{n+1})_{ij} &\equiv (\Delta t d_{n+1})_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j^{n+1}} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i^{n+1}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i^{n+1}} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_j^{n+1}} \end{aligned} \quad (47)$$

여기서 \tilde{u} 는 시간 t_n 과 t_{n+1} 사이의 변위 증분을 나타낸다.

Truesdell 응력 속도는 2차 Piola-Kirchoff 응력과 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$\dot{S} = JF^{-1} \dot{\sigma}^{Tr} F^{-T} \quad (48)$$

여기서 $J = \det(F)$ 이며, 후방-Euler 차분법을 적용하면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$\Delta t \dot{S}_{n+1} = \Delta t J_{n+1} F_{n+1}^{-1} \dot{\sigma}_{n+1}^{Tr} F_{n+1}^{-T} \quad (49)$$

따라서 $\Delta t \dot{\sigma}_{n+1}^{Tr}$ 의 증분적 객관성을 갖는 근사화는 아래와 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \Delta t \dot{\sigma}_{n+1}^{Tr} &= \frac{1}{J_{n+1}} F_{n+1} (S_{n+1} - S_n) F_{n+1}^T \\ &= \sigma_{n+1} - \frac{1}{\tilde{J}_{n+1}} f_{n+1} \sigma_n f_{n+1}^T \end{aligned} \quad (50)$$

여기서 $\tilde{J}_{n+1} = \det(f_{n+1})$ 이다.

식 (43b)와 (50)을 식 (43a)에 대입하면, 다음과 같이 유동 법칙의 증분 형태를 구할 수 있다.

$$\sigma_{n+1} - \frac{1}{\tilde{J}_{n+1}} f_{n+1} \sigma_n f_{n+1}^T = E \cdot (\tilde{\epsilon}_{n+1} - \Delta \gamma \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma}) \quad (51)$$

위 식을 아래처럼 표현할 수도 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{n+1} - E^{-1} \cdot \sigma_{n+1} + (1/\tilde{J}_{n+1}) E^{-1} \cdot f_{n+1} \sigma_n f_{n+1}^T \\ - \Delta \gamma \partial f_{n+1} / \partial \sigma = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

이 식은 유동 법칙을 상보 형태로 표현한 것으로, 식 (9)의 확장된 형태에 해당한다.

식 (51)과 (52)가 증분적 객관성을 만족하는지를 보기 위해, 시간 간격 $[t_n, t_{n+1}]$ 에서 강체 변형이 일어난다고 가정하자. 이때 $x^{n+1} = Qx^n + c$ 로 표현할 수 있으며, 여기서 Q 는 회전 텐서이고 c 는 상수 벡터이다. 따라서 $f_{n+1} = Q$ 이고 $\tilde{J}_{n+1} = 1$ 이 된다. 식 (46)에 의해 $\tilde{\epsilon}_{n+1} = 0$ 이 된다. 이 경우 식 (51) 또는 (52)로부터 $\sigma_{n+1} = Q\sigma_n Q^T$ 가 얻어지므로 객관성이 만족됨을 알 수 있다. 대변형에서의 J_2 -소성 이론에 대한 보다 일반적인 기술은 다른 문헌을 참고하기 바란다.⁽²⁴⁾

4.2 대변형 최소 제곱 수식화

대변형 문제의 최소 제곱 수식화를 위해 식 (9)의 유동 법칙 대신에 식 (52)를 사용한다. 따라서 유동 법칙에 대한 잔여오차를 식 (17a) 대신에 다음과 같이 새로 정의한다.

$$R_u \equiv \tilde{\epsilon} - C\sigma + (1/\tilde{J})C\bar{\sigma}_n - \gamma \partial f / \partial \sigma \quad (53)$$

위 식과 앞으로의 수식 전개에서 식 (16)에 정의된 기호들 대부분을 그대로 사용하고, 일부분만 확장된 수식화에 적합하도록 수정하려 한다. 식 (53)에 쓰인 $\tilde{\epsilon}$ 의 실제 정의는 다음과 같다.

$$\tilde{\epsilon} \equiv [\tilde{\epsilon}_{11} \quad \tilde{\epsilon}_{22} \quad \tilde{\epsilon}_{33} \quad 2\tilde{\epsilon}_{12} \quad 2\tilde{\epsilon}_{23} \quad 2\tilde{\epsilon}_{13}]^T \quad (54)$$

그리고 $\bar{\sigma}_n$ 는 $f \sigma_n f^T$ 의 여섯 개의 독립된 성분들로 이루어진 벡터를 나타낸다. 이때 R_u 의 일차

변분은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\delta R_u = \delta \bar{\epsilon} - C \delta \sigma + C \delta \left(\frac{1}{J} \bar{\sigma}_n \right) - \delta \left(\gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \quad (55)$$

식 (21)과 비교하면 식 (55)의 우변 첫번째 항이 다르고, 세번째 항이 추가되었음을 알 수 있다. 따라서 본 절에서는 이 항들만 다루려 한다.

식 (48)에 의해 $\delta \bar{\epsilon}_{ij}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) \quad (56)$$

여기서 $\partial(\cdot)/\partial x_j$ 는 $(n+1)$ -번째 하중 단계의 $(i+1)$ -번째 축차에서의 형상에 대한 공간 미분을 의미하며, 본 연구에서는 이를 아래와 같이 가정한다.

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j^{(n,i+1)}} \approx \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j^{(n,i)}} \quad (57)$$

식 (56)은 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\delta \bar{\epsilon} = (B_{e1} - B_{e2}) \delta u \quad (58)$$

여기서 기호들은 다음과 같이 정의된다.

$$B_{e1} \equiv \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (59a)$$

$$B_{e2} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{h}_{11} \partial/\partial x & \tilde{h}_{12} \partial/\partial x & \tilde{h}_{13} \partial/\partial x \\ \tilde{h}_{12} \partial/\partial y & \tilde{h}_{22} \partial/\partial y & \tilde{h}_{32} \partial/\partial y \\ \tilde{h}_{13} \partial/\partial z & \tilde{h}_{23} \partial/\partial z & \tilde{h}_{33} \partial/\partial z \\ \tilde{h}_{12} \partial_x + \tilde{h}_{11} \partial_y & \tilde{h}_{22} \partial_x + \tilde{h}_{21} \partial_y & \tilde{h}_{32} \partial_x + \tilde{h}_{31} \partial_y \\ \tilde{h}_{13} \partial_y + \tilde{h}_{12} \partial_z & \tilde{h}_{23} \partial_y + \tilde{h}_{22} \partial_z & \tilde{h}_{33} \partial_y + \tilde{h}_{32} \partial_z \\ \tilde{h}_{13} \partial_x + \tilde{h}_{11} \partial_z & \tilde{h}_{23} \partial_x + \tilde{h}_{21} \partial_z & \tilde{h}_{33} \partial_x + \tilde{h}_{31} \partial_z \end{bmatrix} \quad (59b)$$

$$\tilde{h}_{ij} \equiv \partial \tilde{u}_i / \partial x_j \quad (59c)$$

식 (59b)에서 공간 미분을 간략히 표현하였는데, 예를 들면 ∂_x 는 $\partial/\partial x$ 를 의미한다.

이제 식 (55)의 우변 세번째 항을 살펴보자. 이 항은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$C \delta \left(\frac{1}{J} \bar{\sigma}_n \right) = -C \frac{1}{J^2} \bar{\sigma}_n \delta \bar{J} + C \frac{1}{J} \delta \bar{\sigma}_n \quad (60)$$

위 식에서 $\delta \bar{J}$ 아래처럼 표현할 수 있다.

$$\delta \bar{J} = \tilde{J} B_{e3} \delta u \quad (61a)$$

$$B_{e3} \equiv \left[\partial/\partial x \quad \partial/\partial y \quad \partial/\partial z \right] \quad (61b)$$

그리고 $\delta f = \partial(\delta u)/\partial x^n$ 인 사실을 이용하면 다음과 같은 표현식을 얻을 수 있다.

$$\delta \bar{\sigma}_n = B_{e4} \delta u \quad (62)$$

여기서 B_{e4} 는 6×6 행렬이며 영이 아닌 성분들을 기술하면 아래와 같다.

$$(B_{e4})_{11} = 2 f_{1k} \sigma_{km}^n \partial/\partial x_m^n,$$

$$(B_{e4})_{22} = 2 f_{2k} \sigma_{km}^n \partial/\partial x_m^n,$$

$$(B_{e4})_{33} = 2 f_{3k} \sigma_{km}^n \partial/\partial x_m^n,$$

$$(B_{e4})_{41} = f_{2k} \sigma_{km}^n \frac{\partial}{\partial x_m^n}, \quad (B_{e4})_{42} = f_{1k} \sigma_{km}^n \frac{\partial}{\partial x_m^n},$$

$$(B_{e4})_{52} = f_{3k} \sigma_{km}^n \frac{\partial}{\partial x_m^n}, \quad (B_{e4})_{53} = f_{2k} \sigma_{km}^n \frac{\partial}{\partial x_m^n},$$

$$(B_{e4})_{61} = f_{3k} \sigma_{km}^n \frac{\partial}{\partial x_m^n}, \quad (B_{e4})_{63} = f_{1k} \sigma_{km}^n \frac{\partial}{\partial x_m^n} \quad (63)$$

여기서 첨자 k 와 m 은 1, 2, 3의 값을 가지며, σ_{km}^n 은 σ_n 의 (k, m) -번째 성분이다. 식 (61a)와 (62)를 식 (60)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$C \delta \left(\frac{1}{J} \bar{\sigma}_n \right) = -\frac{1}{J} C \bar{\sigma}_n B_{e3} \delta u + \frac{1}{J} C B_{e4} \delta u \quad (64)$$

이제 식 (16h)의 B_e 를 아래와 같이 수정하여 다시 정의하자.

$$B_e \equiv B_{e1} - B_{e2} - \frac{1}{J} C \bar{\sigma}_n B_{e3} + \frac{1}{J} C B_{e4} \quad (65)$$

위 정의를 이용하면 R_u 의 일차 변분을 나타내는 식 (55)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta R_u = B_e \delta u - C \delta \sigma - \delta \gamma \partial_\sigma f - \gamma \partial_{\sigma\sigma} f \delta \sigma \quad (66)$$

위 식은 미소 변형의 경우인 식 (21)과 동일한 형태임을 알 수 있다. 따라서 식 (53)와 식 (65)의 정의를 이용하여 수식화를 전개하면, 시스템 행렬과 벡터는 3.2 절에서 기술한 것과 동일한 형태를 가지게 된다. 미소 변형의 경우 B_e 의 정의는 식 (16h)를 따르며, 대변형 수식화의 경우 B_e 는 식 (65)에 의해 구한다.

5. 경계 및 마찰 접촉 조건의 처리

본 장에서는 탄소성 최소 제곱 무요소법에서의 경계 조건의 처리 방법을 제시한다. 실제 문제들에 있어서 해석 영역의 경계는 변위 또는 응력이

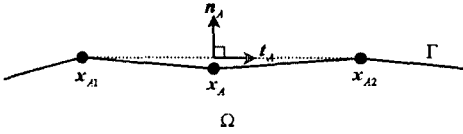


Fig. 2 Discretization of surface geometry

주어진 부분과 접촉에 의해 마찰이 가해지는 부분으로 나눌 수 있다. 본 논문에서는 이들 조건의 처리를 위해 벌칙법을 사용하였다. 각 절에서는 2차원 문제로 가정하고 본 연구에서 사용한 처리 방법들을 기술한다.

5.1 변위 경계 조건

2차원 문제의 경우 변위 경계 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$u_n = n^T u = \bar{u}_n \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (67a)$$

$$u_t = t^T u = \bar{u}_t \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (67b)$$

여기서 \bar{u}_n 은 경계 Γ_1 에서 수직 방향으로 주어진 변위이고, \bar{u}_t 는 경계 Γ_2 에서 접선 방향으로 주어진 변위이다. $n = [n_1 \ n_2]^T$ 은 경계에서의 법선벡터이며, $t = [t_1 \ t_2]^T$ 는 접선벡터이다.

위 경계 조건들을 벌칙법으로 구속하기 위해, 다음과 같은 범함수가 식 (18)의 우변에 추가된다.

$$I_{Bu}(u, \sigma) \equiv (\alpha_u/2) \int_{\Gamma_1} (n^T u - \bar{u}_n)^2 d\Gamma + (\alpha_u/2) \int_{\Gamma_2} (t^T u - \bar{u}_t)^2 d\Gamma \quad (68)$$

여기서 α_u 는 벌칙 상수이며, 본 논문에서는 시스템 행렬의 대각선 항들의 평균에 10^4 에서 10^6 사이의 값을 곱하여 사용하였다. 이 식을 이산화(discretization)하기 위해 경계의 각 절점에서 선점법(collocation)이 사용된다.

$$I_{Bu}(u, \sigma) \approx \frac{\alpha_u}{2} \sum_{A \in \Gamma_1} (n^T u - \bar{u}_n)_A^2 + \frac{\alpha_u}{2} \sum_{A \in \Gamma_2} (t^T u - \bar{u}_t)_A^2 \quad (69)$$

여기서 A 는 경계에 있는 절점을 나타내며, 해당되는 경계에 있는 모든 절점들이 고려된다. 현재 변형 형상에서 A -번째 절점에서의 접선벡터는 Fig. 2와 같이 이웃한 절점들을 잇는 선분의 방향으로 근사화하여 사용한다.

$$t_A = (x_{A2} - x_{A1})/l_A, \quad l_A = \|x_{A2} - x_{A1}\| \quad (70)$$

이때 법선벡터는 다음과 같이 근사화한다.

$$n_A = e_3 \times t_A \quad (71)$$

수직 방향의 변위 조건을 $x_A \in \Gamma_1$ 에서 만족시키기 위해 정류조건(stationary condition)을 적용하면

다음과 같다.

$$(\alpha_u (\delta u^T n + \delta n^T u) (n^T u - \bar{u}_n))_A = 0 \quad (72)$$

이 식을 Newton 방법을 이용해 선형화하면 다음과 같다.

$$(\alpha_u (\delta u^T n + \delta n^T u) (n^T \Delta u + u^T \Delta n))_A = -(\alpha_u (\delta u^T n + \delta n^T u) (n^T u - \bar{u}_n))_A \quad (73)$$

식 (70)과 (71)에 $\delta n = t_A^T (\delta x_{A2} - \delta x_{A1})$ 라는 관계를 이용하면, 아래의 식들을 얻을 수 있다.

$$\delta \bar{\alpha}_A = n_A n_A^T (\delta u_{A2} - \delta u_{A1}) / l_A \quad (74a)$$

$$\delta n_A = -t_A n_A^T (\delta u_{A2} - \delta u_{A1}) / l_A \quad (74b)$$

이 식들을 식 (73)에 대입하면 다음과 같다.

$$\delta \bar{u}_A (\alpha_u N^T N)_A \Delta \bar{u}_A = -\delta \bar{u}_A (\alpha_u N^T (u_n - \bar{u}_n))_A \quad (75)$$

여기서 \bar{u}_A 와 N_A 는 아래와 같다.

$$\bar{u}_A = [u_A \ u_{A1} \ u_{A2}]^T \quad (76a)$$

$$N(x_A) = N_A \equiv \begin{bmatrix} n_A^T & \frac{u_t(x_A)}{l_A} n_A^T & -\frac{u_t(x_A)}{l_A} n_A^T \end{bmatrix} \quad (76b)$$

이제 다음과 같이 표현되는 변위의 무요소 근사화를 생각하자.

$$u(x) = \psi^I(x) \hat{u}^I = \Psi(x) \cdot \hat{U} \quad (77)$$

$$\Psi \equiv \begin{bmatrix} \psi^1 & 0 & \psi^2 & 0 & \dots & \psi^N & 0 \\ 0 & \psi^1 & 0 & \psi^2 & \dots & 0 & \psi^N \end{bmatrix} \quad (78a)$$

$$\hat{U} = [\hat{u}^1]^T \ [\hat{u}^2]^T \ \dots \ [\hat{u}^N]^T]^T \quad (78b)$$

식 (76a)를 식 (77)를 이용해 표현하고, 이를 식 (75)에 대입하면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$\delta \hat{U}^T (\alpha_u \bar{\Psi}_A^T N_A^T N_A \bar{\Psi}_A) \Delta \hat{U} = -\delta \hat{U}^T (\alpha_u \bar{\Psi}_A^T N_A^T (u_n - \bar{u}_n)_A) \quad (79)$$

여기서 $\bar{\Psi}_A$ 는 무요소 형상 함수의 값으로 이루어진 행렬로서 아래와 같다.

$$\bar{\Psi}_A = [\psi_A^T \ \psi_{A1}^T \ \psi_{A2}^T]^T \quad (80)$$

수직 변위 경계 조건을 적용하기 위해서는 각 절점 $x_A \in \Gamma_1$ 에 대해 식 (79)의 성분을 식 (35)의 시스템 방정식에 추가하면 된다.

접선 방향의 변위 조건에 대해 정류조건을 적용하면 $x_A \in \Gamma_2$ 에 대해 다음과 같다.

$$(\alpha_u (\delta u^T t + \delta t^T u) (t^T u - \bar{u}_t))_A = 0 \quad (81)$$

수직 변위 조건에서와 같은 절차를 거치면, 시스템

템 방정식 추가될 성분은 아래에 의해 구해진다.

$$\begin{aligned} & \delta \hat{U}^T \left(\alpha_u \bar{\Psi}_A^T T_A^T T_A \bar{\Psi}_A \right) \Delta \hat{U} \\ & = -\delta \hat{U}^T \left(\alpha_u \bar{\Psi}_A^T T_A^T (u_i - \bar{u}_i)_A \right) \end{aligned} \quad (82)$$

여기서 T_A 의 정의는 아래와 같다.

$$T(x_A) = T_A \equiv \begin{bmatrix} t_A^T & -\frac{u_n(x_A)}{l_A} n_A^T & \frac{u_n(x_A)}{l_A} n_A^T \end{bmatrix} \quad (83)$$

5.2 응력 경계 조건

응력 경계는 다음과 같이 주어진다.

$$t_n = p^T \sigma = \bar{t}_n \quad \text{on } \Gamma_3 \quad (84a)$$

$$t_t = q^T \sigma = \bar{t}_t \quad \text{on } \Gamma_4 \quad (84b)$$

위 식에서 \bar{t}_n 과 \bar{t}_t 는 각각 경계 Γ_3 와 Γ_4 에서 주어진 수직 방향과 접선 방향의 응력들이다. 그리고 벡터 p 와 q 는 아래와 같이 정의된다.

$$p = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_2^2 & 2n_1 n_2 \end{bmatrix}^T \quad (85a)$$

$$q = [t_1 n_1 \quad t_2 n_2 \quad t_1 n_2 + t_2 n_1]^T \quad (85b)$$

식 (84)의 경계 조건을 벌칙법으로 구축하기 위해, 아래의 범함수가 식 (18)의 우변에 추가된다.

$$I_{Bt}(u, \sigma) \equiv \frac{\alpha_t}{2} \sum_{A \in \Gamma_3} (p^T \sigma - \bar{t}_n)_A^2 + \frac{\alpha_t}{2} \sum_{A \in \Gamma_4} (q^T \sigma - \bar{t}_t)_A^2 \quad (86)$$

여기서 α_t 는 벌칙 상수이며, A 는 각 경계에 있는 절점을 나타낸다.

수직 응력 조건에 대한 항에 정류조건을 적용하면 각 절점 $x_A \in \Gamma_3$ 에서 아래의 식을 얻게 된다.

$$\left(\alpha_t (\delta \sigma^T p + \delta p^T \sigma) (p^T \sigma - \bar{t}_n) \right)_A = 0 \quad (87)$$

여기에 Newton 방법을 적용하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_t (\delta \sigma^T p + \delta p^T \sigma) (p^T \Delta \sigma + \sigma^T \Delta p) \right)_A \\ & = -\left(\alpha_t (\delta \sigma^T p + \delta p^T \sigma) (t_n - \bar{t}_n) \right)_A \end{aligned} \quad (88)$$

식 (74)를 이용하면 위 식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \delta \bar{u}_A^T \left(\alpha_t P^T P \right)_A \Delta \bar{u}_A + \delta \bar{u}_A^T \left(\alpha_t P^T p^T \right)_A \Delta \sigma_A \\ & + \delta \sigma_A^T \left(\alpha_t p P \right)_A \Delta \bar{u}_A + \delta \sigma_A^T \left(\alpha_t p p^T \right)_A \Delta \sigma_A \quad (89) \\ & = -\delta \bar{u}_A^T \left(\alpha_t P^T (t_n - \bar{t}_n) \right)_A - \delta \sigma_A^T \left(\alpha_t p (t_n - \bar{t}_n) \right)_A \end{aligned}$$

위 식에서 P_A 아래와 같다.

$$P(x_A) = P_A \equiv \frac{2t_i(x_A)}{l_A} \begin{bmatrix} \theta^T & n_A^T & -n_A^T \end{bmatrix} \quad (90)$$

응력에 대한 무요소 근사화는 아래처럼 표현된다.

$$\sigma(x) = \psi^I(x) \hat{\sigma}^I = \Psi(x) \cdot \hat{S} \quad (91a)$$

$$\hat{S} = \left[(\hat{\sigma}^1)^T \quad (\hat{\sigma}^2)^T \quad \dots \quad (\hat{\sigma}^N)^T \right]^T \quad (91b)$$

식 (77)과 (91a)을 식 (89)에 대입하면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \delta \hat{U}^T \left(\alpha_t \bar{\Psi}_A^T P_A^T P_A \bar{\Psi}_A \right) \Delta \hat{U} + \delta \hat{U}^T \left(\alpha_t \bar{\Psi}_A^T P_A^T P_A^T \Psi_A \right) \Delta \hat{S} \\ & + \delta \hat{S}^T \left(\alpha_t \Psi_A^T P_A P_A \bar{\Psi}_A \right) \Delta \hat{U} + \delta \hat{S}^T \left(\alpha_t \Psi_A^T P_A P_A^T \Psi_A \right) \Delta \hat{S} \\ & = -\delta \hat{U}^T \left(\alpha_t \bar{\Psi}_A^T P_A^T (t_n - \bar{t}_n)_A \right) - \delta \hat{S}^T \left(\alpha_t \Psi_A^T P_A (t_n - \bar{t}_n)_A \right) \end{aligned} \quad (92)$$

수직 응력 조건을 적용하기 위해서는 각 절점 $x_A \in \Gamma_3$ 에 대해 식 (92)의 성분을 식 (35)의 시스템 방정식에 추가하면 된다.

같은 방법으로, 접선 방향의 응력 조건의 경우는 절점 $x_A \in \Gamma_4$ 에 대해 아래의 식을 시스템 방정식에 추가한다.

$$\begin{aligned} & \delta \hat{U}^T \left(\alpha_t \bar{\Psi}_A^T Q_A^T Q_A \bar{\Psi}_A \right) \Delta \hat{U} + \delta \hat{U}^T \left(\alpha_t \bar{\Psi}_A^T Q_A^T Q_A^T \Psi_A \right) \Delta \hat{S} \\ & + \delta \hat{S}^T \left(\alpha_t \Psi_A^T Q_A Q_A \bar{\Psi}_A \right) \Delta \hat{U} + \delta \hat{S}^T \left(\alpha_t \Psi_A^T Q_A Q_A^T \Psi_A \right) \Delta \hat{S} \\ & = -\delta \hat{U}^T \left(\alpha_t \bar{\Psi}_A^T Q_A^T (t_n - \bar{t}_n)_A \right) - \delta \hat{S}^T \left(\alpha_t \Psi_A^T Q_A (t_t - \bar{t}_t)_A \right) \end{aligned} \quad (93)$$

여기서 Q_A 는 아래와 같다.

$$Q(x_A) = Q_A \equiv -c_A \begin{bmatrix} \theta^T & -n_A^T & n_A^T \end{bmatrix} \quad (94a)$$

$$c_A = \frac{1}{l_A} (t_n - t_1^2 \sigma_{11} - t_2^2 \sigma_{22} - 2t_1 t_2 \sigma_{12})_A \quad (94b)$$

5.3 마찰 접촉 경계 조건

공구(tool)나 다이(die)와 접촉이 발생하는 경계 Γ_c 에서의 조건은 혼합되어 있다. 먼저 두 영역이 서로 침투할 수 없다는 제한 조건은 아래와 같이 $x \in \Gamma_c$ 에서의 수직 갭(normal gap), g_n 이 영이라는 식으로 표현된다.

$$g_n \equiv (x - x_C) \cdot n = 0 \quad (95)$$

여기서 x_C 는 다이에 대한 x 의 근거리 투영점이며, n 은 재료에서 다이로 향하는 법선 벡터이다. 본 논문에서 다이는 강체로 가정하고, t 와 n 은 접촉면에서의 다이의 형상으로부터 주어진다고 생각한다. 따라서 이들의 변분, 즉 δt 와 δn 을 무시할 수 있다. 이 경우 식 (95)는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$n^T u = n^T (x_C - X) \quad (96)$$

여기서 X 는 x 의 변형전 형상에서의 위치를 나타낸다. 식 (96)은 Γ_c 에서의 수직 변위 조건에 해당하며, 따라서 이 조건은 5.1 절에서 기술한 방법

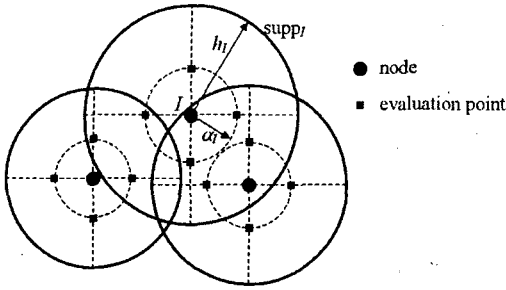


Fig. 3 Support integration: Generation of integration points using influence domain

을 사용해 구축한다.

접선 방향으로의 마찰력이 발생하며, 본 연구에서는 다음과 같은 Coulomb 마찰력 모델을 가정한다.

$$\begin{cases} \text{if } |t_t| \leq \mu |t_n|, & g_t = 0 & (\text{stick}) \\ \text{otherwise,} & t_t = -\text{sgn}(g_t) \mu |t_n| & (\text{slip}) \end{cases} \quad (97)$$

위 식에서 μ 는 마찰 계수이고, g_t 는 접선 방향으로의 상대 변위로서, 정확히는 각 하중단계에서의 상대 변위 증분량이다. 만약 $|t_t| \leq \mu |t_n|$ 인 경우, $g_t = 0$ 의 조건은 5.1 절의 방법으로 구축한다.

본 연구에서 미끄러짐(slip) 경계 조건은 아래와 같은 범함수를 식 (18)에 추가하는 벌칙법으로 구축한다.

$$I_{Bc}(u, \sigma) \equiv \frac{\alpha_I}{2} \sum_{A \in \Gamma_c} (q^T \sigma - \text{sgn}(g_t) \mu p^T \sigma)_A^2 \quad (98)$$

이 식에 정류조건과 Newton 선형화를 차례로 적용하면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \sigma_A^T (\alpha_I (q - \text{sgn}(g_t) \mu p) (q^T - \text{sgn}(g_t) \mu p^T))_A \Delta \sigma_A \\ = -\delta \sigma_A^T (\alpha_I (q - \text{sgn}(g_t) \mu p) (t_t - \text{sgn}(g_t) \mu t_n))_A \end{aligned} \quad (99)$$

여기에 식 (91a)의 무요소 근사화를 적용하면, 접촉 경계상의 각 절점 $x_A \in \Gamma_c$ 에서 시스템 방정식에 추가되는 성분을 구할 수 있다.

6. 수치 예제

제안한 탄소성 변형에 대한 최소 제곱 무요소법과 경계 조건 처리 방법들의 효용성 및 특성을 수치 예제들을 통해 알아보고자 한다.

무요소법이 장점을 갖기 위해서는 적분 과정에서 요소와 같은 격자의 사용을 피하여야 한다. 본 논문에서는, Fig. 3 와 같이 절점의 영향영역 내부에서 적분점을 분포시키는 방법을 사용한다. 각 영향영역에 4 개의 적분점을 생성시키며, 생성하는

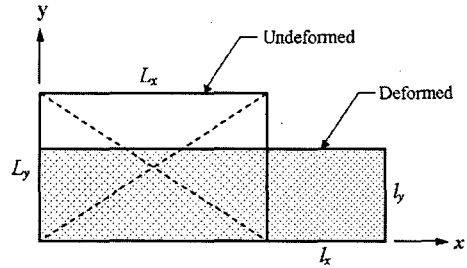


Fig. 4 Finite extension example

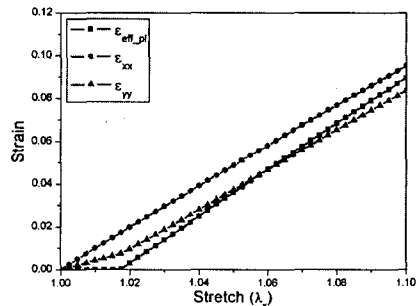
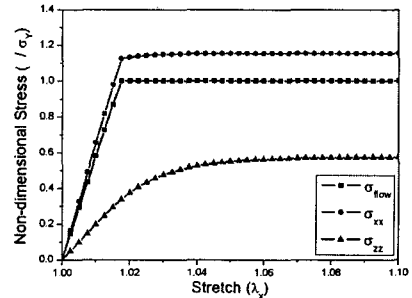


Fig. 5 The stress and strain curves of LSMFM

적분점들과 해당 절점과의 거리 α_I 는 아래와 같이 정해준다.

$$\alpha_I = r \times \frac{h_I}{\alpha} \quad (100)$$

여기서 r 은 정해진 비이며, h_I 는 영향반경, α 는 영향반경과 절점간의 거리 비이다. 본 논문의 모든 예제에서 $r = 0.25$ 를 사용하였으며, 2 장에서 언급했듯이 $\alpha = 1.5$ 이다. 모든 절점 근처에 대해 이런 방법으로 적분점을 분포시킨 후 각 적분점에 $\pi h_I^2 / 4$ 의 가중값을 임시로 할당한다. 여기서 해석 영역 외부에 있는 적분점은 제거한다. 해석영역 내부 모든 적분점의 임시 가중값을 합한 후, 이 값을 전체 해석영역의 면적으로 나눈다. 이 비로 임시 가중값을 나눈 값을 적분점의 실제 가중값으로 사용한다. 이 방법은 적분의 정확성에 둔감한 최소 제곱 무요소법에서는 잘 작동할 수 있다.

Table 1 The comparison of LSMFM and Galerkin FEM for the finite extension example

Stretch (λ_x)	Flow stress (MPa)		Effective plastic strain	
	LSMFM	FEM	LSMFM	FEM
1.015	435.18146	436.26202	0.	0.
1.025	500.00084	500.00083	0.008381	0.008299
1.050	500.00360	500.00355	0.035961	0.035563
1.075	500.00630	500.00624	0.062995	0.062630
1.100	500.00895	500.00896	0.089463	0.089154

6.1 단순 인장 문제

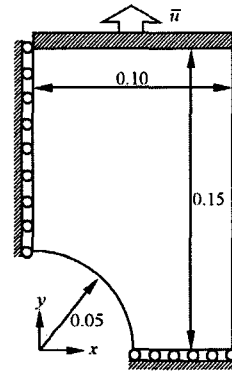
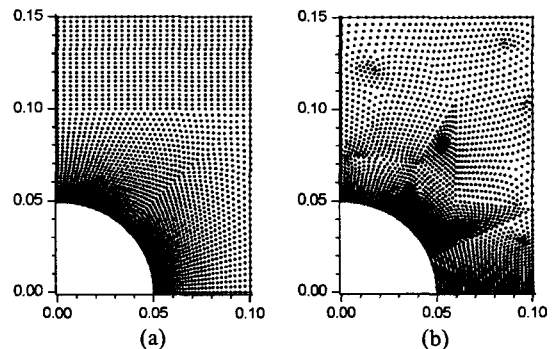
검증 예제로 Fig. 4와 같은 단순 인장 문제를 평면 변형을 변형 가정하에서 해석하였다. 여기서 치수는 $L_x = 0.04\text{ m}$, $L_y = 0.01\text{ m}$ 이며, 재료 상수로는 영의 계수 $E = 30\text{ GPa}$, 포와송의 비 $\nu = 0.3$, 초기 항복 응력 $\sigma_Y = 500\text{ MPa}$, 등방성 경화 계수 $\bar{K} = 0.1\text{ MPa}$ 을 사용하였다.

Fig. 5는 연신율 λ_x 에 따른 응력과 변형율을 보여준다. 여기서 σ_{flow} 는 흐름 응력을 나타내며, ε_{eff_pl} 는 상당 소성 변형율을 의미한다. Table 1은 특정 연신율에 대해 이 값들을 Galerkin 유한요소법의 결과와 비교하였다. 유한요소 해석 결과는 상용 코드인 ABAQUS의 결과이며, 이를 위해 혼합 수식화에 기초한 4-절점 요소를 사용하였다. 최소 제곱 무요소법을 이용한 해석 결과와 유한요소 해석 결과가 잘 일치함을 관찰할 수 있다.

6.2 구멍이 있는 평판의 인장 문제

미소 변형 이론에 기초한 최소 제곱 무요소법의 타당성을 검증하기 위해 Fig. 6과 같은 문제를 평면 응력 상태를 가정하여 해석하였다. 미소 변형 수식화는 본 예제에서만 사용되었다.

Fig. 6은 문제의 기하학적 형상을 보여준다. 평판의 위면에 변위 경계 조건이 주어졌으며, 재료 상수로는 $E = 100$, $\nu = 0.3$, $\sigma_Y = 1.0$, $\bar{K} = 1.0$ 을 사용하였다. 무요소 해석을 위해 두가지 절점 분포를 사용하였는데, Fig. 7은 이를 보여준다. Fig. 7(a)는 규칙적인 절점 분포로서 2511개의 절점을 사용하였으며, Fig. 7(b)는 2813개의 절점으로 이루어진 비교적 불규칙적인 절점 분포이다. 비교를 위해 규칙적인 분포에 대해서는 요소 격자를 구성하고 여기에 4×4 Gauss 구적법 적분을 사용한 해석도 추가로 수행하였다. 또한 Galerkin 유한요소법인 ABAQUS의 결과와도 비교하였다. 여기서는 Fig. 7(a)의 규칙적인 절점 분포로부터 4-절점 요소

**Fig. 6** The extension of perforated plate**Fig. 7** Initial distribution of nodes: (a) regular distribution; (b) irregular distribution

들을 구성하여 해석하였으며, 기하학적 비선형성은 무시하였다. 네 경우의 해석 결과들을 정량적으로 비교하기 위해, 두 해석 결과 u_1^h 와 u_2^h 에 다음과 같이 상대 차이 놈(difference norm)을 정의한다.

$$\text{Relative difference norm} = \frac{\|u_1^h - u_2^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_1^h\|_{L^2(\Omega)}} \quad (101)$$

최소 제곱 무요소 해석은 $\bar{u} = 0.05$ 일 때까지 80 하중 단계로 나누어 해석하였다. 각 하중 단계에서

Table 2 The relative difference norms of displacement among LSMFM results for the perforated plate problem

	Reference result			
	LSMFM 1	LSMFM 2	LSMFM 3	FEM
LSMFM 1	0.	0.00165	0.00292	0.00460
LSMFM 2	0.00165	0.	0.00216	0.00344
LSMFM 3	0.00292	0.00217	0.	0.00229
FEM	0.00461	0.00344	0.00229	0.

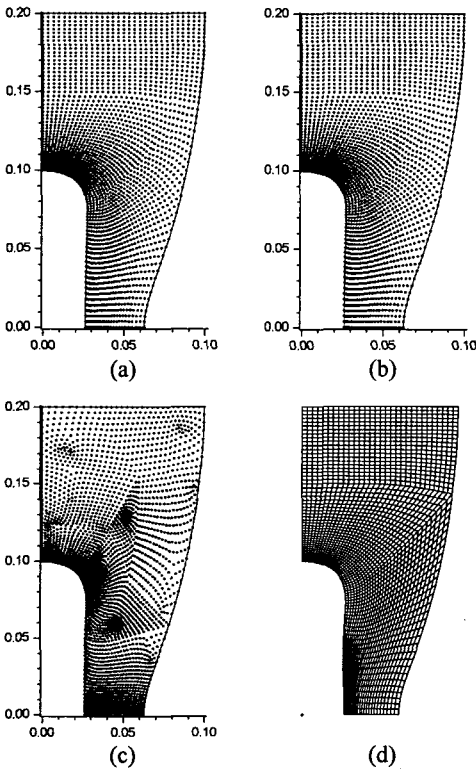


Fig. 8 Final deformed shapes: (a) LSMFM with regular nodes and element integration; (b) LSMFM with regular nodes and support integration; (c) LSMFM with irregular nodes with support integration; (d) Galerkin finite element method

$I(u, \sigma)$ 가 10^{-8} 보다 작게 될 때까지 축차가 수행되었으며, 20 번 이하의 축차수를 가지고 수렴하였다.

Fig. 8 은 네 경우의 해석 결과들로부터 얻어진 최종 변형 형상들을 보여준다. 앞의 세 그림은 최소 제공 무요소법 해석 결과들로 Fig. 8(a)와 Fig. 8(b)는 각각 규칙적인 절점 분포에 요소 격자 적분법(LSMFM 1)과 영향영역에서 적분점을 분포시키는 방법(LSMFM 2)을 사용한 결과들이며, Fig 8(c)는 불규칙적인 절점 분포에 영향영역 적분 방

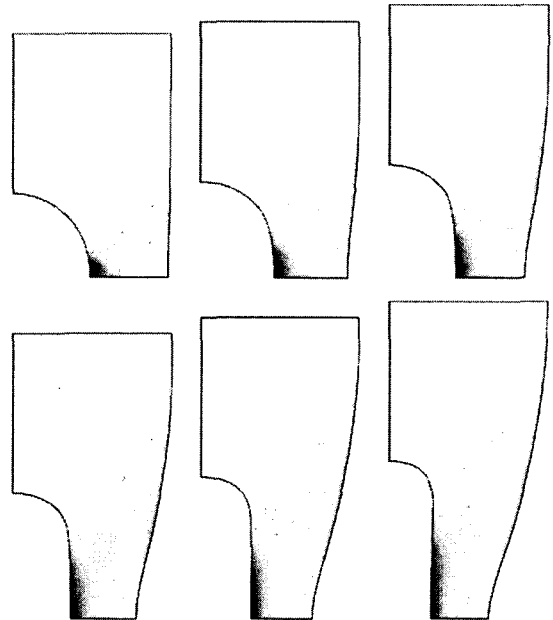


Fig. 9 Evolution of effective plastic strain

법을 이용한 결과(LSMFM 3)이다. 그리고 Fig. 8(d)는 유한요소 해석 결과이다. 그림에서 네 결과 모두 거의 일치함을 관찰할 수 있다. 변위에 대한 각 결과들간의 상대 차이율을 Table 2 에 수록하였다. 무요소법의 세 결과들의 차이율은 0.3% 이하를 보였으며, 이 결과들은 유한요소법의 결과와 0.5% 이하의 차이를 가진다. 이런 결과는 제안된 최소 제공 무요소법이 적분 오차에 강건함을 의미하며, 근사화 함수 구성 및 적분 과정 모두에서 격자를 필요로 하지 않는 효율적인 무요소법이라 할 수 있다.

Fig. 9 는 변형의 진전에 따른 상당 소성 변형들을 차례로 보여준다. 이 결과들은 규칙적인 절점 분포에 영향영역 적분을 사용해서 얻어진 것이다. Fig. 10 은 네 경우의 해석으로 얻어진 von-Mises 응력을 비교하고 있다. 네 경우 모두 매우 비슷한 결과를 보임을 관찰할 수 있다.

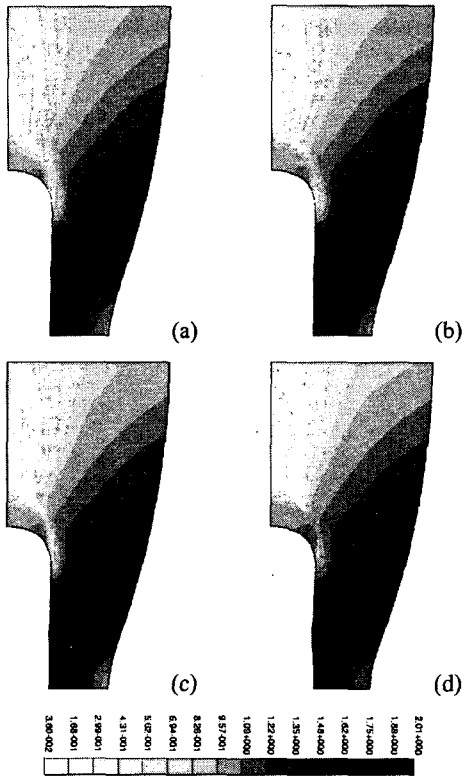


Fig. 10 von-Mises stresses: (a) LSMFM 1; (b) LSMFM 2; (c) LSMFM 3; (d) Galerkin FEM

6.3 링 압축 문제

링 압축은 금속 성형에서 마찰 조건을 추정하기 위해 많이 사용되는 시험 방법으로, Fig. 11 과 같이 구멍이 있는 원통형 재료를 두 판 사이에 놓고 압축한다. 일반적으로 이 문제는 마찰이 작은 경우 높이가 줄어들면서 링의 내경이 감소하고, 마찰이 큰 경우 내경이 증가하는 변형 특성을 보인다. 해석에 사용된 치수는 외경 $2R_0 = 12$ cm, 내경 $2R_I = 6$ cm, 높이 $2H_0 = 4$ cm 이다. 두 평판은 강체로 가정하고, 링의 재료 상수는 $E = 190$ GPa, $\nu = 0.3$, $\sigma_Y = 500$ MPa, $\bar{K} = 100$ MPa 을 사용하였다.

대칭성을 고려하여 1/4 모델을 해석하였으며, 4장에서 제시한 최소 제품 수식화를 축대칭 수식화로 수정하여 사용하였다. Fig. 11 은 초기 절점 분포를 보여주고 있으며, 수식화의 적분은 절점의 영향영역을 이용해 적분점을 분포시키는 방법을 사용하였다. 여러 마찰 조건에 대해 해석을 수행하였으며, 마찰 조건은 5.3 절에서 소개한 별치법을 사용해 처리하였다. 재료의 초기 높이의 반이 될 때까지 40 하중 단계로 나누어 해석하였으며,

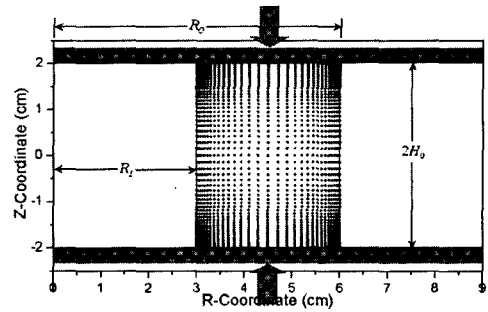


Fig. 11 Geometric description of ring compression and initial distribution of nodes

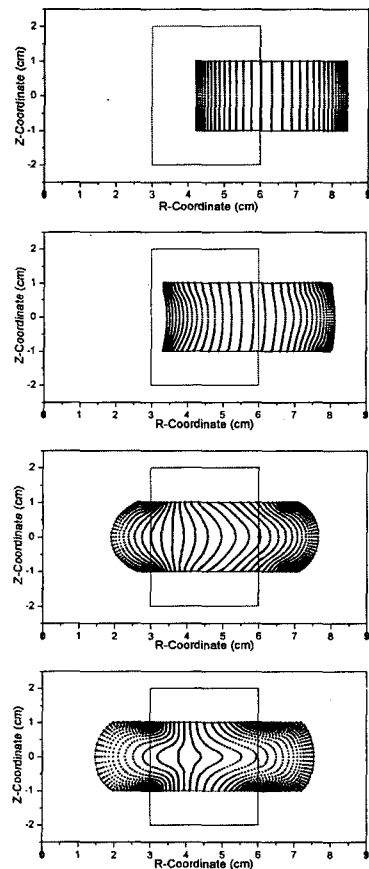


Fig. 12 Deformed shapes at 50% height reduction with different coefficients of friction: (a) $\mu = 0$; (b) $\mu = 0.05$; (c) $\mu = 0.2$; (d) stick condition

각 하중 단계에서 잔여오차는 5×10^{-4} 이하로 얻어졌다.

본 예제에서 마찰력이 큰 경우 접촉이 일어나는 모서리 부근에서 심한 변형이 발생한다. 따라서 초기 형상에서 구한 무요소 형상함수를 현재 형상으로 변환한 라그랑지안 형상함수를 계속 사용하

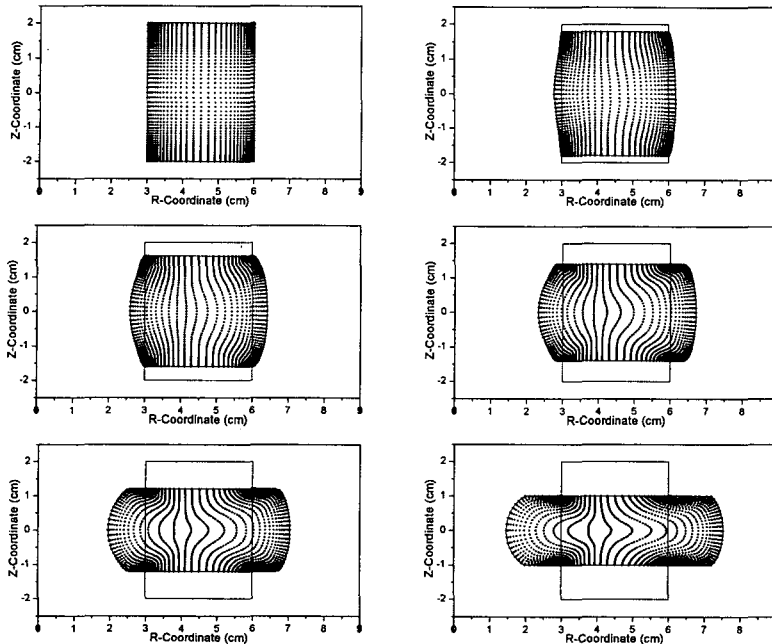


Fig. 13 Progressive deformed shapes with stick condition up to 50% reduction in height

면 자코비안(Jacobian)이 음이 되는 영역이 발생하여 해석을 계속 수행할 수 없게 된다. 따라서 형상함수를 재구성하는 것이 필요하다. 본 논문에서는 절점의 추가 또는 제거 없이 영향영역만을 수정하여 형상함수를 재구성하는 방법을 이용하였다.⁽²⁶⁾ 재구성된 형상함수는 기존 형상함수가 되며, 다음 축차부터는 이를 변환하여 사용한다. 다시 형상 함수를 재구성하게 되면 기존 형상함수가 바뀌게 된다.

Fig. 12는 네 가지 마찰 조건, 즉 $m=0, 0.05, 0.2$ 인 경우들과 부착 마찰(sticking friction) 조건에 대해 50% 두께 감소시의 변형 형상들을 보여준다. 이 결과들은 마찰이 작은 경우 재료가 바깥쪽으로 흐르는 변형이 지배적이고, 마찰이 커지면 안쪽과 바깥쪽 모두 가운데 부분에서 볼록한 변형이 일어나는 특성을 잘 보여주고 있다. Fig. 13은 부착 마찰 조건에 대해 최소 제곱 무요소법 해석으로 얻어진 변형 형상의 변화를 순서대로 보여준다.

7. 결론

본 논문에서는 탄소성 변형 해석을 위한 최소 제곱 무요소법을 제시하였다. 이 방법은 제안된 최소 제곱 수식화에 이동 최소 제곱 근사화 방법을 적용한 것이다. 먼저, J_2 -유동 법칙과 선형 등방성 경화 법칙 가정하에 미소 변형 이론에 기초한

일차 최소 제곱 수식화를 제안하였다. 그리고 대 변형 문제를 위해 증분적 객관성을 만족시키도록 수식화를 확장하였다. 제안된 무요소법은 해석 전 과정, 즉 근사화 함수의 구성, 수식화의 적분, 비압축성의 처리, 근사화 함수의 재구성 등에 있어서 격자의 사용을 필요로 하지 않는다는 장점을 가진다.

제안된 최소 제곱 수식화는 평형 방정식과 유동 법칙을 잔여오차들의 제곱을 최소화하는 개념으로 만족시키고, 경화 법칙과 항복 조건만을 각 적분 점에서 정확히 만족시킨다. 이를 위해 변위와 응력 성분들을 독립 변수로 사용하여, 평형 방정식과 유동 법칙을 일차 미분 방정식 형태로 표현하였다. 따라서 본 수식화는 일종의 혼합 수식화로 볼 수 있으며, 절점 변수에 응력 성분이 추가됨에 따라 선형 대수 방정식을 푸는데 필요한 계산 비용이 증가한다. 그러나 적분 오차에 대한 강건성으로 인해 적은 수의 적분점을 사용하는 것이 가능하므로, 많은 계산 비용을 줄일 수 있는 측면이 있다.

제안된 방법에서 경계 조건 및 마찰 조건을 구속하기 위한 벌칙법을 고안하였고, 심한 변형으로 인해 근사화 함수의 재구성이 필요한 경우 영향영역만을 재설정하는 개념을 이용하였다. 평판의 인장 문제와 링 압축 문제에서의 적용을 통해 본 방법의 특성 및 효율성을 제시하였다.

참고문헌

- (1) Chen, J.S., Pan, C., Wu, C.T. and Liu W.K., 1996, "Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Analysis of Non-linear Structures," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, pp. 195~227.
- (2) Chen, J.S., Pan, C., Rogue, C.M.O.L. and Wang H.P., 1998, "A Lagrangian Reproducing Kernel Particle Method for Metal Forming Analysis," *Comput. Mech.*, Vol. 22, pp. 289~307.
- (3) Li, S., Hao, W. and Liu, W.K., 2000, "Numerical Simulations of Large Deformation of Thin Shell Structures using Meshfree Method," *Comput. Mech.*, Vol. 25, pp. 102~116.
- (4) Yoon, S. and Chen, J.S., 2002, "Accelerated Meshfree Method for Metal Forming Simulation," *Finite Elem. Anal. Des.*, Vol. 38, pp. 937~948.
- (5) Liew, K.M., Ng, T.Y. and Wu, Y.C., 2002, "Meshfree Method for Large Deformation Analysis-A Reproducing Kernel Particle Approach," *Eng. Struct.*, Vol. 24, pp. 543~551.
- (6) Beissel, S. and Belytschko, T., 1996, "Nodal Integration of the Element-Free Galerkin Method," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, pp. 49~74.
- (7) Atluri, S.N. and Zhu, T., 1998, "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics," *Comput. Mech.*, Vol. 22, pp. 117~127.
- (8) Dolbow, J. and Belytschko, T., 1999, "Numerical Integration of the Galerkin Weak Form in Meshfree Methods," *Comput. Mech.*, Vol. 23, pp. 219~230.
- (9) Chen, J.S., Wu, C.T., Yoon, S. and You, Y., 2001, "A Stabilized Conforming Nodal Integration for Galerkin Mesh-free Methods," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 50, pp. 435~466.
- (10) Carpinteri, A., Ferro, G. and Ventura, G., 2002, "The Partition of Unity Quadrature in Meshless Methods," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 54, pp. 987~1006.
- (11) Dolbow, J. and Belytschko, T., 1999, "Volumetric Locking in the Element Free Galerkin Method," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 46, pp. 925~942.
- (12) Chen, J.S., Yoon, S., Wang, H.P. and Liu, W.K., 2000, "An Improved Reproducing Kernel Particle Method for Nearly Incompressible Finite Elasticity," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 181, pp. 117~145.
- (13) Chen, J.S., Wang, H.P., Yoon, S. and You, Y., 2000, "Some Recent Improvement in Meshfree Methods for Incompressible Finite Elasticity Boundary Value Problems with Contact," *Comput. Mech.*, Vol. 25, pp. 137~156.
- (14) Park, S.H. and Youn, S.K., 2001, "The Least-Squares Meshfree Method," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 52, pp. 997~1012.
- (15) Park, S.H. and Youn, S.K., 2001, "Least-Squares Meshfree Methods and Integration Error," *Transactions of the KSME(A)*, Vol. 25, No. 10, pp. 1605~1612.
- (16) Park, S.H., Kwon, K.C. and Youn, S.K., 2003, "A Study on the Convergence of Least-Squares Meshfree Method under Inaccurate Integration," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 56, pp. 1397~1419.
- (17) Zhang, X., Liu, X.H., Song, K.Z. and Lu, M.W., 2001, "Least-Squares Collocation Meshless Method," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 51, pp. 1089~1100.
- (18) Cai, Z., Manteuffel, T.A., McCormick, S.F. and Parter, S.V., 1998, "First-order System Least Squares (FOSLS) for Planar Linear Elasticity: Pure Traction Problem," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 35, pp. 320~335.
- (19) Kwon, K.C., Park, S.H., Jiang, B.N. and Youn, S.K., 2003, "The Least-Squares Meshfree Method for Solving Linear Elastic Problems," *Comput. Mech.*, Vol. 30, pp. 196~211.
- (20) Kwon, K.C., Park, S.H. and Youn, S.K., 2002, "The Least-Squares Meshfree Method for Linear Elasticity," *Transactions of the KSME(A)*, Vol. 26, No. 11, pp. 2312~2321.
- (21) Lancaster, P. and Salkauskas, K., 1981, "Surfaces Generated by Moving Least-Squares Methods," *Math. Comput.*, Vol. 37, pp. 141~158.
- (22) Duarte, C.A. and Oden, J.T., 1995, "Hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems," *Technical Report 95-05*, TICAM, University of Texas at Austin, 1995.
- (23) Jiang, B.N., 1998, *The Least-Squares Finite Element Method - Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*, Springer-Verlag, Berlin.
- (24) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R., 1989, *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, New York.
- (25) Simo, J.C., Kennedy, J.G. and Taylor, R.L., 1989, "Complementary mixed finite element formulations for elastoplasticity," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 74, pp. 177~206.
- (26) Kwon, K.C. and Youn, S.K., 2004, "The Least-Squares Meshfree Method for the Analysis of Rigid-Plastic Deformation," *Transactions of the KSME(A)*, Vol. 28, No. 12, pp. 2019~2031.