

< 논문 >

병진 가속을 받는 외팔 평판의 면내 변형률을 이용한 진동 해석

임 홍 석[†] · 유 흥 희^{*}

(2004년 12월 14일 접수, 2005년 4월 14일 심사완료)

Modal Analysis Employing In-plane Strain of Cantilever Plates Undergoing Translational Acceleration

Hong Seok Lim and Hong Hee Yoo

Key Words : Modal Analysis(진동 해석), Cantilever Plates(외팔 평판), Translational Acceleration(병진 가속), Aspect ratio(중횡비), Von Karman Strain(폰 칼만 스트레인)

Abstract

A modeling method for the modal analysis of cantilever plates undergoing in-plane translational acceleration is presented in this paper. Cartesian deformation variables are employed to derive the equations of motion and the resulting equations are transformed into dimensionless forms. To obtain the modal equation from the equations of motion, the in-plane equilibrium strain measures are substituted into the strain energy expression based on Von Karman strain measures. The effects of two dimensionless parameters (related to acceleration and aspect ratio) on the modal characteristics of accelerated plates are investigated through numerical studies.

1. 서론

외팔 평판 구조물은 여러 가지 공학적 예제에서 발견되는 중요한 구조 형태이며 대표적인 것으로 항공기나 로켓의 날개, 인공위성의 태양열 전지판, 그리고 헬리콥터의 블레이드 같은 예제들이 있다. 이들 중에 특별히 비행기나 로켓의 날개는 이륙 또는 발사 시에 병진 방향 가속도를 받게 된다. 그런데 이러한 평판의 병진 방향 가속도는 평판 시스템의 강성의 변화를 가져와 그 진동 특성을 변화시키게 된다. 이러한 구조물들에 대한 진동 특성의 정확한 예측은 이들의 설계를 위해 필수적 이므로 진동 해석을 위한 모델링 연구가 필요하다. 강체 운동을 하는 구조물의 진동 특성에 대한 연구는 블레이드형 구조물부터⁽¹⁻⁵⁾ 평판형 구조물 들에⁽⁶⁾ 대해 이루어지고 있다. 그러나 이러한 연구

들에서는 통상 평판을 보 형태로 이상화 하여 다루고 있거나 운동이 없는 고정된 상태에서 평판 진동 특성을 분석하고 있다. 평판이 강체 운동을 하는 경우에 대한 진동 해석을 다룬 문헌도 회전 운동에 국한되어 있다.⁽⁷⁻⁸⁾ 로켓이나 항공기는 병진 가속 운동을 하므로 날개의 중횡비 변화와 병진 가속도에 의한 진동 특성의 변화를 파악하기 위한 연구가 필요하다 판단된다. 본 연구의 목적은 면내 변형률을 이용해 병진방향 가속도 변화에 따른 고유 진동수와 모드 형상의 변화를 파악하기 위한 모델링 방법을 제시하고, 그 모델링에 근거하여 해석결과를 도출하여 주요 동적 특성을 분석하고 규명하는데 두고 있다.

본 논문의 구성은 서론에 이어서 2 장에는 직교 방향 변수를 이용해 면내 운동방정식을 유도하고 이로부터 면내 선형 변형률을 구하였다. 그런 후 변형률을 이용하여 굽힘 방향 운동 방정식을 유도 하였고 무차원 매개변수를 이용하여 무차원 진동 방정식을 유도했으며 3 장에서는 가상 모드법을 적용하고 수치해석을 통해 결과를 도출하여 주요 동적 특성을 논의하였다. 마지막으로 4 장에서는 본 논문의 결론을 수록하였다.

[†] 책임저자, 회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과
E-mail : limit75@dreamwiz.com
TEL : (02)2299-8169 FAX : (02)2298-4634

^{*} 회원, 한양대학교 기계공학부

2. 운동 방정식 유도

Fig. 1 은 가로 a , 세로 b 그리고 일정두께 h 를 가지는 외팔 평판을 보여준다. 이 평판은 가속을 받는 고정단에 부착되어 있으며, 평판상의 임의의 한 점인 P 점의 탄성변형 변위는 직교방향 변수인 u_i, u_2, u_3 로 나타내어 진다. 여기서 ρ 는 평판의 단위면적당 질량이고 ν 는 포아송비, 그리고 D 는 굽힘 강성 계수 이다.

본 논문에서는 Rayleigh-Ritz method 를 사용하기 위해 직교 변형변수 u_i, u_2, u_3 를 다음과 같이 근사화 하였다.

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x, y)q_{1i}(t) \\ u_2(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x, y)q_{2i}(t) \\ u_3(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{\mu_3} \phi_{3i}(x, y)q_{3i}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 μ_1, μ_2, μ_3 는 변형 변수 u_1, u_2, u_3 를 위한 일반 좌표의 수이다.

평판의 운동방정식은 Von Karman strain 으로부터 얻어진 총 변형 에너지와 Kane's method 를 사용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$F_j^* + F_j = \int \int \rho \left(\frac{\partial v^p}{\partial q_{kj}} \right) \cdot a^p dydx + \frac{\partial U}{\partial q_{kj}} = 0 \quad (2)$$

여기서 F_j^* 는 일반관성력이고, F_j 는 일반작용력, U 는 총 변형 에너지, 그리고 v^p 와 a^p 는 평판상의 임의의 점인 P 점의 속도와 가속도를 나타낸다.

선형 면내 변형률을 얻기 위해서 다음 두 개의 면내 운동 방정식을 풀어야 한다.

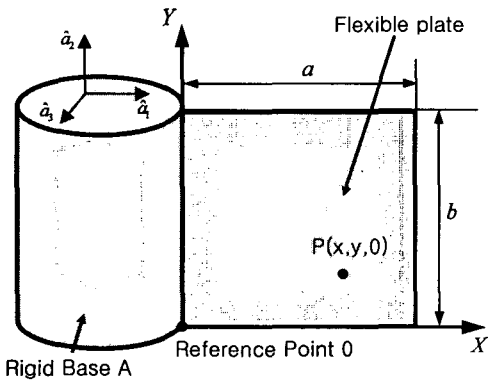


Fig. 1 Configuration of a cantilever plates

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu_1} & \left[\left(\int \int \rho \phi_{1i} \phi_{1j} dydx \right) \ddot{q}_{1j} \right. \\ & \left. + \left(\int \int \rho (\gamma \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} + Gh \phi_{1i,y} \phi_{1j,y}) dydx \right) q_{1j} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int \int \rho (\gamma \nu \phi_{1i,x} \phi_{2j,y} + Gh \phi_{1i,y} \phi_{2j,x}) dydx \right) q_{2j} \right] \\ & = -\dot{v}_1 \left(\int \int \rho \phi_{1i} dydx \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu_2} & \left[\left(\int \int \rho \phi_{2i} \phi_{2j} dydx \right) \ddot{q}_{2j} \right. \\ & \left. + \left(\int \int \rho (\gamma \phi_{2i,y} \phi_{2j,y} + Gh \phi_{2i,x} \phi_{2j,x}) dydx \right) q_{2j} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} \left[\left(\int \int \rho (\gamma \nu \phi_{2i,x} \phi_{1j,y} + Gh \phi_{2i,y} \phi_{1j,x}) dydx \right) q_{1j} \right] \\ & = -\dot{v}_2 \left(\int \int \rho \phi_{2i} dydx \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\gamma \equiv Eh/(1-\nu^2)$$

여기서 두 미분 방정식의 특해를 진동 방정식을 얻는데 이용한다. 아래 첨자의 표시 중 콤마 뒤에 나타나는 것은 이들에 대한 편미분으로 예를 들어 $\phi_{i,xx}$ 는 ϕ_i 를 x 로 두 번 편미분한 것을 의미한다. 식 (3)과 (4)를 풀어 일반좌표 q_{1i}, q_{2i} 를 구한 후 일반좌표를 다음 (5)식에 대입하면 선형 변형률을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i,x} q_{1i} \\ \epsilon_{yy} &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i,y} q_{2i} \\ \epsilon_{xy} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i,y} q_{1i} + \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i,x} q_{2i} \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)로부터 구한 선형 변형률 들을 굽힘 변형 에너지 식에 대입한 후 굽힘방향 운동 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu_3} & \left[\left(\int \int \rho_p \phi_{3i} \phi_{3j} dydx \right) \ddot{q}_{3j} \right. \\ & \left. + \left(\int \int D (\phi_{3i,xx} \phi_{3j,xx} + \phi_{3i,yy} \phi_{3j,yy} + \nu \phi_{3i,xx} \phi_{3j,yy} \right. \right. \\ & \left. \left. + \nu \phi_{3i,yy} \phi_{3j,xx} + 2(1-\nu) \phi_{3i,xy} \phi_{3j,xy}) dydx \right) q_{3j} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} \left[\left(\int \int \gamma \left(\epsilon_{xx} (\phi_{3i,x} \phi_{3j,x} + \nu \phi_{3i,y} \phi_{3j,y}) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \epsilon_{yy} (\phi_{3i,y} \phi_{3j,y} + \nu \phi_{3i,x} \phi_{3j,x}) \right) dydx \right) q_{3j} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int \int Gh \epsilon_{xy} (\phi_{3i,y} \phi_{3j,x} + \phi_{3i,x} \phi_{3j,y}) dydx \right) q_{3j} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$(i = 1, 2, \dots, \mu_3)$

식 (6)에서 선형 변형률은 X 및 Y 방향의 가속도 증가에 따라서 선형적으로 증가하므로 위 식에서 선형 변형률에 관계된 항들에 의해 가속에 따른 강성 변화가 나타나어 지며, 이는 가속도가 진동 특성에 영향을 미침을 분명하게 보여준다.

식 (6)을 무차원화 하기 위해 무차원 변수들과 매개 변수들 그리고 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \tau &\equiv \frac{t}{T}, & \xi &\equiv \frac{x}{a}, \\ \eta &\equiv \frac{y}{a}, & \delta &\equiv \frac{a}{b} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_j &\equiv \frac{q_j}{a}, & \phi_i(x, y) &\equiv \varphi_i(\xi, \eta), \\ \alpha_x &\equiv \frac{a_x}{a}, & \alpha_y &\equiv \frac{a_y}{a} \end{aligned}$$

여기서 a_x, a_y, T 는 다음과 같이 정의된다

$$T \equiv \sqrt{\frac{\rho a^4}{D}} \quad (8)$$

$$a_x \equiv \frac{a}{T^2} \quad a_y \equiv \frac{b}{T^2}$$

무차원 변수와 매개 변수들을 사용하여 식 (6)을 무차원화 시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\mu_3} \left[\left(\int_0^1 \int_0^1 \varphi_{3i} \varphi_{3j} d\eta d\xi \right) \ddot{\vartheta}_{3j} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{\mu_3} \left[\left\{ \int_0^1 \int_0^1 (\delta^4 \varphi_{3i, \eta\eta} \varphi_{3j, \eta\eta} + 2\nu\delta^2 \varphi_{3i, \xi\xi} \varphi_{3j, \eta\eta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varphi_{3i, \xi\xi} \varphi_{3j, \xi\xi} + 2(1-\nu)\delta^2 \varphi_{3i, \xi\eta} \varphi_{3j, \xi\eta} \right) d\eta d\xi \right\} \vartheta_{3j} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{\mu_3} \left[\left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\gamma T^2}{\rho_p} \left(\varepsilon_{xx} \left(\frac{1}{a^2} \varphi_{3i, \xi} \varphi_{3j, \xi} + \frac{1}{b^2} \nu \varphi_{3i, \eta} \varphi_{3j, \eta} \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon_{yy} \left(\frac{1}{b^2} \varphi_{3i, \eta} \varphi_{3j, \eta} + \frac{1}{a^2} \nu \varphi_{3i, \xi} \varphi_{3j, \xi} \right) \right) d\eta d\xi \right\} \vartheta_{3j} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{\mu_3} \left[\left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{GH T^2}{\rho_p ab} \varepsilon_{xy} (\varphi_{3i, \eta} \varphi_{3j, \xi} + \varphi_{3i, \xi} \varphi_{3j, \eta}) d\eta d\xi \right) \vartheta_{3j} \right] \quad (9) \\ &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \mu_3) \end{aligned}$$

3. 수치해석 결과

3.1 해석결과 비교를 통한 해의 신뢰성 검증

이 장에는 앞서 유도된 진동방정식을 사용하여 수치해석을 수행하였다. 사용된 평판의 모드 함수들은 가로와 세로방향 보 함수들을 곱해 구하는데

가로방향은 외팔 보의 모드 함수들을 세로방향은 병진 및 회전에 의한 강체운동 함수 2 개와 양단 자유 보의 모드함수를 각각 사용한다.⁽¹⁰⁾ 보의 모드 함수는 기존의 방법이 아닌 Gram-Schmidt 방법을 이용하여 다항식의 형태로 구성하였다.⁽¹¹⁾ 본 논문과 관련되어서 사용한 보 함수 개수는 가로방향 5 개, 세로방향 7 개이며 결국은 이들을 곱하여 사용하므로 사용되는 모드의 수는 각 방향당 35로 본 논문에서 구하는 가장 낮은 5 개의 고유진동수들의 수렴에 충분하도록 선정되었다.

가속을 받는 외팔 평판의 무차원 고유진동수에 대해 제안된 방법의 신뢰성은 제안된 방법에 의한 해석 결과와 상용 구조해석 프로그램인 ANSYS의 해석 결과를 비교함으로써 검증할 수 있다. 제안된 방법은 u_1, u_2, u_3 각 방향에 대해 35 개씩 모드 수를 가지므로 총 105 개의 자유도를 가진다. ANSYS의 경우는 해석 시 100 개의 Element 와 121 개의 Node 를 사용하고 Node 한 개당 6 개의 자유도를 가지므로 총 726 개의 자유도를 갖는다. ANSYS에서는 가속도의 영향을 고려하기 위해서 평판의 면내방향으로 가속도 크기만큼의 중력이 작용할 때의 비선형 정적 해석을 수행한 후 이 때 구한 정적 해석 점에서 다시 모드해석을 수행하여 고유진동수 결과를 구해야 한다.

3.2 가속도 증가에 따른 고유진동수 변화

Fig. 2는 종횡비 δ 가 1인 경우 Y 방향 가속도 변화에 따른 가장 낮은 5 개 무차원 고유 진동수 변화를 보여준다. 첫 번째부터 세 번째의 고유 진동수는 가속도가 증가할수록 고유진동수가 감소하는 것을 보여주며 어느 가속도 이상에서는 고유 진동수가 0에 도달해 동적 좌굴 현상도 발생하는 것을 보여준다. 네 번째와 다섯 번째 고유 진동수의 경우에는 가속도가 증가할수록 고유 진동수가 증가하다가 감소하는 경향을 보여준다. 그리고 외팔 평판은 Y 방향에 대해 대칭이므로 부호로 나타내어지는 가속도의 방향 변화에 대해 대칭적인 형태의 그래프를 보여준다. 그림에서 관찰되는 다른 특이한 점은 첫 번째와 두 번째 그리고 네 번째와 다섯 번째 고유진동수 궤적간에 휨 현상이 (Loci Veering) 발생한다는 점이다. 이 그래프 상에서는 첫 번째와 두 번째 고유진동수 사이의 휨 현상이 확실히 나타나지는 않으나 멀리 떨어진 궤적 휨 현상일 수 있으므로 가속도 증가에 따른 모드간 절선 변화를 비교해 보면 그림 Fig. 3 (a),(b),(c)에서와 같은 모드 절선 변화를 확인할 수 있다. 이 그림을 보면 가속을 받지 않을 때인 (a)의 경우는 첫 번째와 두 번째 모드가 굽힘 및 비틀림 모드인데 Y 방향 가속도 증가에 따라 (b)와 (c) 그림에서 보여주는 바와 같이 모드 형상 변화가 발생한다.

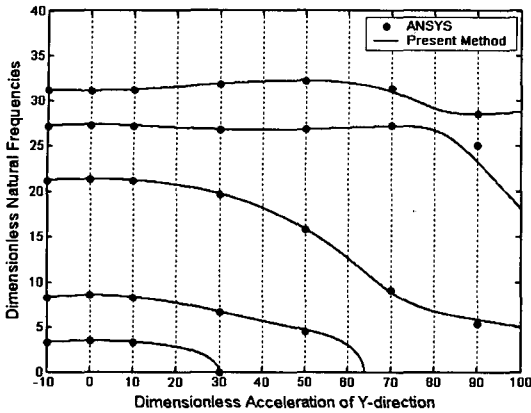


Fig. 2 Variations of dimensionless natural frequencies versus dimensionless acceleration in Y-direction ($\delta=1, \nu=0.3, \alpha_x=0$)

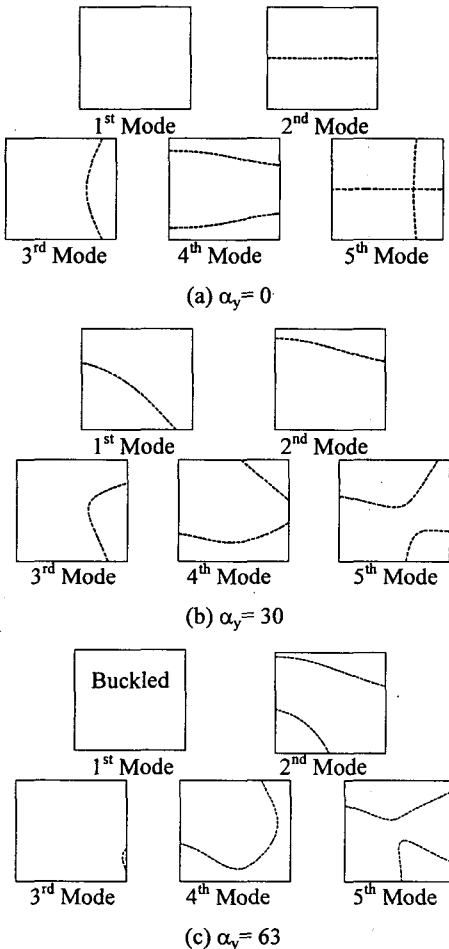


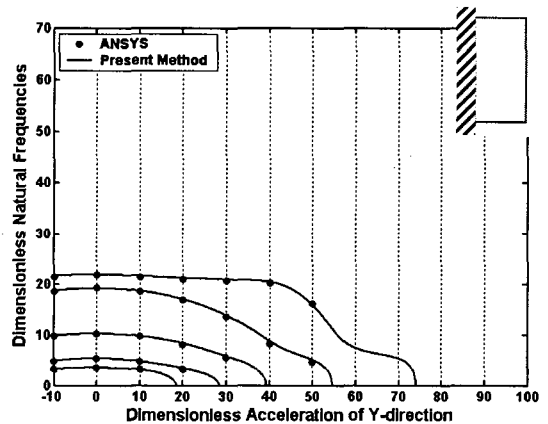
Fig. 3 Nodal line patterns of lowest five mode shapes with different accelerations ($\delta=1, \nu=0.3, \alpha_x=0$)

다른 모드들에서도 대칭적인 모드 절선의 형태가 가속도 증가에 따라 비대칭적으로 변화하는 것을 확인할 수 있다.

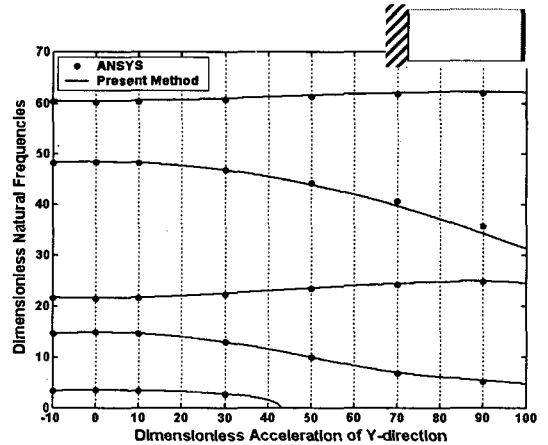
3.3 종횡비 변화에 따른 외팔 평판 고유진동수 변화 경향

Fig. 4 (a)와 (b)는 종횡비 δ 가 0.5와 2인 경우에 대해서 각각 Y 방향 가속도 변화에 따른 가장 낮은 5개 무차원 고유 진동수 변화를 보여준다. 앞의 Fig. 2에서의 종횡비 δ 가 1인 경우와 비교하여 보면 종횡비 δ 가 0.5인 경우는 첫 번째의 고유 진동수가 더 빠르게 감소하며 동적 좌굴도 더 작은 가속도에서 발생한다. 반면에 δ 가 2인 경우에는 첫 번째 고유 진동수가 더 느리게 감소하며 동적 좌굴도 더 큰 가속도에서 발생한다

Fig. 5 (a)와 (b)는 종횡비 δ 가 0.5와 2인 경우



(a) $\delta = a/b = 0.5$



(b) $\delta = a/b = 2$

Fig. 4 Variations of dimensionless natural frequencies versus dimensionless acceleration in Y-direction with different aspect ratios. ($\nu=0.3, \alpha_x=0$)

4. 결론

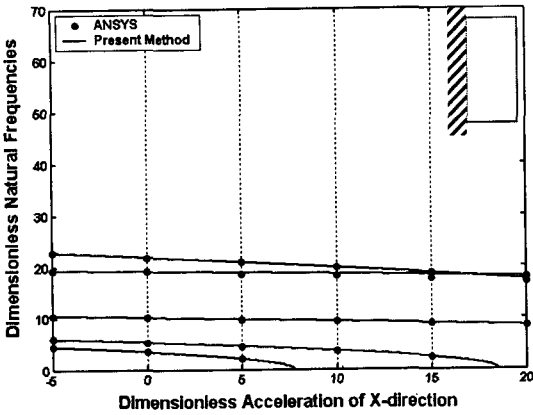
본 논문에서는 면내 병진방향 가속을 받는 외팔 평판의 진동 방정식과 이에 근거한 해석 결과를 제시하고 가속도와 중형비가 고유진동수와 모드 질선의 변화에 미치는 영향을 분석하였다. 특히 가속도 증가에 따라 고유진동수 궤적간 힘 현상과 모드 간에 형태 교환이 발생하는 것을 관찰할 수 있었다. 또한 일정 가속도 이상에서 고유진동수가 0 이 되는 동적 좌굴 현상이 발생하는 것을 확인할 수 있었으며 이러한 동적 좌굴은 더 작은 중형비를 갖는 평판에 대해 더 낮은 가속도에서 발생하는 것을 확인할 수 있었다. 본 논문에서 개발한 가속을 받는 평판의 진동해석 모델링은 상용 구조 해석 코드를 사용하는 모델링과는 달리 선형 해석 과정으로만 이루어져 있으므로 효율적이며 특별히 구조물의 제어 문제 등에 앞으로 더욱 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

후 기

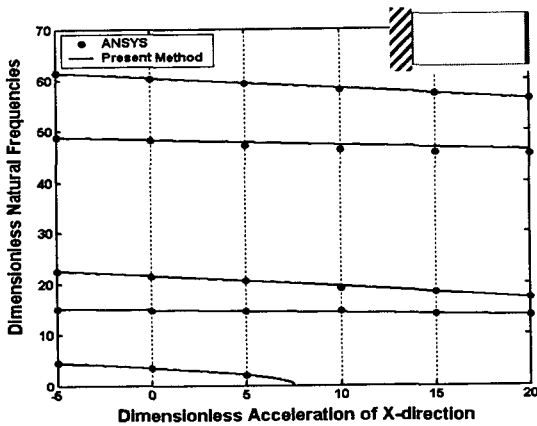
이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적 설계신기술연구센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A.R.C. Reports and Memoranda*, No. 766
- (2) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force," *NASA TN*, No.516.
- (3) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 28~30.
- (4) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175~185.
- (5) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibration of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, No. 2, pp. 199~210.
- (6) Liew, K.M. and Lim, M.K., 1993, "Transverse Vibration of Trapezoidal Plates of Variable Thickness: Symmetric Trapezoidals," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 165, No. 1, pp. 45~67.
- (7) Dokainish, M. and Rawtani, S., 1971, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3,



(a) $\delta = a/b = 0.5$



(b) $\delta = a/b = 2$

Fig. 5 Variations of dimensionless natural frequencies versus dimensionless acceleration in X-direction with different aspect ratios. ($\nu = 0.3, \alpha_y = 0$)

대해 각각 X 방향 가속도 변화에 따른 가장 낮은 5 개의 무차원 고유 진동수 변화를 보여준다. 두 경우 모두 가속도 증가에 따라 고유 진동수가 감소하는 경향을 보여주고 있으며 부호로 나타나는 가속도의 방향 변화에 대해 비대칭적 형태의 고유 진동수 궤적을 보여준다. 이러한 현상에 대하여 간단히 설명하면 평판이 가속을 받을 때 평판은 압축되게 되므로 고유 진동수는 감소하게 된다. 반대로 평판이 반대 방향으로 가속을 받게 되면 평판은 인장되므로 고유진동수는 증가하게 된다. 한 가지 흥미로운 점은 X 방향으로 가속을 받는 평판의 경우에는 동적 좌굴이 발생하는 가속도가 중형비에 대해 거의 영향을 받지 않는다는 것이며 두 경우 모두 약 7.6 에서 7.8 정도의 가속도에서 동적 좌굴이 발생하고 있다.

- pp. 233~248.
- (8) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, "Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 3, pp. 429~449.
- (9) Chihara, T., 1978, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, London: Gordon and Breach Science Publishers.
- (10) Leissa, A. W., 1969, *Vibration of Plates*, NASA SP-160.
- (11) Bhat, R., 1985, "Natural Frequencies of Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials In Rayleigh-Ritz Method," *Journal of Sound and Vibration*, 102(4), pp. 493~499.