韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제3호. 2005. 9. 485-502

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19 No 3, Sep. 2005. 485-502

사인의 덧셈정리에 대한 다양한 증명방법 연구

한 인 기 (경상대학교)
김 태 호 (경상사대부설고등학교)
유 익 승 (전북과학고등학교)
김 대 의 (경남체육고등학교)
서 보 억 (대구계성중학교)

한 가지 문제에 대한 다양한 풀이 방법을 탐색하는 것은 수학적 대상의 성질을 발명, 일반화하는 것 뿐만 아니라, 학생들의 지적인 유창성 및 유연성 계발, 수학에 대한 심미적 가치의 함양을 위한 의미있는 교수학적 경험을 제공할 수 있을 것이다. 본 연구에서는 고등학교 '미분과 적분'에 제시된 사인의 덧셈정리에 대한 다양한 증명 방법을 제시하고, 이를 분석하여 수학교수학적으로 의미로운 시사점을 도출하였다. 이를 통해, 사인의 덧셈정리에 대한 새로운 증명 방법의 탐색, 사인의 덧셈정리의 수학교수학적 활용의 다양한 가능성을 모색할 수 있는 기초자료를 제공할 것이며, 제시된 증명 방법들은 '미분과 적분'의 지도에서 심화학습 자료로도 활용할 수 있을 것이다.

1. 서 론

제 7차 수학과 교육과정(교육부, 1998, p.28)에서는 수학교과를 '수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과'로 성격을 규정하였다. 즉, 수학교육에서 기본적인 수학적 도구들을 이해하여 다양한 문제상황을 탐구하고 관련된 문제해결의 기회를 가지는 것은 수학교육의 목표 달성에 있어 중요한 부분이 된다고 할 수 있다. 그리고, 상응하는 탐구 활동 및 문제해결의 경험을 학생들에게 구체적으로 수학 문제를 통해 제공하는 것은 성공적인 수학교육의 바탕이 될 것이다.

Gotman & Skopets(2000, p.3)는 '다양한 방법에 의한 문제해결은 기하학적 도형의 성질들을 충분하게 탐구할 수 있는 가능성을 제공한다. 가끔씩 문제에서는 언급되지 않은 성질을 찾아내고, 문제에 대한 흥미로운 일반화를 가능하게 한다'고 주장하면서, 다양한 방법으로 문제를 해결하도록 하는 것은 도형의 성질을 깊이 있게 탐구하며, 새로운 성질을 탐색, 일반화하는 의미로운 교수학적 상황을 제공할 수 있음을 강조하였다. 한편, 한인기 · Kombarov(2004, p.270)는 수학 영재교육에 관련된 교수학적 원리의 하나로 다양한 풀이의 원리를 제시하면서, '한 문제에 대해 다양한 풀이를 찾아보게 하고, 이들 풀이를 다양한 시각에서, 예를 들어 문제해결 접근의 참신성, 문제해결에 필요한 정보의 양,

문제해결의 아름다움, 풀이의 실용적 가치 등을 중심으로 비교하도록 하는 것은 영재아들에게 사고의 유창성과 유연성의 계발 및 육성, 수학에 대한 심미적 가치의 함양에 유익할 것'이라고 주장하였다. 결국, 한 가지 문제에 대한 다양한 풀이 방법을 탐색하는 것은 수학적 대상의 성질을 발명, 일반화하는 것 뿐만 아니라, 학생들의 지적인 유창성 및 유연성 계발, 수학에 대한 심미적 가치의 함양을 위한 의미있는 교수학적 경험을 제공할 수 있을 것이다.

다양한 방법에 의한 문제해결에 대한 대표적인 연구로 Loomis(1968)의 연구가 있으며, 최근의 국내 연구들은 첫째, 중등학교 교육과정에 관련된 주제의 다양한 교수학적 의미 탐색에 관련된 연구, 둘째 수학 영재교육에 관련된 수학사의 유명한 문제에 대한 다양한 증명방법 탐색 연구로 나눌 수 있다. 첫 번째 연구 방향에 관련하여, 한인기·강인주(2000), 한인기·신현용(2002), 한인기·이경언·홍춘희·최은주(2002), 한인기(2003a), 권영인·서보억(2004)의 연구를 들 수 있으며, 두 번째 방향의 연구로는 한인기(2003b), 한인기(2004a), 한인기(2004b) 등을 들 수 있다. 이들 연구에서는 구체적인 정리들(문제들)에 대한 다양한 증명 방법을 제시, 분석하여, 각각의 정리(문제)가 포함하는 교수학적 의미 및 이들의 교수학적 활용 가능성을 모색하여 제시하였다는 측면에서 의미로운 연구들이라 할 수 있다. 그러나, 기술한 연구들은 중등학교 수학교육에 관련된 몇몇 정리들(문제들)에 국한되어 있으며, 다양한 방법에 의한 문제해결이 가지는 수학교수학적 의미를 생각하면 좀더 다양한 정리들(문제들)에 대한 폭넓은 연구가 필요할 것이다.

본 연구에서는 고등학교 '미분과 적분'에 제시된 사인의 덧셈정리에 대한 다양한 증명 방법을 제시하고, 이를 분석하여 수학교수학적으로 의미로운 시사점을 도출할 것이다. 이를 통해, 사인의 덧셈정리에 대한 새로운 증명 방법의 탐색, 사인의 덧셈정리에 대한 수학교수학적 활용의 다양한 가능성을 모색할 수 있는 기초자료를 제공할 것으로 기대되며, 제시된 구체적인 증명 방법들은 '미분과 적분'의 지도에서 심화학습 자료로도 활용할 수 있을 것이다.

각 α, β에서 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$와 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$을 사인의 덧셈정리라 한다. 본 연구에서는 사인의 덧셈정리의 증명 방법에 사용된 도형들을 중심으로, 첫째 두 삼각형에서 α, β를 생각하여 이들을 접하거나 겹쳐 놓아 증명하는 방법, 둘째 α, β를 한 삼각형에서 생각하여 증명하는 방법, 셋째 원에 내접하는 다각형에서 α, β를 생각하여 증명하는 방법으로 분류하였다.

2. 두 삼각형에서 두 각을 접하거나 겹쳐 놓아 증명하는 방법

두 삼각형에서 두 각을 접하거나 겹쳐 놓아 증명하는 방법을 삼각법을 이용한 증명, 일차변환을 이용한 증명, 벡터를 이용한 증명으로 나누어 살펴보도록 하자.

(1) 삼각법을 이용한 증명

이강섭 외 6인(2005a, p.58)의 교과서에서는 사인과 코사인의 정의를 이용하여 사인의 덧셈정리를 증명하였다. 이를 자세히 살펴보자.

증명방법 1. <그림 1>과 같이 직각삼각형 ABC, ACD를 서로 접하게 두자. 그리고 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 $\overline{ED}$에 내린 수선의 발을 G라고 하자. 또 두 직각삼각형에서 서로 접하고 있는 각각의 각을 $\angle BAC = x$, $\angle CAD = y$라 하면, $\angle BAD = x+y$가 된다. 따라서, $\sin(x+y) = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$ …①을 얻을 수 있다. 여기서, $\overline{DE} = \overline{DG} + \overline{EG}$이므로, $\overline{DG}$와 $\overline{EG}$의 길이를 구하여 보자.

$$\overline{DG} = \overline{DC}\cos x \quad \cdots ②, \qquad \overline{DC} = \overline{AD}\sin y \quad \cdots ③$$

③식을 ②식에 대입하면, $\overline{DG}$의 값을 얻을 수 있다.

$$\overline{DG} = \overline{AD}\sin y\cos x \quad \cdots ④$$

점 C에서 수선의 발 G에 의해서 생기는 $\overline{GE}$는 $\overline{GE} = \overline{CB}$ 이므로, $\overline{CB}$의 길이를 구하면,

$$\overline{CB} = \overline{AC}\sin x \quad \cdots ⑤, \qquad \overline{AC} = \overline{AD}\cos y \quad \cdots ⑥$$

이고, ⑥식을 ⑤식에 대입하면, $\overline{CB}$의 길이를 구할 수 있다.

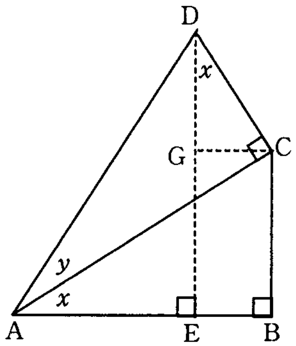
$$\overline{CB} = \overline{GE} = \overline{AD}\cos y\sin x \quad \cdots ⑦$$

④식과 ⑦식에 의해서 $\overline{DE}$의 길이는 다음과 같이 얻을 수 있다.

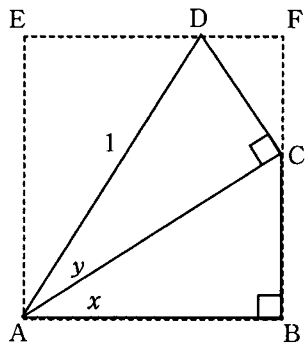
$$\overline{DE} = \overline{DG} + \overline{GE} = \overline{AD}\sin y\cos x + \overline{AD}\cos y\sin x \quad \cdots ⑧$$

따라서, ①식과 ⑧식에 의해서, 공식을 얻을 수 있다.

$$\sin(x+y) = \frac{\overline{AD}\sin y\cos x + \overline{AD}\cos y\sin x}{\overline{AD}} = \sin x\cos y + \cos x\sin y \quad \square$$



<그림 1>



<그림 2>

증명방법 1은 사인 및 코사인의 정의를 이용한 기본적인 증명방법의 하나이다. <그림 1>에서와 같이, 두 개의 삼각형 ABC, ACD를 접하게 놓으면 두 각의 합을 얻을 수 있다. 이제, 이들 각을 포함하는 새로운 삼각형 ADE에서 이들 각의 합에 대한 사인을 생각하여 증명을 완성할 수 있다. 증명방법 1을 좀더 상세히 분석해 보면 다음과 같다.

(가) 각 $\angle BAC = x$, $\angle DAC = y$을 포함하는 두 직각삼각형을 변 AC가 겹치도록 놓는다.

(나) 보조선 $\overline{DE}$를 이용하여 각 $x+y$을 포함하는 직각삼각형 ADE를 만들고, 보조선 $\overline{CG}$를 이용하여 직각삼각형 ABC와 닮음인 삼각형 DGC를 만든다.

(다) 삼각형의 닮음 성질과 삼각함수의 정의 등을 이용하여 변의 길이를 이용하여 사인의 덧셈정리를 증명하였다.

본 연구에서는 증명방법 1을 바탕으로 다음과 같은 증명방법을 얻었다.

증명방법 2. <그림 2>에서 삼각형 ACD는 각 C가 직각인 직각삼각형이고, $\overline{AD}$의 길이는 1이며, 직사각형 ABFE에 내접하고, $\angle DAC = y$, $\angle CAB = x$이다. 이때, $\overline{AC} = \cos y$, $\overline{CD} = \sin y$이다. 또 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \cos x \cos y$, $\overline{BC} = \sin x \cos y$이다. 또 삼각형 CFD에서 $\angle DCF = x$이므로 $\overline{CF} = \cos x \sin y$, $\overline{DF} = \sin x \sin y$이다. 그리고 $\angle ADE = x+y$이므로 $\overline{AE} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \sin(x+y)$이다. 이제 변의 길이로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sin(x+y) = \overline{AE} = \overline{BF} = \overline{BC} + \overline{CF} = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \square$$

증명방법 1에서는 사인의 정의를 이용하기 위해서 각의 크기가 $x+y$인 직각삼각형을 보조선 $\overline{DE}$를 이용하여 만들었지만, 증명방법 2에서는 빗변 $\overline{AD}$의 길이가 1이고 $\angle CAD = y$이며 각 C가 직각인 삼각형 ACD의 바깥쪽에 보조선을 이용하여 $\angle BAC = x$이고 직각삼각형 ACD에 외접하는 직사각형 ABFE를 만들었다. 그리고 나서, 직사각형의 대변의 길이가 같다는 성질을 이용하여 사인의 덧셈정리를 증명하였다.

한편, 최봉대 외 5인(2002b, pp.11-12)는 코사인 제 2법칙, 코사인의 차의 공식을 이용하여 사인의 덧셈 정리를 증명하였다. 이를 자세히 살펴보자.

증명방법 3. 사인의 덧셈정리를 증명하기에 앞서서 $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$을 증명해 보자. <그림 3>에서 $\overline{OB}$는 x축 위에 있고, 점 O는 좌표평면에서의 원점으로 볼 수 있다. $\overline{OA} = \overline{OC} = 1$, $\overline{AC} = l$이고, $\angle BOC = \alpha$, $\angle BOA = \beta$이라 하자. 이때 $\triangle OAC$에서 코사인 제 2법칙에 의해서 $l^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$ …①가 된다. 또한, 점 A의 좌표는 $(\cos\beta, \sin\beta)$이고, 점 C의 좌표는 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$이다. 그러므로 두 점 사이의 거리 공식에 의해서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$l^2 = \overline{AC}^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta \cdots ②$$

따라서 ①식과 ②식에 의해서 $2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$

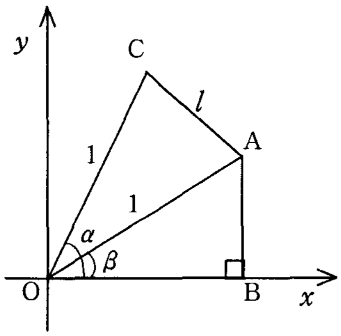
$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \cdots\cdots ③$$

이때, ③식에서 α 대신 $\frac{\pi}{2} - \alpha$를 대입하면, 사인의 합 공식을 얻는다.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \;\square$$



<그림 3>

증명방법 3에서는 코사인을 사인으로 변환할 수 있다는 것을 이용하였다. 이때, 코사인의 값은 코사인 정리를 통해 얻을 수 있으므로, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$인 것을 적절히 사용한다면 증명방법 3은 상당히 자연스러운 접근으로 여겨진다. 특히, 코사인 제 2법칙은 삼각형의 풀이에서 사용되는 매우 중요한 성질이므로, 코사인 제 2법칙을 사인의 덧셈정리에 적용하는 기회를 가지는 것은 교육적으로 의미로울 것이다.

(2) 일차변환을 이용한 증명

증명방법 4(최봉대 외 5인, 2002a. p.51)

<그림 4>와 같이 좌표평면 위의 점 P를 원점을 중심으로 각 α만큼 회전 이동하여 점 $P'(x', y')$으로 옮기는 일차변환을 f, 점 $P'(x', y')$을 원점을 중심으로 각 β만큼 회전이동하여 점 $P''(x'', y'')$으로 옮기는 일차변환을 g라 하면 합성변환 $g \circ f$는 점 $P(x, y)$를 원점을 중심으로 각 $\alpha + \beta$만큼 회전이동하여 점 $P''(x'', y'')$으로 옮기는 일차변환이다. 이때, 일차변환

f, g, $g \circ f$를 나타내는 행렬을 각각 A, B, C라 하면 다음을 얻는다.

$$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

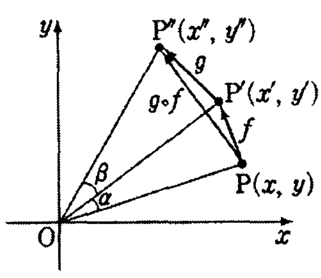
그런데, $C=AB$이므로 다음과 같다.

$$C=\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

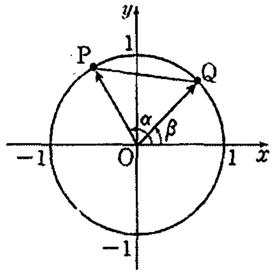
$$=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}=AB$$

따라서, 두 행렬의 대응 성분을 비교하면 사인의 덧셈정리가 증명되어진다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \ \square$$



<그림 4>



<그림 5>

증명방법 4는 평면상의 임의의 점을 원점을 중심으로 회전시킨 각에만 의존하므로, 길이 개념을 배제하여 사인의 덧셈정리를 증명할 수 있는 특별한 방법이다. 한편 증명방법 4는 복소수의 극형식을 이용하여 증명하는 방법과 평면에서 원점을 중심으로 회전한다는 측면에서 유사한 것으로 볼 수 있다.

복소수의 극형식을 이용하는 방법을 살펴보면 다음과 같다. 복소평면 상에서 복소수 z에 대해 복소수 $z(\cos\theta+i\sin\theta)$는 복소수 z를 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동시키는 것이다. 따라서, $|z_1|=|z_2|=1$이고 $\arg(z_1)=\alpha$, $\arg(z_2)=\beta$인 두 복소수 z_1, z_2에 대해 복소수 z_1z_2는 $|z_1z_2|=1$이고 $\arg(z_1z_2)=\alpha+\beta$이다. 그러므로 복소수의 극형식을 사용하면 다음과 같이 삼각함수의 덧셈정리를 얻을 수 있다.

$$z_1z_2=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$

$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

$$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

제 7차 교육과정에서는 복소수의 극형식과, 회전변환을 다루지는 않지만, 이들 개념은 수학적으로

중요하므로 교육과정의 심화 측면에서 다루는 것도 고려해 볼 수 있다.

(3) 벡터를 이용한 증명

증명방법 5(이강섭 외 6인, 2005b, pp.9-10)

<그림 5>와 같이 좌표평면 위에서 동경의 크기가 α, β인 동경과 단위원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점을 각각 P, Q라고 하면 두 점의 좌표는 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $Q(\cos\beta, \sin\beta)$이다.

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$의 내적은 다음과 같다.

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OQ}|\cos(\alpha-\beta) = 1\cdot 1\cdot\cos(\alpha-\beta) \quad \cdots ①$$

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{OP} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\overrightarrow{OQ} = (\cos\beta, \sin\beta)$에 대하여 내적을 구하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots ②$$

따라서, ①과 ②에서 다음 등식을 얻는다.

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots ③$$

등식 ③은 임의의 α, β에 대하여 성립하므로 β대신에 $-\beta$를 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots ④$$

한편, ④에서 $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$를 이용하면 덧셈정리를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\} = \cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \square\end{aligned}$$

증명방법 4와 5에서는 일차변환과 벡터의 내적이라는 서로 다른 수학적 개념을 이용하고 있지만, 유사한 증명 과정을 발견할 수 있다. 이들 두 증명에서의 유사점은 다음과 같다.

(가) 같은 원의 원주에 놓인 점들(점 P, P′, P″과 점 P, Q)을 생각한다.

(나) 이들 점들 사이의 각(사인의 덧셈정리에 포함되는 각들)을 생각한다.

(다) 원점에 대한 회전이동을 이용하여 (가), (나)에서 점들의 좌표 및 각에 대한 관계식을 구한다.

한편, 이러한 증명과정의 유사점, 벡터와 일차변환의 관계에 근거하여, 증명방법 5를 증명방법 4와 관련시킬 수 있다. <그림 5>에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이 주어졌다. 원과 x축의 교점 $R(1, 0)$을 원점에 대해 α만큼 회전이동시켜 P라고 하고, 다시 점 P를 $\beta-\alpha$만큼 회전시켜 Q라 하면, <그림 4>를 얻을 수 있다. 이때, 점 R을 원점에 대해 α만큼 회전시켜 점 P로 보내는 일차변환을 f_1, 점 P를 $\beta-\alpha$만큼 회전시켜 점 Q로 보내는 변환을 g_1이라 하자. 그러면, 합성

변환 $g_1 \circ f_1$ 는 점 R을 β만큼 회전시켜 점 Q로 보내는 일차변환이다. f_1, g_1, $g_1 \circ f_1$ 을 행렬 A_1, B_1, C_1로 나타내면, 다음과 같다.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\quad B_1 = \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha) & -\sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix},\quad C_1 = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

그리고, C_1은 $g_1 \circ f_1$ 을 나타내는 행렬이므로, C_1을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_1 = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha) & -\sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix} = A_1B_1$$

이제, A_1^{-1}을 생각하여, 위의 등식에서 양변에 A_1^{-1}을 곱하자. 그러면,

$$A_1^{-1}C_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha) & -\sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix} = B_1.$$

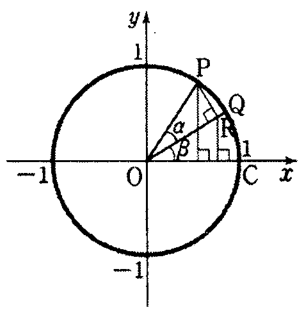
이때, $A_1^{-1}C_1$, B_1의 성분들을 비교하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

결국, 벡터를 이용한 증명방법을 회전이동을 이용한 증명으로 번역할 수 있다.

이제, 증명방법 5와 증명방법 3을 비교해 보자. <그림 5>에서 단위원과 x축과의 교점을 X라고 하면 $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = 1$이고, $\angle POX = \alpha$, $\angle QOX = \beta$, $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $Q(\cos\beta, \sin\beta)$이고 $\angle QOP = \beta - \alpha$ 이다. 그러므로, 내적에 의한 증명방법 5는 코사인 제 2법칙을 이용한 증명방법 3과도 관련하여 생각할 수 있다.

증명방법 6(최봉대 외 5인, 2002a, p.51).



<그림 6>

<그림 6>과 같이 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 (1, 0)을 C라 하고, O를 중심으로 점 C를 각 $\alpha+\beta$와 β만큼 회전한 원의 둘레 위의 점을 각각 P, Q라 하자. 또 점 P에서 직선 OQ에 내린

수선의 발을 R라 하면 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RP}=(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$, $\overline{OR}=\cos\alpha$을 얻는다. 따라서, $\overrightarrow{OR}=(\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta)$이 성립한다. 그리고 $\overline{RP}=\sin\alpha$이고, $\overline{RP}$가 x축과 이루는 각이 $\beta+\frac{\pi}{2}$이므로 다음 식을 얻는다.

$$\overrightarrow{RP}=\left(\sin\alpha\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right), \sin\alpha\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right)=(-\sin\alpha\sin\beta, \sin\alpha\cos\beta)$$

이로부터, 사인의 덧셈정리를 얻을 수 있다.

$$\overrightarrow{OP}=(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

따라서 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ □

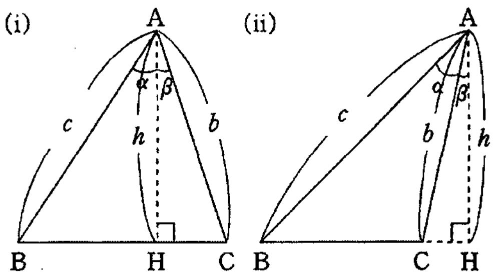
증명방법 6에서는 위치벡터에 대한 좌표계만을 이용하여 사인의 덧셈정리를 증명하는 흥미로운 방법이라 할 수 있다.

3. 두 각을 한 삼각형에서 생각하여 증명하는 방법

주어진 한 삼각형 내부에서 사인의 덧셈정리에 포함된 두 각을 생각해야 한다. 이때, 두 각을 한 꼭지점에서 생각하는 경우와 두 개의 꼭지점에서 각각의 각을 생각하는 경우로 나눌 수 있다.

증명방법 7(수학사랑, 1996, p.18)

한 꼭지점에 두 각을 설정하면, 한 개의 삼각형은 두 개의 각에 의해서 두 개의 삼각형으로 나누어지게 된다. 또한, 두 각의 합이 그 꼭지점에 위치하게 되므로 두 각의 합은 나누어진 두 개의 삼각형의 합으로 볼 수 있다. 이것은 나누어진 두 삼각형의 넓이의 합이 원래 삼각형의 넓이라는 의미로 생각할 수 있다. 그러므로 삼각형의 넓이를 이용하여 증명이 가능하다.



<그림 7>

<그림 7>의 (i)에서는 ∠A가 x, y의 두 각으로 나누어진다. 이 각들에 의해서 △ABH와

△ACH로 나누어진다. 즉, △ABC = △ABH + △AHC이다. 따라서 다음과 같은 식을 얻을 수 있다. $\frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}ch\sin\alpha+\frac{1}{2}hb\sin\beta$. 이 식을 정리하면 사인의 덧셈정리를 얻을 수 있다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

같은 방법으로 <그림 7>의 (ii)에서는 △ABC = △ABH − △ACH이므로 다음 식을 얻는다.

$$\frac{1}{2}bc\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}ch\sin\alpha-\frac{1}{2}hb\sin\beta$$

$$\therefore\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \square$$

증명방법 1에서는 두 개의 직각삼각형을 접하게 하여 사각형을 만들었다면, 증명방법 7에서는 빗변이 아닌 두 변을 접하게 하여(높이가 같은 두 직각삼각형을 서로 접하게 하여) 삼각형을 만들었다고 할 수 있다. 결국, 증명방법 1의 특수한 경우로 <그림 7>을 얻을 수 있다.

증명방법 7에서와 같이, 한 꼭지점에 두 각이 있고 두 각의 합도 그 꼭지점에 위치해 있는 문제상황은 분할된 조각(도형)의 넓이의 합과 전체 도형의 넓이를 비교하여 문제를 해결하는 경우에 종종 접할 수 있다. 예를 들어, 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, ∠BAD = α라 하고, ∠A의 이등분선 AD의 길이 l을 구한다고 하자. 그러면 증명방법 7에서와 같이, (△ABC의 넓이) = (△ABD의 넓이) + (△ACD의 넓이)이므로, $\frac{1}{2}bc\sin 2\alpha=\frac{1}{2}cl\sin\alpha+\frac{1}{2}bl\sin\alpha$ 이다. 이로부터, $bc\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha=cl\sin\alpha+bl\sin\alpha$이고, $l=\frac{2bc\cos\alpha}{b+c}$을 구할 수 있다.

이제, 한 꼭지점에 두 각이 있고, 두 각의 합은 다른 곳에 위치해 있는 경우를 살펴보자.

증명방법 8(http://mathworld.wolfram.com).

직각삼각형 ABC에서 선분 BD에 의해서 ∠B를 두 각으로 나누고 이 두 각을 α, β라 하고, $\overline{BD}=1$이라 하자. 그러면 직각삼각형 BCD와 직각삼각형 BDE에 의해서 $\overline{CD}=\sin\beta$, $\overline{BC}=\cos\beta$, $\overline{DE}=\sin\alpha$, $\overline{BE}=\cos\alpha$를 얻을 수 있다. 그리고 ∠ADE = $\alpha+\beta$이고 ∠E = 90°이므로 △ADE∽△ABC이다. 이때 $\overline{AD}=a$, $\overline{AE}=b$라 두면,

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{b}{a} \Rightarrow b=a\sin(\alpha+\beta),\quad \cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow a=\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$$

위의 두 식으로부터, $b=\sin\alpha\tan(\alpha+\beta)$을 얻을 수 있다. 이제, 직각삼각형 ABC에서

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{BE}+b}{CD+a}=\frac{\sin\beta+a}{\cos\alpha+b}=\frac{\sin\beta+\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}{\cos\alpha+\sin\alpha\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}+b}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha+b}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha+\sin\alpha\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}}$$

위의 식에서 $\sin(\alpha+\beta)=x$, $\cos(\alpha+\beta)=y$라고 두면 아래와 같은 식으로 정리할 수 있다.

$$xy\cos\alpha + x^2\sin\alpha = y\sin\beta + \sin\alpha \quad \cdots ①$$

$$y^2\cos\alpha + xy\sin\alpha = y\cos\beta \quad \cdots ②$$

위의 ②식에서 양변을 y로 나누어 y에 대하여 정리하면, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$y\cos\alpha + x\sin\alpha = \cos\beta \quad \cdots ③, \qquad y = \frac{\cos\beta - x\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \cdots ④$$

④식을 ①식에 대입하면, 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$x\frac{\cos\beta - x\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha + x^2\sin\alpha = \frac{\cos\beta - x\sin\beta}{\cos\alpha} \cdot \sin\beta + \sin\alpha$$

$$x = \frac{\sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \quad \cdots\cdots ⑤$$

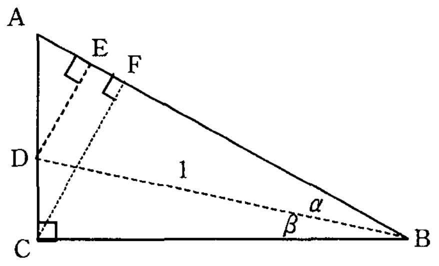
따라서, $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$ 을 얻을 수 있다.

삼각비의 성질에 의해서 우리는 다음 두 식을 얻을 수 있다.

$$(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = \cos\beta\sin\beta + \cos\alpha\sin\alpha \cdots\cdots ⑦$$

⑦식을 ⑤식에 대입하면 사인의 덧셈정리를 얻을 수 있다.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ \square$$



<그림 8>

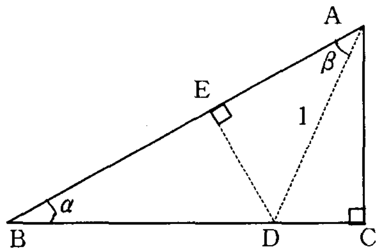
증명방법 8에서는 $\angle B = \alpha+\beta$이므로 $\angle B$와 같은 각을 찾아야 한다. 이 각을 찾기 위해, 몇몇 보조선을 그었다. <그림 8>에서 꼭지점 C에서 빗변에 내린 수선의 발을 F라고 하면, $\triangle ABC \backsim \triangle ACF \backsim \triangle BCF$이 된다. 따라서, 닮음인 삼각형에서 대응하는 각의 크기가 모두 같으므로 $\angle ACF = \alpha+\beta$를 만족한다.

이제 선분 AC 위에 임의의 한 점 D를 잡아서 빗변에 내린 수선의 발을 E라고 하면, $\overline{CF} // \overline{DE}$이므로 $\angle ADE = \alpha+\beta$ 인 각을 쉽게 얻을 수 있다. 이제, 이것을 이용해서 삼각법의 정의로부터 증명방법 8을 유도할 수 있다.

이제, 사인의 덧셈정리에서의 두 각이 각각 다른 꼭지점에 놓인 경우를 살펴보자.

증명방법 9(http://mathworld.wolfram.com)

직각삼각형 ABC에서 $\angle B = \alpha$라 하고, 꼭지점 A에서 $\angle BAD = \beta$가 되도록 선분 AD를 긋는다. 이때, $\overline{AD} = 1$이라 하고, 점 D에서 빗변에 내린 수선의 발을 E라고 한다. 먼저, 직각삼각형 ADE로부터 $\overline{ED} = \sin\beta$ … ①, $\overline{AE} = \cos\beta$ … ②을 얻을 수 있다.



<그림 9>

직각삼각형 ADC에서 $\angle ADC$는 $\triangle ADB$의 외각이므로 $\alpha+\beta$가 되고, $\overline{AC} = \sin(\alpha+\beta)$ …③를 얻는다. 직각삼각형 BDE에서 $\overline{BE} = x$라고 하면, ①식과 탄젠트의 정의에 의해서, 다음을 얻을 수 있다.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\beta}{x},\quad x\tan\alpha = \sin\beta,\quad x = \frac{\sin\beta}{\tan\alpha} = \frac{\sin\beta}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

이제, 직각삼각형 ABC에서 사인의 정의에 의해서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sin\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}+\overline{BE}} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}},\quad \sin\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

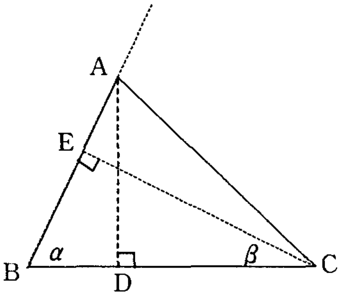
$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha+\beta),\quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \square$$

증명방법 9는 서로 다른 꼭지점에 α, β가 놓여있다. 이때, $\angle A$, $\angle B$를 α, β로 잡으면 두 각의 합이 항상 90°가 되므로 의미가 없다. 따라서, $\angle A$ 혹은 $\angle B$의 일부만을 사용하여 각을 설정해야 한다. <그림 9>와 같이, $\angle A$의 일부를 β로 잡으면 β의 각이 밑변과 만나는 점을 D라고 하자. 이제, $\triangle ABD$에서 $\alpha+\beta$는 삼각형의 한 외각의 크기와 같아진다는 것을 이용하여 증명을 유도하게 된다. 본 연구에서는 증명방법 9를 바탕으로 증명방법 9-1, 9-2를 고안하였다.

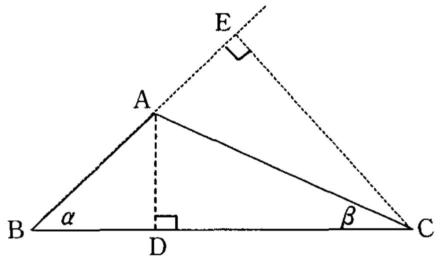
증명방법 9-1. 예각삼각형에서 두 꼭지점이 각이 되는 상황에서의 증명

예각삼각형 ABC에서 $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$, $\overline{AC} = 1$이라 하고, 꼭지점 A와 C에서 대변에 내

린 수선의 발을 각각 D, E 라고 하자. $\angle A$ 의 외각의 크기는 $\alpha+\beta$이므로 $\angle A=\pi-(\alpha+\beta)$가 된다. 따라서, $\sin A=\sin(\pi-(\alpha+\beta))=\sin(\alpha+\beta)$ 를 만족한다.



<그림 9-1>



<그림 9-2>

이제, 사인과 코사인의 정의에 의해서, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sin\alpha=\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{BD}+\overline{DC}}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\overline{BD}+\cos\beta}$$

이때, $\overline{BD}=\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}$ 를 만족하므로, 이 값을 위의 식에 대입하면 공식을 얻을 수 있다.

또한, 위의 식을 간단히 하면 정리가 증명된다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \square$$

증명방법 9-2. 둔각삼각형에서 두 꼭지점이 각이 되는 상황에서의 증명

둔각삼각형 ABC 에서 $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$, $\overline{AC}=1$이라 하고, 꼭지점 A 와 C 에서 대변에 내린 수선의 발을 각각 D, E 라고 하자. $\angle A$ 의 외각의 크기는 $\alpha+\beta$이므로 $\angle CAE=\alpha+\beta$가 된다. 사인과 코사인의 정의에 의해서, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sin\alpha=\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{BD}+\overline{DC}}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\overline{BD}+\cos\beta}$$

이때, $\overline{BD}=\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}$ 를 만족하므로, 이 값을 위의 식에 대입하면 정리가 증명된다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \square$$

증명방법 9는 직각삼각형에서 두 꼭지점에 각각 α, β를 잡았다. 그런데, $\angle A$, $\angle B$ 전체를 α, β로 잡으면 두 각의 합이 항상 90°가 되어 의미가 없으므로, $\angle A$ 일부만을 사용하여 각을 잡았다. 그런데, 증명방법 9-1과 9-2에서는 이러한 문제를 없애기 위해 직각삼각형이 아닌 경우에 대해 고찰해 보았다. 즉, 예각삼각형인 경우와 둔각삼각형인 경우로 구분하여 두 꼭지점의 전체 각을 α와

β로 잡아 증명을 유도하였다. 결국, 증명방법 9-1과 증명방법 9-2는 증명방법 9의 일반화로 볼 수 있고, 방법적인 측면에서도 동일한 방법을 취하였으므로 증명 방법 9에 대한 방법유추로 볼 수 있다.

4. 원에 내접하는 다각형에서 두 각을 생각하여 증명하는 방법

원에 내접하는 다각형의 다양한 성질들이 문제해결과 증명 과정에서 자주 사용된다. 삼각형이 원에 내접하는 경우와 사각형이 원에 내접하는 경우에 사인의 덧셈정리를 증명하자. 우선, 두 개의 삼각형이 원에 내접하는 경우에 사인의 덧셈정리를 살펴보자.

증명방법 10(수학사랑, 1996, p.19)

<그림10>과 같이 지름의 길이가 1인 원에 내접하고 한 대각선이 원의 중심을 지나는 □ABCD 에 대하여 사인법칙을 이용하면 아래의 식을 얻는다.

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(x+y)}=1 \quad \cdots ①$$

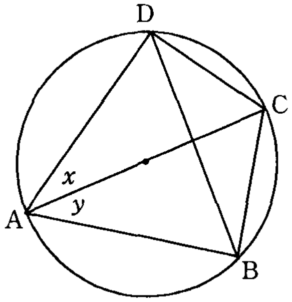
즉, $\overline{\mathrm{BD}}=\sin(x+y)$ 이다. 그리고, 원주각의 성질에 의해서 $\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{CBD}=x$ 이고, $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDC}=y$ 이다. 따라서, △BCD에서 코사인 법칙에 의해서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\overline{\mathrm{BD}}=\sin x\cos y+\sin y\cos x \quad \cdots ②$$

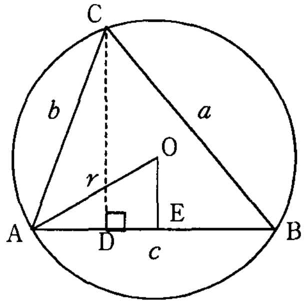
이제, ①식과 ②식에 의해서 사인의 덧셈정리를 얻을 수 있다.

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \qquad \square$$

증명방법 10과 증명방법 1을 비교해 보자. 증명방법 1의 <그림 1>에서 두 직각삼각형 ABC와 ACD 각각의 빗변의 길이를 같게 하고 이들을 겹쳐놓으면 <그림 10>의 원에 내접하는 □ABCD를 얻을 수 있다. 이때 두 개의 삼각형의 겹쳐진 빗변 $\overline{\mathrm{AC}}$는 원에 내접하는 사각형의 한 대각선이면서 외접원의 지름이 된다. 그리고 <그림 1>에서의 두 직각 ∠B와 ∠C은 <그림 10>의 사각형의 마주보는 두 대각 ∠B와 ∠D가 된다. 그러므로 증명방법 10은 증명방법 1의 방법유추라고 할 수 있다.



<그림 10>



<그림 11>

증명방법 11(http://library.thinkquest.org). 한 개의 삼각형을 원에 내접시켜 증명하는 경우

<그림 11>에서 $\triangle$ABC가 원에 내접하고 있다. 세 변의 길이를 각각 a, b, c라고 하면 $\overline{\mathrm{AD}} = b\cos \mathrm{A}$, $\overline{\mathrm{BD}} = a\cos \mathrm{B}$ 이므로, $c = a\cos \mathrm{B} + b\cos \mathrm{A}$ … ①을 얻을 수 있다. $\triangle$ABC의 외접원의 반지름 r을 ½이라고 두자. 그리고, $\angle \mathrm{C} = ½\angle \mathrm{AOB}$이므로, $\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{AOE}$이다. 따라서, $\sin \mathrm{C} = \sin(\angle \mathrm{AOE}) = \frac{½c}{r} = \frac{½c}{½} = c$가 성립한다. 같은 방법으로, $\sin \mathrm{A} = a$, $\sin \mathrm{B} = b$ … ②. 이제, ②식을 ①식에 대입하면, $c = \sin \mathrm{A} \cos \mathrm{B} + \sin \mathrm{B} \cos \mathrm{A}$ …③를 얻는다. 또한, 삼각형의 성질에 의해서 $\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = 180°$이므로, $\angle \mathrm{C} = \pi - (\mathrm{A} + \mathrm{B})$이고, $c = \sin \mathrm{C} = \sin\{\pi - (\mathrm{A}+\mathrm{B})\} = \sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ … ④이 성립한다. ③식과 ④식에 의해서, 사인의 합 공식을 얻을 수 있다.

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

$\angle \mathrm{A} = x$, $\angle \mathrm{B} = y$라고 두면, $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ 가 성립한다. □

증명방법 11은 증명방법 9의 일반화 또는 확장으로 볼 수 있다. 앞에서 언급하였지만 직각삼각형에서 직각이 아닌 두 각에 각각 α, β를 잡으면 두 각의 크기의 합이 항상 90°가 되므로 의미가 없다. 하지만, 직각삼각형이 아니라면 어떻게 될 것인지 생각해 볼 필요가 있는 것이다. 게다가, 삼각형의 세 내각의 합은 180°이고, $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$을 만족한다.

임의의 $\triangle$ABC에서 두 각을 각각 $\angle \mathrm{A} = \alpha$, $\angle \mathrm{B} = \beta$로 잡으면 나머지 한 각인 $\angle \mathrm{C} = \pi - (\mathrm{A}+\mathrm{B})$가 될 것이다. 그런데, α, β 가 결정이 되면 $\alpha+\beta$가 결정되어져야 하는데 직접적으로 $\alpha+\beta$를 결정할 수 없다. 그 대신에 $\sin(\alpha+\beta)$를 결정하므로써 이 문제를 해결하였다. 즉, $\sin \mathrm{C} = \sin(\alpha+\beta)$가 성립하게 되므로 필요한 모든 요소를 결정하게 된다.

결국, 증명방법 11에서는 지름의 길이가 1인 원에서 원주각의 크기가 A인 호에 대한 현의 길이는 $\sin \mathrm{A}$이므로 원주각에 대한 현의 길이를 이용하여 지름의 길이가 1인 원에 내접하는 삼각형을 이용하여 사인의 덧셈정리를 증명하였다고 할 수 있다.

증명방법 12(수학사랑, 1996, p.19)

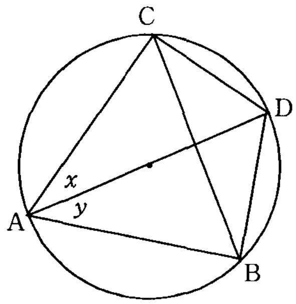
<그림 12>에서 지름의 길이가 1인 원에 △ABC가 내접하고 있다. 이때, 원의 지름 AD를 긋고, 지름에 의해 생기는 각을 $\angle CAD = x$, $\angle DAB = y$라 두면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\overline{AC} = \cos x, \quad \overline{CD} = \sin x, \quad \overline{AB} = \cos y, \quad \overline{BD} = \sin y \ \cdots \text{①}$$

그리고, 지름이 1인 원에서의 사인법칙에 의해서, 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(x+y)} = 2R, \ (R = ½). \quad \therefore \overline{BC} = \sin(x+y) \ \cdots \text{②}$$

이제, ①식과 ②식에서 얻은 결과로 Ptolemy의 정리를 적용하면, 공식을 얻을 수 있다. 따라서 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ □



<그림 12>

증명방법 12에서는 원에 내접하는 사각형을 생각하여, Ptolemy의 정리를 이용하여 사인의 덧셈정리를 증명하였다. 일반적으로 두 개의 삼각형을 접하도록 하면 한 개의 사각형을 얻을 수 있다. 이때, 사각형이 원에 내접하도록 만들면, 원에 내접하는 사각형이 가지는 성질에 대해 파악하여 그 성질을 이용한 증명을 유도할 수 있다.

5. 결 론

한 가지 문제에 대한 다양한 풀이 방법을 탐색하는 것은 수학적 대상의 성질을 발명, 일반화하는 것 뿐만 아니라, 학생들의 지적인 유창성 및 유연성 계발, 수학에 대한 심미적 가치의 함양을 위한 의미있는 교수학적 경험을 제공할 수 있을 것이다. 본 연구에서는 고등학교 '미분과 적분'에 제시된 사인의 덧셈정리에 대한 다양한 증명 방법을 제시하고, 이를 분석하여 수학교수학적으로 의미로운 시사점을 도출하였다.

각 α, β에서 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$와 $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$을 사인의 덧셈정리라 한다. 본 연구에서는 사인의 덧셈정리의 증명 방법에 사용된 도형들을 중심으로,

첫째 두 삼각형에서 α, β를 생각하여 이들을 접하거나 겹쳐 놓아 증명하는 방법, 둘째 α, β를 한 삼각형에서 생각하여 증명하는 방법, 셋째 원에 내접하는 다각형에서 α, β를 생각하여 증명하는 방법으로 분류하였다.

두 삼각형에서 두 각을 접하거나 겹쳐 놓아 증명하는 방법에서는 삼각법을 이용한 증명, 일차변환을 이용한 증명, 벡터를 이용한 증명으로 나누어 다양한 증명방법을 제시하였으며, 이들 증명방법을 분석하여 교수학적으로 의미있는 몇몇 시사점을 도출하였고, 몇몇 새로운 증명방법도 제시하였다.

두 각을 한 삼각형에서 생각하는 경우에서는 두 각을 한 삼각형의 같은 꼭지점에서 생각하는 경우와 두 개의 꼭지점에서 각각의 각을 생각하는 경우로 나누어, 이들 각 경우에 대한 증명을 제시하였다.

원에 내접하는 다각형에서 두 각을 생각하여 사인의 덧셈정리를 증명하는 경우에는 삼각형이 원에 내접하는 경우, 사각형이 원에 내접하는 경우에 사인의 덧셈정리를 증명하였다.

본 연구를 통해 얻어진 결과들은 사인의 덧셈정리에 대한 새로운 증명 방법의 탐색, 사인의 덧셈정리의 수학교수학적 활용의 다양한 가능성을 모색할 수 있는 기초자료를 제공할 것이며, 제시된 증명 방법들은 '미분과 적분'의 지도에서 심화학습 자료로도 활용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

권영인・서보억 (2004). 코사인 제 2법칙의 다양한 증명방법 분석, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **18(2)**, pp. 251-264.

수학사랑 세미나팀 (1996). 톨레미의 정리와 삼각함수의 덧셈정리(I), 수학사랑 **6**, pp. 18-19.

이강섭 외 6인 (2005a). 미분과 적분 교사용지도서, 서울 : (주)지학사

이강섭 외 6인 (2005b). 미분과 적분, 서울 : (주)지학사

최봉대 외 5인 (2002a). 미분과 적분 교사용지도서, 서울 : (주)중앙교육진흥연구소

최봉대 외 5인(2002b). 미분과 적분, 서울 : (주)중앙교육진흥연구소

한인기 (2003a). 헤론 공식에 대한 교수학적 분석 및 확장, 한국수학사학회지 **16(2)**, pp. 43-54.

한인기 (2003b). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

한인기 (2004a). 체바 정리의 교수학적 변환 및 확장, 한국수학사학회지 **17(2)**, pp. 61-72.

한인기 (2004b). 슈타이너・레무스 정리에 대한 다양한 증명 방법, 한국수학사학회지 **17(3)**, pp. 93-108.

한인기・Kombarov (2004). 수학 영재교육에서 기하학의 역할 및 지도, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **18(2)**, pp.265-276.

한인기・강인주 (2000). 삼각형의 무게중심에 관한 다양한 증명들과 수학교육적 의의, 한국수학교육

학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **10**, pp. 143-154.

한인기 · 신현용 (2002). 삼각형의 접기 활동과 논증의 연계 가능성에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **41(1)**, pp. 79-90.

한인기 · 이경언 · 홍춘희 · 최은주 (2002). 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **13**, pp. 245-264.

Gotman E.G. & Skopets Z.A. (2000). *Zadacha odna-resheniya raznye*, Moskva: Prosveshenie.

Loomis E.S. (1968). *The Pythagorean Proposition*, Washinton: NCTM.

웹사이트 자료들(http://mathworld.wolfram.com; http://library.thinkquest.org)