

비선형 동적 시스템의 파라미터 산정을 위한 주파수 영역 볼테라 모델의 이용

Parameter Identification of Nonlinear Dynamic Systems using Frequency Domain Volterra model

권 장 섭* 백 인 열**
Kwon, Jang-Sub Paik, In-Yeol

국문요약

비선형 함수로 모델링되는 동적 시스템의 비선형 파라미터를 결정하기 위하여 주파수 영역 볼테라 모델을 적용하는 연구를 수행하였다. 시간영역의 1차, 2차, 3차 전달함수에 해당하는 주파수 영역의 볼테라 핵함수를 비선형 파라미터 산정 과정에 3차 비선형 항까지 포함시켰다. Schetzen의 방법으로 시스템의 비선형 미분방정식에 적합한 볼테라 급수 표현식을 정하고, 이로부터 유도되는 비선형 전달함수를 입력-출력 관계식에 사용하였다. 관찰된 입력을 비선형 주파수 영역 모델에 대입하여 계산한 출력과 관찰된 출력의 차이로 오차를 정의한 후 오차를 최소화 시키는 시스템 파라미터의 값을 구하였다. 예제를 통하여 선형 주파수 구간 뿐만 아니라 2차 혹은 3차 비선형이 지배적인 주파수 범위 내에서 볼테라 모델이 충분한 정확성과 수렴성을 가지며 인식된 파라미터는 실제 값과 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

주요어 : 동적 시스템, 주파수 영역, 볼테라 모델, 고차 전달함수, 비선형 파라미터 인식

ABSTRACT

Frequency domain Volterra model is applied to nonlinear parameter identification procedure for dynamic systems modeled by nonlinear function. The frequency domain Volterra kernels, which correspond to linear, quadratic, and cubic transfer functions in time domain, are incorporated in nonlinear parametric identification procedure. The nonlinear transfer functions, which can be derived from the Volterra series representation of the nonlinear differential equation of the system by Schetzen's method(1980), are directly used for modeling input-output relation. The error is defined by the difference between the observed output and the estimated output which is calculated by substituting the observed input to nonlinear frequency domain model. The system parameters are searched by minimizing the error. Volterra model guarantees enough accuracy and convergence and the estimated coefficients have a good agreement with their actual values not only in the linear frequency region but also in the region where the 2nd or 3rd order nonlinearity is dominant.

Key words : dynamic system, frequency domain, Volterra model, higher order transfer function, nonlinear parameter estimation

1. 서 론

동적 시스템은 파라미터 인식(parametric identification)이나 비 파라미터 인식(nonparametric identification) 방법에 의해서 모델링 할 수 있다. 대상 시스템에 대한 정보가 정확하고, 시스템의 수학적 구조를 명확히 규정할 수 있다면, 적절한 산정 기법을 이용하여 항의 계수를 구해내는 파라미터 인식 방법이 유리하다. 반면에, 이미 얻은 기초 자료로 시스템의 수학적 구조를 명확하게 규정하기가 어려울 경우에는 비 파라미터 인식 방법을 이용하여 입력-출력 관계로부터 함수 공간에서 시스템을 모델링한다(Worden과 Tomlinson⁽¹⁾).

비선형 시스템을 모델링 하기 위한 기존의 연구문헌들을 살펴보면, 과량하중을 받는 유연한 해양구조물이 보이는 비선형 특성을 모델링하기 위하여 수행한 일련의 연구들은(K.I. Kim 등⁽²⁾, S.B. Kim 등⁽³⁾, Paik과 Roesset⁽⁴⁾,

Im과 Powers⁽⁵⁾, Sibetheros 등⁽⁶⁾) 시스템의 입력-출력 관계로부터 비선형 전달함수(transfer function)를 구해내는 모델링 방법을 사용하여, 주파수 영역에서의 비 파라미터 인식 방법을 주로 적용하고 있다. 반면에, Nam과 Powers⁽⁷⁾는 단일 주파수 정현 입력이 작용하는 진자(duffing) 시스템에 대하여 비선형 전달함수를 사용하여 비선형 파라미터를 인식하는 방법을 제안하였다. 또한, Khan과 Vyas⁽⁸⁾는 가우시안 백색 잡음 입력이 작용하는 진자 시스템에 대하여 '볼테라와 위너의 이론'(Volterra and Wiener theories)을 사용하여 비선형 파라미터를 추정하는 가능성에 대한 연구를 수행하였다. 이 두 연구는 주파수 영역에서 비 파라미터 인식 방법을 활용하여 진자 시스템의 비선형 파라미터를 인식하는 방법으로 응용시켰다.

본 연구에서는 유연한 해양구조물의 비선형 시스템 파라미터를 산정하기 위하여 개선된 비선형 파라미터 인식 방법을 제안한다. Schetzen⁽⁹⁾의 방법으로 시스템의 비선형 미분방정식의 볼테라 급수 표현 식을 결정하고, 이로부터 유도된 비선형 전달함수를 시스템의 입력-출력 관계식에 직접 적용한다. 원래 출력의 이산 푸리에 변환 값을 비교의 기준으로 두고, 입력의 이산 푸리에 변환 값을 비

* 정회원 · 특허청 건설기술심사담당관실, 심사관, 공학박사
(대표저자: triad5@paran.com)

** 정회원 · 경원대학교 토목환경공학과, 부교수, 공학박사

본 논문에 대한 토의를 2005년 8월 31일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다
(논문접수일 : 2005. 3. 14 / 심사종료일 : 2005. 5. 2)

선형 주파수 모델에 대입하여 얻은 출력 값과의 차이를 오차로 정의한 후, 오차 최소화 함수로 IMSL Libraries⁽¹⁰⁾의 DBCPOL 서브루틴을 이용하여 두 출력 값의 오차가 최소화 되도록 시스템의 비선형 파라미터를 인식한다.

2. 주파수 영역 비선형 모델의 정식화

2.1 볼테라 급수 - 메모리를 갖는 멱급수(power series)

볼테라 급수는 입력-출력 관계의 범함수 표현 식으로 비선형 시스템 해석에 편리하고 강력한 방법으로서 확립되었다(Schetzen⁽⁹⁾). 고차 볼테라 급수의 표현 식을 소개하기 위하여 먼저 시간불변(time-invariant) 선형시스템의 입력과 출력 관계를 나타내는 회선적분(convolution integral) 식을 쓰면 다음과 같다.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (1)$$

여기서, $y(t)$ 는 시스템 출력, $u(t)$ 는 입력, $h(t)$ 는 충격 응답함수를 나타낸다. 이 식은 시간 t 에서의 출력 $y(t)$ 가 시간 t 및 그 이전의 입력에 영향을 받는다는 의미에서 메모리를 갖는 시스템을 표현하는 식이라 한다. 반면에 메모리가 없는 비선형 시스템은 다음과 같은 멱 급수로 나타낼 수 있다.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [u(t)]^n \quad (2)$$

여기서, a_n 은 멱 급수 계수이다. 이제, 메모리가 있는 비선형 시스템을 나타내기 위하여 식 (1)과 식 (2)를 결합하여 나타내는 식(3)과 같은 볼테라 급수는 시간불변 선형 연산자를 시간불변 비선형 연산자로 일반화시킨 회선 적분 표현 식이라 할 수 있다.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots \\ &= h_0 + \int h_1(\tau)u(t - \tau_1)d\tau_1 + \iint h_2(\tau_1, \tau_2) \\ &\quad u(t - \tau_1)u(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ &\quad + \iiint h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)u(t - \tau_1)u(t - \tau_2)u(t - \tau_3) \\ &\quad d\tau_1d\tau_2d\tau_3 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ 은 n 차 볼테라 핵함수(Kernel) 또는 n 차원 충격 응답함수이며, 적분 범위는 $-\infty$ 에서 ∞ 까지나, 식을 간단히 하기 위해서 생략하였다.

2.2 주파수 영역에서의 비선형 모델

볼테라 급수의 주파수 영역 표현은 식 (3)을 푸리에 변환함으로써 유도할 수 있으며(Bendat⁽¹¹⁾), 이 때 시간 영역에서의 회선 적분은 주파수 영역에서는 곱에 대응된다. 처음의 세 항만을 예를 들어 나타내면,

$$\begin{aligned} Y(f) &= H_1(f)U(f) + \int H_2(\alpha, f - \alpha)U(\alpha)U(f - \alpha)d\alpha + \\ &\quad \iint H_3(\alpha, \beta - \alpha, f - \beta)U(\alpha)U(\beta - \alpha)U(f - \beta)d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, $U(f)$ 와 $Y(f)$ 는 각각 $u(t)$ 와 $y(t)$ 를 푸리에 변환한 값이다.

$$U(f) = \int u(t)e^{-i2\pi ft}dt \quad (5a)$$

$$Y(f) = \int y(t)e^{-i2\pi ft}dt \quad (5b)$$

그리고, $H_1(f)$, $H_2(f_1, f_2)$, $H_3(f_1, f_2, f_3)$ 은 각각 1차, 2차, 3차 전달함수이며, 또는 1차, 2차, 3차 주파수 영역 핵함수라 불린다.

$$\begin{aligned} H_1(f) &= \int h_1(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \\ H_2(f_1, f_2) &= \iint h_2(\tau_1, \tau_2)e^{-i2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2)}d\tau_1d\tau_2 \\ H_3(f_1, f_2, f_3) &= \iiint h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)e^{-i2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2 + f_3\tau_3)}d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \end{aligned} \quad (6)$$

식 (4)의 이산 형태는

$$\begin{aligned} Y(f_m) &= H_1(f_m)U(f_m) + \sum_{i+j=m} H_2(f_i, f_j)U(f_i)U(f_j) \\ &\quad + \sum_{i+j+k=m} H_3(f_i, f_j, f_k)U(f_i)U(f_j)U(f_k) \\ &= Y_L f_m + Y_Q f_m + Y_C f_m \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $U(f_m)$ 및 $Y(f_m)$ 은 각각 N 개의 관찰 자료로 된 입력 및 출력의 이산 푸리에 변환이며, $H_1(f_m)$, $H_2(f_i, f_j)$, $H_3(f_i, f_j, f_k)$ 는 각각 선형, 2차, 3차 비선형 전달함수이고, 대상 주파수 범위는 $0 < f_m < f_M$ 으로 $f_M = f_N/2$ 는 나이퀴스트 주파수로서, 이산 주파수 집합은 $\{f_n = n/N, n = -N/2 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2\}$ 이다.

그림 1에 시스템의 비선형 주파수 영역 모델을 도식적으로 표현하였다.

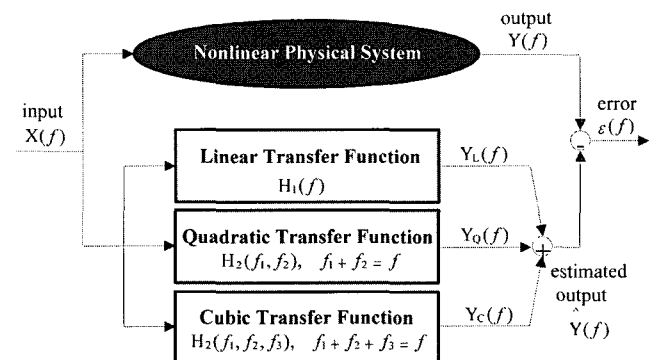


그림 1 실제 시스템의 비선형 주파수영역 모델

2.3 볼테라 급수 표현

2.3.1 진자 운동

선형 감쇠를 갖는 단순 진자의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{y}(t) + a \dot{y}(t) + b \sin[y(t)] = x(t) \quad (8)$$

$|y(t)| < 1$ 인 경우에 1%내의 정확도 범위 내에서 적당히 큰 스윙에 대하여 $\sin[y(t)] = y(t) - \frac{1}{6}\{y(t)\}^3$ 를 대입하게 되면, 진자의 운동 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\ddot{y}(t) + a \dot{y}(t) + b y(t) - \frac{1}{6}b \{y(t)\}^3 = x(t) \quad (9)$$

이 식으로부터 두 개의 시스템 파라미터 a 와 b 를 인식할 필요가 있다.

진자 운동 방정식의 볼테라 급수 표현은 Schetzen⁽⁹⁾의 방법으로 구할 수 있다.

$$\ddot{y}_1(t) + a \dot{y}_1(t) + b y_1(t) = x(t) \quad (10a)$$

$$\ddot{y}_2(t) + a \dot{y}_2(t) + b y_2(t) = 0 \quad (10b)$$

$$\ddot{y}_3(t) + a \dot{y}_3(t) + b y_3(t) = \frac{1}{6}b \{y_1(t)\}^3 \quad (10c)$$

진자 운동 방정식의 전달함수는 푸리에 변환을 사용하여 유도된다.

$$H_1(\omega) = 1/(b - \omega^2 + i\omega a) \quad (11a)$$

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = 0 \quad (11b)$$

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{6}b H_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3) \quad (11c)$$

2.3.2 유연한 해양 구조물

그림 2에 연구에서 사용한 단자유도 시스템을 나타내었다. 단자유도 시스템은 직경이 D 이며 두께가 t 인 평원반으로 구성된다. 평원반은 스프링(선형계수 k 및 비선형계수 k_3)으로 바닥에 부착되어 있으며 질량은 $mt=1/4 \cdot \rho_s \pi D^2 t$ (ρ_s : 등가 질량 밀도) 이다. (Paik과 Roesset⁽⁴⁾)

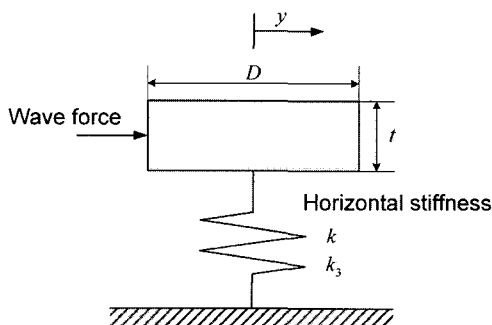


그림 2 단자유도 시스템(유연한 해양구조물)

평원반의 변위를 y 라 하면, 운동방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$m_t \ddot{y} + c \dot{y} + k y + k_3 y^3 = C_M \rho_w \frac{\pi D^2}{4} a_x t - C_m \frac{\pi D^2}{4} \rho_w t \ddot{y} + \frac{1}{2} C_D \rho_w D t |u - \dot{y}|(u - \dot{y}) \quad (12)$$

운동방정식의 우변의 하중 항은 Morison의 파력 식으로부터 구한 것이다. 이 표현 식에서 부가질량 계수는 $C_m = C_M - 1$ 이다. 이 부가질량 항을 좌변으로 넘기고, $m_w = C_m \cdot \pi D^2 / 4 \rho_w$ 와 $m_T = (m_w + m)t$ 라 놓은 후, m_T 로 양변을 나눠주면 운동방정식의 최종 형태는 다음과 같다.

$$\ddot{y} + 2\xi \omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y + s_3 y^3 = \alpha [a_x + \beta |u - \dot{y}|(u - \dot{y})] \quad (13)$$

여기서, $\omega_0^2 = k/m_T$, $\xi = 2\xi \omega_0 m_T$, $s_3 = k_3/m_T$, $\alpha = C_M / (C_m + \rho_s / \rho_w)$, $\beta = C_D / (C_M \pi D / 2)$ 이다.

Morison 식의 비선형 항력 항은 Borgman⁽¹²⁾이 제안한 방법으로 다항급수로 근사화된다. 다항급수의 계수는 상대 속도를 평균 m_v 및 표준편차 σ_v 인 정규분포로 가정하여 자승 오차의 기대값을 최소화함으로써 구한다.

Morison 식의 비선형 항력 항은 3차 다항식 형태로 전개할 수 있다.

$$|v|v \approx a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 \quad (14)$$

여기서, $v = u_c + u - \dot{y}$ 는 상대 속도로서, u_c , u 는 각각 조류 및 파랑의 물 입자 속도이며, \dot{y} 는 구조물의 속도이다.

자승 오차의 기대값은 다음과 같다.

$$E[\{|v|v - (a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3)\}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \{ |v|v - (a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3) \}^2 \frac{\exp[-\frac{(v - m_v)^2}{2\sigma_v^2}]}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} dv \quad (15)$$

여기서, m_v , σ_v 는 각각 상대 속도의 평균 및 표준편차이다.

자승 오차를 최소화함으로써, 4원 선형 연립 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial E[\{|v|v - (a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3)\}^2]}{\partial a_i} = 0 \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & E[v] & E[v^2] & E[v^3] \\ E[v] & E[v^2] & E[v^3] & E[v^4] \\ E[v^2] & E[v^3] & E[v^4] & E[v^5] \\ E[v^3] & E[v^4] & E[v^5] & E[v^6] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[|v|v] \\ E[|v|v^2] \\ E[|v|v^3] \\ E[|v|v^4] \end{bmatrix} \quad (17)$$

다항식의 계수는 다음과 같다.

$$a_0 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m_v^3}{3\sigma_v} \exp\left[-\frac{m_v^2}{2\sigma_v^2}\right] \quad (18a)$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m_v^2 + \sigma_v^2}{\sigma_v} \exp\left[-\frac{m_v^2}{2\sigma_v^2}\right] \quad (18b)$$

$$a_2 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m_v}{\sigma_v} \exp\left[-\frac{m_v^2}{2\sigma_v^2}\right] + \operatorname{erf}\left[\frac{m_v}{\sqrt{2}\sigma_v}\right] \quad (18c)$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{3\sigma_v} \exp\left[-\frac{m_v^2}{2\sigma_v^2}\right] \quad (18d)$$

여기서, $\exp[\]$: 지수 함수; $\operatorname{erf}[\]$: 에러 함수.

따라서, 단자유도 시스템의 운동방정식인 식 (13)은 이제 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0\dot{y} + \omega_0^2y + s_3y^3 = \alpha\dot{v} + \alpha\beta(a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3) \quad (19)$$

식 (19)의 비선형 운동방정식을 Schetzen⁽⁹⁾의 방법을 사용하여 3차의 볼테라 급수로 표현하면 식 (20a)-(20d)를 얻을 수 있다. 계산에서 포함하는 볼테라 급수의 차수가 증가함에 따라 식 (7)에서 확인할 수 있는 바와 같이 계산량은 기하급수적으로 증가하게 된다. 가령 고려하는 이산 주파수의 수가 N이라 하면 볼테라 급수의 3차 및 5차 성분의 계산 시간은 N³ 및 N⁵에 비례하게 된다. 이러한 실용적인 이유로 3차까지의 볼테라 급수가 일반적으로 사용된다.

$$\omega_0^2y_0 + s_3y_0^3 = \alpha\beta(a_0 + a_1u_c + a_2u_c^2 + a_3u_c^3) \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \{2\xi\omega_0 + \alpha\beta(a_1 + 2a_2u_c + 3a_3u_c^2)\}\dot{y}_1 + (\omega_0^2 + 3s_3y_0^2)y_1 \\ = \alpha\dot{u} + \alpha\beta(a_1 + 2a_2u_c + 3a_3u_c^2)u \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + \{2\xi\omega_0 + \alpha\beta(a_1 + 2a_2u_c + 3a_3u_c^2)\}\dot{y}_2 + (\omega_0^2 + 3s_3y_0^2)y_2 \\ = \alpha\beta(a_2 + 3a_3u_c)(u - \dot{y}_1)^2 - 3s_3y_0y_1^2 \end{aligned} \quad (20c)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_3 + \{2\xi\omega_0 + \alpha\beta(a_1 + 2a_2u_c + 3a_3u_c^2)\}\dot{y}_3 + (\omega_0^2 + 3s_3y_0^2)y_3 = \\ \alpha\beta\{(2a_2 + 6a_3u_c)(\dot{y}_1 - u)\dot{y}_2 + a_3(u - \dot{y}_1)^3\} - s_3(y_1^3 + 6y_0y_1y_2) \end{aligned} \quad (20d)$$

본 연구에서는 위와 같은 3차 기본식에 다음과 같이 근사화한 4차 및 5차 성분을 추가하여, 계산량은 3차 볼테라 급수의 수준이면서, 정확성은 5차 볼테라 급수의 수준을 확보하도록 시도 하였다. 즉, 4차 및 5차의 볼테라 표현식을 보면 공통적으로 $\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2$ 및 $\{y_1(t)\}^2$ 항을 찾아 볼 수 있는데, 이 값들은 다음과 같이 평균과 편차로 표현할 수 있다.

$$\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2 = E[\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2] + O_1(t) \quad (21a)$$

$$\{y_1(t)\}^2 = E[\{y_1(t)\}^2] + O_2(t) \quad (21b)$$

시간에 따라 변하는 편차 항 $O_1(t)$ 및 $O_2(t)$ 를 제거하면 평균 항만 남게 된다. 따라서 4차 볼테라 표현식에 다음과 같이 근사화를 적용할 수 있으며,

$$\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2 \dot{y}_2(t) \approx E[\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2] \dot{y}_2(t) \quad (22a)$$

$$\{y_1(t)\}^2 y_2(t) \approx E[\{y_1(t)\}^2] y_2(t) \quad (22b)$$

또한, 5차 볼테라 표현식에는 다음과 같이 근사화를 적용할 수 있다.

$$\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2 \dot{y}_3(t) \approx E[\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2] \dot{y}_3(t) \quad (23a)$$

$$\{y_1(t)\}^2 y_3(t) \approx E[\{y_1(t)\}^2] y_3(t) \quad (23b)$$

여기서, 평균 항은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2] &= V[u(t) - \dot{y}_1(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{u\dot{y}_1}(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |1 - i\omega H_1(\omega)|^2 S_{uu}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} E[\{y_1(t)\}^2] &= V[\{y_1(t)\}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_1y_1}(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(\omega)|^2 S_{uu}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (24b)$$

$E[\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2]$ 의 값은 항상 양수이기 때문에 $E[\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2] \dot{y}_2(t)$ 및 $E[\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2] \dot{y}_3(t)$ 는 볼테라 표현식에서 감쇠력으로 작용하게 되고, $E[\{y_1(t)\}^2]$ 의 값도 항상 양수이기 때문에 $E[\{y_1(t)\}^2] y_2(t)$ 및 $E[\{y_1(t)\}^2] y_3(t)$ 는 볼테라 표현식에서 탄성력으로 작용하게 된다.

그러므로, 식 (20c)와 (20d)에 이와 같이 4차와 5차 항의 근사값을 포함시키면 다음과 같이 쓸 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + \{2\xi\omega_0 + \alpha\beta(a_1 + 2a_2u_c + 3a_3u_c^2 + 3a_3E[\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2])\} \\ \dot{y}_2 + (\omega_0^2 + 3s_3y_0^2 + 3s_3E[\{y_1(t)\}^2])y_2 = \alpha\beta(a_2 + 3a_3u_c) \\ (u - \dot{y}_1)^2 - 3s_3y_0y_1^2 \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_3 + \{2\xi\omega_0 + \alpha\beta(a_1 + 2a_2u_c + 3a_3u_c^2 + 3a_3E[\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2])\} \\ \dot{y}_3 + (\omega_0^2 + 3s_3y_0^2 + 3s_3E[\{y_1(t)\}^2])y_3 = \alpha\beta\{(2a_2 + 6a_3u_c) \\ (\dot{y}_1 - u)\dot{y}_2 + a_3(u - \dot{y}_1)^3\} - s_3(y_1^3 + 6y_0y_1y_2) \end{aligned} \quad (25b)$$

결과적으로, 식 (20a), (20b), (25a), (25b)를 푸리에 변환하면, 3차 비선형 볼테라 기본식을 이용하되 4차와 5차의 효과를 고려한 비선형 운동방정식의 전달함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H_1(\omega) = \frac{Y_1(\omega)}{U(\omega)} = H_s(\omega)H_f(\omega) \quad (26a)$$

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = \hat{H}_s(\omega_1 + \omega_2) \{ \alpha\beta(a_2 + 3a_3u_c)(1 - i\omega_1H_1(\omega_1)) \cdot (1 - i\omega_2H_1(\omega_2)) - 3s_3y_0H_1(\omega_1)H_1(\omega_2) \} \quad (26b)$$

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{6} \sum_{\substack{i+j+k=6 \\ i,j,k>0}} \hat{H}_3(\omega_i, \omega_j, \omega_k) \quad (26c)$$

여기서,

$$H_s(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 3s_3y_0^2 - \omega^2 + i\omega\{2\xi\omega_0 + \alpha\beta(a_1 + 2a_2u_c + 3a_3u_c^2)\}} \quad (26d)$$

$$\hat{H}_s(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 3s_3y_0^2 + 3s_3E[\{y_1(t)\}^2] - \omega^2 + i\omega\{2\xi\omega_0 + \alpha\beta(a_1 + 2a_2u_c + 3a_3u_c^2 + 3a_3E[\{u(t) - \dot{y}_1(t)\}^2])\}} \quad (26e)$$

$$H_f(\omega) = i\omega\alpha + \alpha\beta(a_1 + 2a_2u_c + 3a_3u_c^2) \quad (26f)$$

$$\hat{H}_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \hat{H}_s(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \{ \alpha\beta\{(2a_2 + 6a_3u_c) \cdot (i\omega_1H_1(\omega_1) - 1)i(\omega_2 + \omega_3)H_2(\omega_2, \omega_3) \cdot (1 - i\omega_2H_1(\omega_2))(1 - i\omega_3H_1(\omega_3))\} - s_3(H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3) + 6y_0H_1(\omega_1)H_2(\omega_2, \omega_3)) \} \quad (26g)$$

2.4 파라미터 인식

원래 출력의 이산 푸리에 변환 $Y(f_m)$ 을 기준 값으로 하고, 이 값과 주파수 영역 볼테라 모델로부터 계산된 출력 값 $\hat{Y}(f_m)$ 사이의 차를 오차 $\varepsilon(f_m)$ 으로 정의한다.(그림 1 참조)

$$\varepsilon(f_m) = Y(f_m) - \hat{Y}(f_m) \quad (27)$$

여기서,

$$\hat{Y}(f_m) = H_1(f_m)U(f_m) + \sum_{i+j=m} H_2(f_i, f_j)U(f_i)U(f_j) + \sum_{i+j+k=m} H_3(f_i, f_j, f_k)U(f_i)U(f_j)U(f_k) \quad (28)$$

오차 최적화 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\Omega(f_m) = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i(f_m)| = \sum_{i=1}^n |Y_i(f_m) - \hat{Y}_i(f_m)| \quad (29)$$

여기서, n은 앙상블 집합의 수이다.

식 (29)의 오차 최적화 함수를 최소화 하는 비선형 시스템 방정식의 파라미터를 찾기 위하여 IMSL Libraries⁽¹⁰⁾의 DBCPOL 서브루틴을 사용하였는데, 이 서브루틴은 다수

의 변수를 가지는 함수의 최소점을 찾는 complex method를 사용하며, 함수는 매끈하지 않다고(no smoothness) 가정된다.

3. 예제

3.1 진자 방정식의 시스템 파라미터 인식

이 연구에서는 입력-출력 관계의 주파수 영역 볼테라 모델을 사용하여 식 (9)와 같은 진자 방정식의 2개의 파라미터를 인식하였다.

시스템 입력 $x(t)$ 는 다음과 같이 단일 주파수 성분을 가지는 삼각함수 신호를 선택하였다.

$$x(t) = \Gamma_k \sin[2\pi\Omega t + \Theta_k] \quad (30)$$

여기서, Γ_k 는 지수분포인 진폭의 k 번째 값이며, Θ_k 는 균일분포인 위상의 k 번째 값이고, 진폭과 위상의 평균과 표준편차는 각각 $E[\Gamma] = 3.0$, $V[\Gamma] = 0.25$, $E[\Theta] = 0.0$, $V[\Theta] =$ 이며, 주파수는 $\Omega = 1.0$ 으로 정한다.

특히, 시스템 파라미터 추정에 있어 잡음의 효과를 평가하기 위해서 zero-mean 가우시안 잡음 $n(t)$ 를 출력 신호에 더해 주었으며, 이 때 신호 대 잡음 파워 비(signal to noise power ratio, SNR)는 10, 20, 30dB의 3가지 경우를 사용하였다.

$$SNR = 10 \log_{10} \left[\frac{S}{N} \right] \text{ dB} \quad (31)$$

시간 영역 시뮬레이션을 위해 사용한 값들은 표 1과 같다.

표 1 진자 방정식에 사용한 수치

계 수	수 치
샘플링 주파수[Hz]	20
샘플 사이 시간간격[sec]	0.05
앙상블세트당 데이터 개수	2560
앙상블 세트의 주기[sec]	128
앙상블 세트 개수	20
Bandwidth 해상도[Hz]	0.0078125

Nam과 Powers⁽⁷⁾의 연구와 본 연구에서 얻어진 시스템 파라미터 인식 결과를 표 2에 비교하여 나타내었다. 이표로부터 두 방법 모두 시스템 파라미터 a 와 b 의 인식에 있어서 좋은 결과를 보임을 알 수 있다. Nam과 Powers의 연구에서 600 앙상블 집합을 이용한 것을 고

려하면 본 연구 사용한 방법은 20 세트의 상대적으로 적은 앙상블 집합을 이용하여 좋은 성과를 얻은 것에 주목할 만하다. 그림 3에는 본 연구에서 사용한 주파수영역 볼테라 모델로 파라미터 값들을 구할 때 앙상블 집합의 수에 따른 변화를 나타내었는데, 그림으로부터 앙상블 집합의 수가 5, 10, 20으로 점차 증가됨에 따라 파라미터 인식의 정확도가 보다 좋아지며, SNR이 10, 20, 30으로 커질수록 또한 정확도가 좋아지는 것을 확인할 수 있다.

표 2 진자 방정식의 파라미터 인식 결과

Method	True Values	Estimated Values		
		30dB (SNR)	20dB (SNR)	10dB (SNR)
Nam과 Powers (600 ensemble sets)	a = 3,000	2.939	2.939	2.940
	b = 2,000	1.956	1.955	1.954
Volterra Model (20 ensemble sets)	a = 3,000	3.000	3.001	3.001
	b = 2,000	1.999	2.010	2.045

3.2 단자유도 유연한 해양구조물의 시스템 파라미터 인식

해양구조물의 동적 해석에 있어 모리슨 식의 항력 및 관성력 계수는 매우 중요하다. 왜냐하면 이 계수들이 파랑 하중을 추정하는 계산의 정확도에 큰 영향을 주기 때문이다. 또한, 유연한 해양구조물의 비선형 거동을 반영하기 위하여 비선형 강도를 고려할 필요가 있다. 이 연구에서는 유연한 해양구조물의 비선형 전달함수를 사용하여 항력계수, 관성력계수 및 비선형 강도의 3가지 파라미터를 인식하는 방법을 제안하였다.

먼저, 식 (13)의 운동방정식에 대하여, 그림 4의 $H_s = 10 m$ 인 JONSWAP 스펙트럼으로부터 구한 불규칙 가진을 입력하여 시간 영역 시뮬레이션을 통하여 응답을 구하고 이를 기준 출력으로 한다. 이제, 식 (20), (25) 및 (26)의 비선형 볼테라 모델과 2.4절의 오차 최적화 방법을 통하여 파라미터를 인식한다. 시간 영역 시뮬레이션에 사용한 값들은 표 3과 같으며, 단자유도계의 질량, 강도 및 감쇠 계수는 미리 알고 있다고 가정하였다.

표 3 단자유도 구조물 예제에 사용한 수치

계 수	수 치
샘플링 주파수[Hz]	20
샘플 사이 시간간격[sec]	0.05
앙상블 세트당 데이터 개수	2560
앙상블 세트의 주기[sec]	128
앙상블 세트 개수	20
Bandwidth 해상도[Hz]	0.0078125

조류의 유속 u_c 과 비선형 강도 s_3 의 고려여부에 따라 구분한 4가지 경우에 대하여 파라미터 인식을 수행한 결과를 표 4에 나타내었다. 여기서, 유속은 1.0[m/sec]로 하였고 비선형 강도 s_3 은 선형 강도의 약 5%인 0.001로 하였다.

4가지 경우에 대한 파라미터 인식 결과를 평균값을 기준으로 살펴볼 때, 모리슨 식의 관성력 및 항력 계수는 모두 5% 이내의 오차수준으로 파라미터 인식 결과를 보였고, 비선형 강도는 약 15% 이내의 오차가 발생하였다. 조류가 작용하는 경우 파라미터 인식 결과의 정확도가 증가하였으며, 모리슨 식의 관성 및 항력 계수에 추가로 비선형 강도를 인식하는 경우에 파라미터 인식의 정확도가 감소하였다.

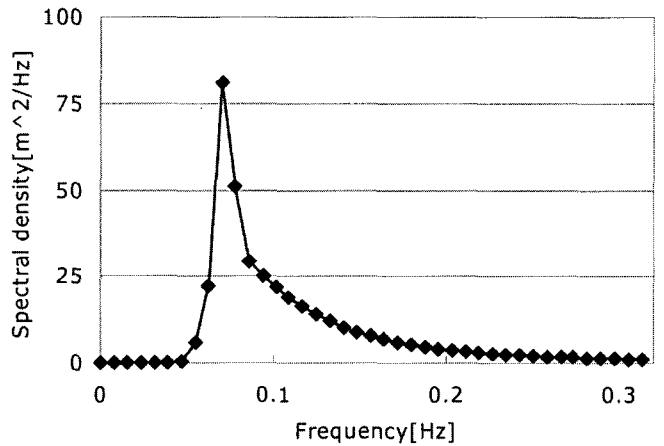


그림 4 JONSWAP 스펙트럼 ($H_s = 10 m$)

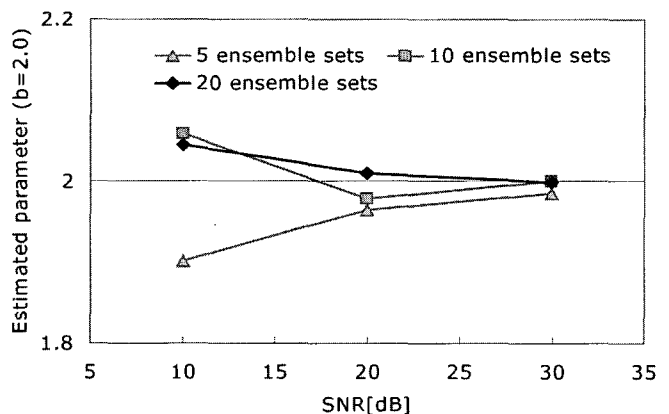
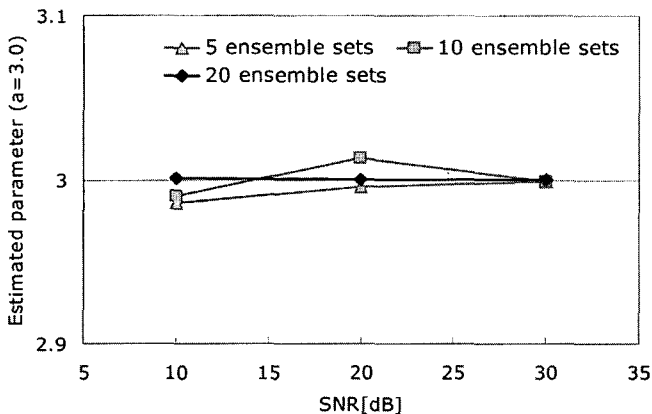


그림 3 앙상블 집합의 수와 SNR에 따른 파라미터 인식 결과

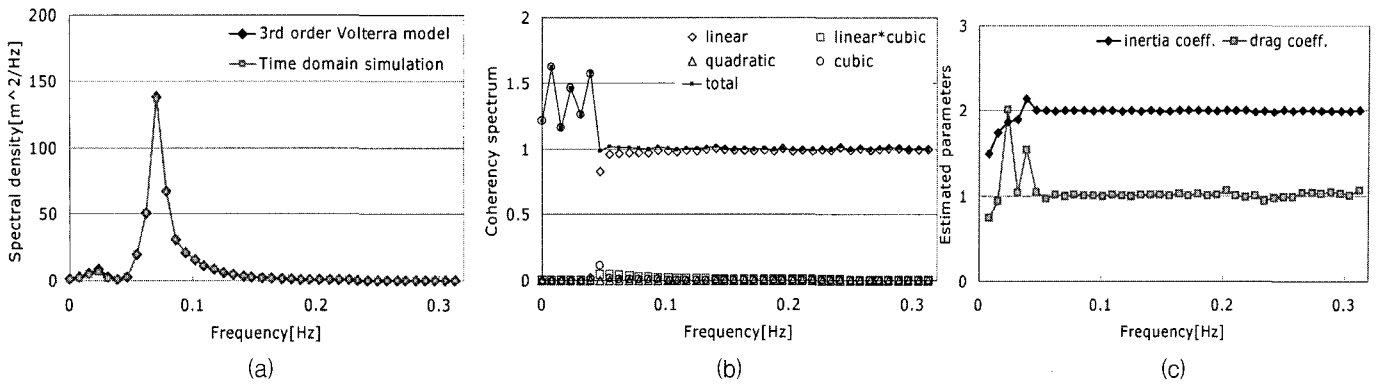


그림 5 단자유도 구조물의 응답 스펙트럼, 연관도 스펙트럼 및 인식된 파라미터 (Case I, $u_c = 0.0[m/sec]$)

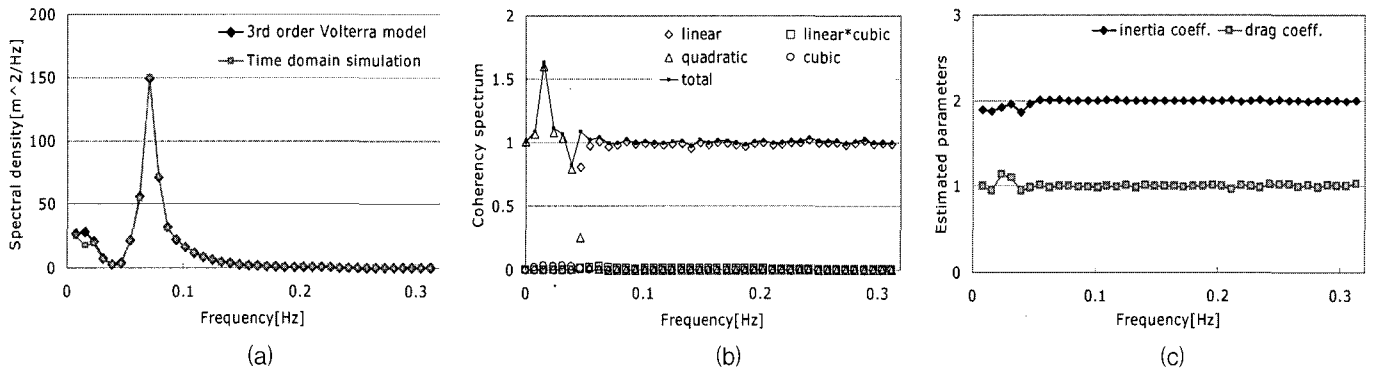


그림 6 단자유도 구조물의 응답 스펙트럼, 연관도 스펙트럼 및 인식된 파라미터(Case II, $u_c = 1.0[m/sec]$)

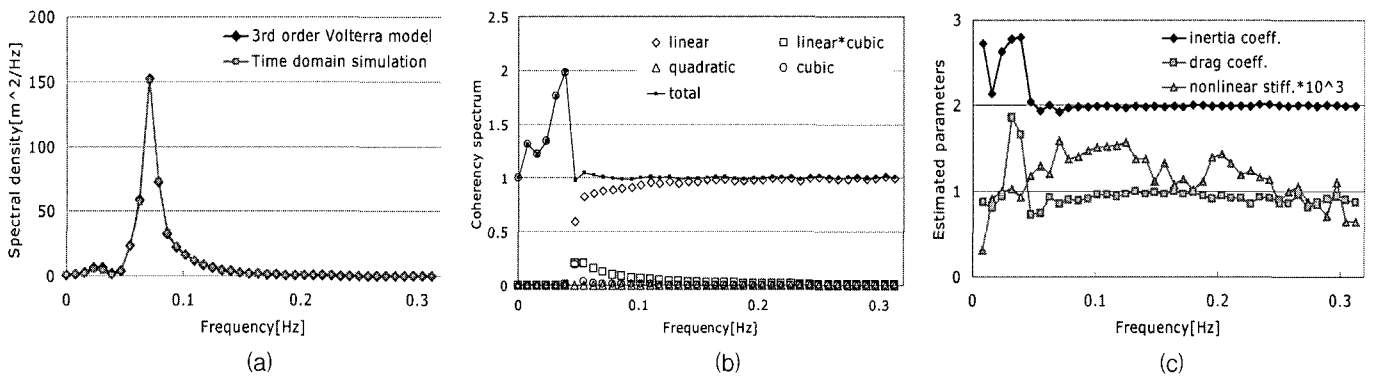


그림 7 단자유도 구조물의 응답 스펙트럼, 연관도 스펙트럼 및 인식된 파라미터 (Case III, 비선형 강도 포함, $u_c = 0.0[m/sec]$)

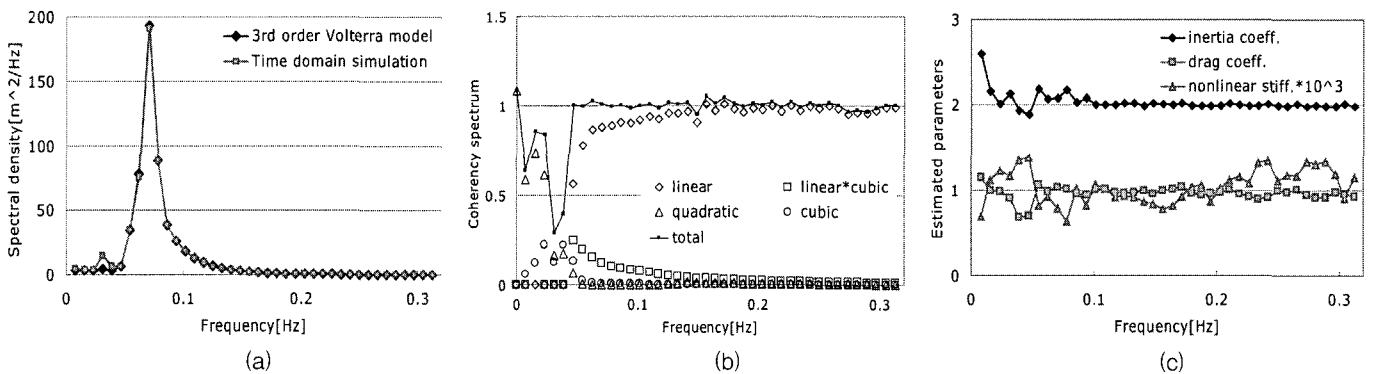


그림 8 단자유도 구조물의 응답 스펙트럼, 연관도 스펙트럼 및 인식된 파라미터 (Case IV, 비선형 강도 포함, $u_c = 1.0[m/sec]$)

표 4 단자유도 구조물의 파라미터 인식 결과의 평균치(괄호 안은 표준편차)

분 류	관성력 계수	항력 계수	비선형 강도
Case 1: $u_c = 0$ [m/sec]	1.98(0.0954)	1.04(0.186)	-
Case 2: $u_c = 1$ [m/sec]	1.98(0.0356)	1.00(0.0320)	-
Case 3: $u_c = 0$ [m/sec] 비선형 강도 포함	2.07(0.226)	0.952(0.200)	1.15×10^{-3} (2.87×10^{-4})
Case 4: $u_c = 1$ [m/sec] 비선형 강도 포함	2.03(0.109)	0.965(0.0781)	1.05×10^{-3} (1.99×10^{-4})

4가지 경우에 대하여 단자유도 구조물의 응답 스펙트럼, 연관도 스펙트럼(coherency spectrum) 및 인식된 파라미터를 그림 4에서 7까지에 각각 도시하였다. 연관도란 기준 출력스펙트럼 값에 대한 모델 출력스펙트럼 값의 비율로서 보다 자세한 정의는 Appendix에 나타내었다. 그림 5는 비선형 강도와 조류가 모두 없는 경우 I의 결과인데, 그림 (a)의 응답스펙트럼 비교 그래프를 보면, 3차 볼테라 모델이 시간영역 시뮬레이션 결과와 잘 부합함을 알 수 있다. 그림 5(b)의 연관도 그래프를 보면, 입력파의 주파수성분이 없는 저주파수대인 0.0 - 0.04 [Hz]에서는 3차 비선형 성분이 지배적이고, 입력파 주파수성분이 있는 0.04 - 0.32 [Hz]에서는 선형 성분이 지배적임을 알 수 있다. 그림 5(c)의 인식된 항력 및 관성 계수는 0.04 - 0.32[Hz]에 비하여 0.0 - 0.04 [Hz]의 비선형 구간에서 정확도가 다소 떨어지는 결과를 보였다. 그림 6은 조류 속도가 $u_c=1.0$ [m/sec]인 경우 II의 결과로서, 그림 6(b)의 연관도 스펙트럼으로부터 저주파수대인 0.0 - 0.04 [Hz]에서는 2차 비선형 성분이 지배적임을 알 수 있는데, 그림 5(b)의 결과와 비교해 볼 때, 조류가 포함되면 비선형 항력 항이 3차에서 2차 비선형으로 변화함을 알 수 있다. 그림 6(c)에 도시된, 인식된 항력 및 관성 계수의 정확도는 전체 주파수대에 걸쳐서 매우 좋은 결과를 보였다. 그림 7에는 비선형 강도를 포함한 경우 III의 결과를 도시하였는데, 그림 7(a)의 응답스펙트럼 그래프에서 3차 볼테라 모델이 시간영역 시뮬레이션 결과와 전체 주파수 범위대에서 잘 부합하고 있음을 확인할 수 있으며, 그림 7(b)에서는 입력파의 주파수성분이 없는 저주파수대인 0.0-0.04 [Hz]에서는 3차 비선형 성분이 지배적이고, 입력파 주파수성분이 있는 0.04-0.32 [Hz]에서는 선형 성분이 지배적이나 비선형 강도의 추가로 인하여 선형·3차 결합성분 역시 중요한 성분임을 연관도 스펙트럼으로부터 분석할 수 있다. 그림 7(c)의 인식된 3개의 파라미터의 정확도는 0.04 - 0.32 [Hz]에 비하여 0.0 - 0.04 [Hz]에서 떨어지며 또한 그림 5의 비선형 강도가 없는 경우 I에 비하여 다소 떨어짐을 알 수 있다. 마지막으로, 그림 8은 비선형 강도

를 포함하고 조류 속도가 $u_c = 1.0$ [m/sec]인 경우 IV의 결과로서, 그림 8(b)의 연관도 스펙트럼으로부터 저주파수대인 0.0 - 0.04 [Hz]에서는 2차 및 3차 비선형 성분이 지배적이고, 0.04 - 0.32 [Hz]에서는 선형 성분이 지배적이나, 0.05 - 0.10 [Hz]인 응답의 피크 주파수대에서 선형 성분 이외에도 선형·3차 결합 성분이 역시 중요한 성분임을 분석할 수 있다. 조류가 포함된 경우에 대한 그림 8(c)에 인식된 3개의 파라미터는 조류가 없는 그림 7(c)의 결과와 비교하면 전체 주파수대에 걸쳐서 보다 좋은 정확도 결과를 보였다.

4. 결 론

진자방정식과 단자유도 유연한 해양구조물의 비선형 시스템 파라미터 인식에 주파수 영역 볼테라 모델을 적용하였다. 원래 출력의 이산 푸리에 변환 값 $Y(f)$ 와, 입력을 비선형 주파수 모델에 적용하여 얻은 출력 값 $\hat{Y}(f)$ 와 의 차이를 오차로 정의한 후, 오차를 최소화하는 파라미터를 IMSL Libraries⁽¹⁰⁾의 DBCPOL 서브루틴을 이용하여 인식하였다.

진자방정식의 비선형 파라미터를 인식함에 있어서, 이 연구에서 사용한 파라미터 인식 방법이 Nam과 Powers⁽⁷⁾의 연구에서 사용한 600개의 앙상블 집합보다 매우 적은 20개의 앙상블 집합을 사용하여 만족할 만한 결과를 얻었다.

그리고, 유연한 해양구조물의 시스템 파라미터인 모리슨식의 항력 및 관성력 계수와 비선형 강도를 인식함에 있어서 3차 주파수 영역 볼테라 모델을 기본으로 하고 4차와 5차의 효과를 고려한 이 연구의 비선형 파라미터 인식 절차가 상당한 정확성을 보여주었다. 입력파의 주파수성분이 없는 저주파수대인 0.0 - 0.04 [Hz]에서는 기본적으로 비선형 항력 항에 3차 비선형 성분이 지배적이거나, 조류 속도가 포함됨에 따라 시스템의 주된 비선형도가 3차에서 2차 비선형으로 변화함을 주파수 영역의 연관도 스펙트럼으로부터 알 수 있었다. 비선형 강도가 포함된 경우에는 응답의 피크 주파수대인 0.05 - 0.10 [Hz]에서 선형 성분 이외에도 선형·3차 결합 성분이 역시 중요한 성분임을 분석할 수 있었다.

이 연구에서 제안한 주파수 영역의 비선형 볼테라 모델을 적용하여 주파수 영역에서 비선형으로 모델링되는 시스템의 파라미터를 정확하게 산정할 수 있음을 알 수 있다.

Appendix - 응답스펙트럼 해석

입력 $u(t)$ 가 가우시안 랜덤 변수라면, 응답스펙트럼 $S_{yy}(\omega)$ 는 입력스펙트럼 $S_{uu}(\omega)$ 으로 표현할 수 있다. Bedrosian과 Rice⁽¹³⁾는 3차 볼테라 급수를 사용하여 백

색 잡음 입력에 대한 응답스펙트럼 $S_{yy}(\omega)$ 를 유도하였다. 이 연구에서 출력 $y(t)$ 는 3차 볼테라 급수로 표현된다.

$$y(t) = y_0 + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \quad (\text{A.1})$$

응답스펙트럼 $S_{yy}(\omega)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \langle y(t)y(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \{y_0 + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)\} \{y_0 + y_1(t+\tau) \\ &\quad + y_2(t+\tau) + y_3(t+\tau)\} \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ \langle y_0^2 \rangle + \langle y_1(t)y_1(t+\tau) \rangle \\ &\quad + 2\langle y_0y_2(t+\tau) \rangle + \langle y_2(t)y_2(t+\tau) \rangle \\ &\quad + 2\langle y_1(t)y_3(t+\tau) \rangle + \langle y_3(t)y_3(t+\tau) \rangle \} \\ &\quad e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= S_{y_0y_0}(\omega) + S_{y_1y_1}(\omega) + 2S_{y_0y_2}(\omega) + S_{y_2y_2}(\omega) \\ &\quad + 2S_{y_1y_3}(\omega) + S_{y_3y_3}(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

여기서,

$$S_{y_0y_0}(\omega) = y_0^2 \delta(\omega) \quad (\text{A.3a})$$

$$S_{y_1y_1}(\omega) = |H_1(\omega)|^2 S_{uu}(\omega) \quad (\text{A.3b})$$

$$S_{y_0y_2}(\omega) = y_0 \delta(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega, -\omega) S_{uu}(\omega) d\omega \quad (\text{A.3c})$$

$$\begin{aligned} S_{y_2y_2}(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_2(\omega - \omega_1, -\omega_1)|^2 S_{uu}(\omega - \omega_1) S_{uu}(\omega_1) d\omega_1 \\ &\quad + \delta(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega, -\omega) S_{uu}(\omega) d\omega \right\}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3d})$$

$$S_{y_1y_3}(\omega) = 3 \int_{-\infty}^{\infty} H_1(-\omega) H_3(\omega, -\omega_1, \omega_1) S_{uu}(\omega) S_{uu}(\omega_1) d\omega_1 \quad (\text{A.3e})$$

$$\begin{aligned} S_{y_3y_3}(\omega) &= 9 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_3(-\omega, -\omega_1, \omega_1) H_3(\omega, -\omega_2, \omega_2) S_{uu}(\omega) \\ &\quad S_{uu}(\omega_1) S_{uu}(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\ &\quad + 6 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H_3(\omega - \omega_1, \omega_1 - \omega_2, \omega_2)|^2 \\ &\quad S_{uu}(\omega - \omega_1) S_{uu}(\omega_2) S_{uu}(\omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (\text{A.3f})$$

모델의 적합도는 다음과 같은 연관도(coherency)에 의해서 평가된다.

$$\zeta_{total}(\omega) = \frac{\hat{S}_{yy}(\omega)}{S_{yy}(\omega)} = \zeta_1(\omega) + \zeta_{13}(\omega) + \zeta_2(\omega) + \zeta_3(\omega) + \dots \quad (\text{A.4})$$

여기서, $\hat{S}_{yy}(\omega)$ 은 볼테라 모델의 출력 스펙트럼, $S_{yy}(\omega)$ 는 시간영역 시뮬레이션의 출력 스펙트럼이며, $S_1(\omega) =$

$$\frac{S_{y_1y_1}(\omega)}{S_{yy}(\omega)}, S_{13}(\omega) = \frac{2S_{y_1y_3}(\omega)}{S_{yy}(\omega)}, S_2(\omega) = \frac{S_{y_2y_2}(\omega)}{S_{yy}(\omega)}, S_3(\omega) = \frac{S_{y_3y_3}(\omega)}{S_{yy}(\omega)} \text{ 이다.}$$

이 항들의 합 $\zeta_{total}(\omega)$ 이 1에 가까울수록 실제 시스템에 대한 모델의 연관도가 높다고 할 수 있다.

참고문헌

1. Worden, K. and Tomlinson, G.R., *Nonlinearity in Structural Dynamics: Detection, Identification and Modelling*, Institute of Physics Publishing, UK, 2001.
2. Kim, K. I., Powers, E. J., Ritz, C. P., Miksad, R. W. and Fischer, F. J., "Modeling of the Nonlinear Drift Oscillations of Moored Vessels Subjected to Non-Gaussian Random Sea-Wave Excitation", *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, Vol. OE-12, No.4., 1987, pp. 568-575.
3. Kim, S. B., Powers, E. J., Miksad, R. W., Fischer, F. J., Hong, J. Y., "Spectral Decomposition of Nonlinear TLP Sway Response to Non-Gaussian Irregular Seas," *Proceedings of the 21st Annual Offshore Technology Conference*, OTC 6134, Houston, Tx, 1989.
4. Paik, I. and Roesset, J. M., "Use of quadratic transfer functions to predict response of tension leg platforms", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 122, No. 9., 1996, pp. 882-889.
5. Im, S. B. and Powers, E. J., "A sparse third-order orthogonal frequency domain Volterra-like model," *Journal of Franklin Institute*, Vol. 333 (B), No. 3, 1996, pp. 385-412.
6. Sibetheros, I. A., Rijken, O. R. and Niedzwecki, J. M., "Volterra series-based system analysis of random wave interaction with a horizontal cylinder," *Ocean Engineering*, Vol. 27, 2000, pp. 241-270.
7. Nam, S. W. and Powers, E. J., "Application of higher order spectral analysis to cubically nonlinear system identification," *IEEE Transaction on Signal Processing*, Vol. 42, No. 7., 1994, pp. 1746-1765.
8. Khan, A. A. and Vyas, N. S., "Non-linear parameter estimation using Volterra and Wiener theories," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 221, No. 5., 1999, pp. 805-821.
9. Schetzen, M., *The Volterra and Wiener Theories of*

- Nonlinear Systems*, John Wiley, New York, 1980.
10. IMSL FORTRAN numerical libraries.
11. Bendat, J. S., *Nonlinear System Analysis and Identification from Random Data*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
12. Borgman, L. E., "Ocean Wave Simulation for Engineering Design," *Journal of Waterways and Harbors Division*, ASCE, WW4, 95, 1969, pp. 557-583.
13. Bedrosian, E. and Rice, S.O., "The Output Properties of Volterra Systems (Nonlinear Systems with Memory) Driven By Harmonic and Gaussian Inputs," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 59, No. 12, 1971, pp. 1688-1707.