韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 19집 제3호. 2005. 9. 517-526

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19 No 3, Sep. 2005. 517-526

헤론의 공식과 유사한 사면체의 부피 공식에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)[1)]
최 원 석 (한국과학영재학교)
손 경 희 (한국과학영재학교)
양 해 훈 (한국과학영재학교)
권 혁 준 (한국과학영재학교)

본 연구에서는 사면체의 부피를 구하는 두 가지 공식을 다룰 것이며, 이들은 외형적으로 또는 계산 방법상으로 삼각형의 넓이를 구하는 헤론의 공식과 유사하다. 이들 중에서 하나는 사면체의 모서리와 평면각들을 이용하여 사면체의 부피를 표현하며, 다른 하나는 사면체의 모서리들만 이용하여 부피를 표현한 것으로 2002년에 미해결 탐구 문제로 제시된 바 있다. 본 연구에서는 헤론 공식과 이들 두 공식의 유사점에 대해 논의하며, 모서리들만을 이용하여 부피를 구하는 공식에 대한 새로운 기초적인 증명 방법을 제시할 것이다.

1. 서 론

수학과 교육과정(교육부, 1998)의 측정영역에서 도형에 관련된 내용을 분석해 보면, 중등학교 기하교육에서 공간도형의 부피가 중요한 부분임을 알 수 있다. 공간도형의 부피는 공간도형의 성질을 밝히고, 도형들 사이의 관계를 탐구하고 추론하는 중요한 도구가 된다.

수학사에서도 공간도형의 부피는 중요한 탐구 대상으로 여겨져 왔다. 기원전부터 3대 작도불능 문제의 하나인 배적문제는 많은 수학자들이 다양한 수학적 개념들, 방법들을 발명하도록 하였으며, 1900년에 독일의 수학자 Hilbert는 공간도형의 분할합동에 대한 흥미로운 문제를 제안하여, 수학자들을 새로운 발명의 길로 이끌었다. 또한, 공간도형의 부피는 공간도형의 다양한 성질을 밝혀내는 유용한 도구이기도 하다. 에르든예프・한인기(2005)는 사면체의 부피를 이용하여, 사면체의 내접구와 높이의 관계, 사면체의 내접구와 방접구의 관계를 비롯한 사면체의 많은 성질을 증명하였다. 특히, 공간에서 사면체는 평면에서 삼각형과 유사한 성질들을 많이 가지며, 공간도형의 성질 탐구에서 바탕이 되는 중요한 기본 도형이라 할 수 있다.

사면체의 부피에 관련된 연구들을 살펴보면, Hilbert(1900), Boltyanski(1956, 1985), 에르든예프・한인기(2005), Townes(1956), Bevz(1974), Gotman(2002), Cho(1995), Honsberger(1976), Travkin(2003) 등을 비롯한 많은 연구들이 있다. 이들 연구에서는 사면체의 부피란 무엇인가 또는 사면체의 부피는

---

1) 수학교육과 교수/ 과학영재교육원 교수

어떻게 구하고, 부피를 문제해결에 어떻게 활용하는가에 대한 물음을 탐구하며, 이를 바탕으로 공간도형에 대한 다양한 연구가 가능하다는 측면에서 수학적으로 의미롭다고 할 수 있다.

본 연구에서는 사면체의 부피를 구하는 두 가지 공식을 다룰 것이며, 이들은 외형적으로 또는 계산 방법상으로 삼각형의 넓이를 구하는 헤론의 공식과 유사하다(평면에서의 헤론 공식을 공간으로 유추한 것이라고도 할 수 있는). 이들 중에서 하나는 사면체의 모서리와 평면각들을 이용하여 사면체의 부피를 표현하며, 다른 하나는 사면체의 모서리들만 이용하여 부피를 표현한 것으로 2002년에 미해결 탐구 문제로 제시된 바 있다.

본 연구에서는 헤론 공식과 이들 두 공식의 유사점에 대해 논의하며, 모서리들만을 이용하여 부피를 구하는 공식에 대한 새로운 기초적인 증명 방법을 제시할 것이다. 이를 통해, 사면체의 부피에 대한 탐구영역의 폭을 넓히며, 특히 중등학교 수학 영재교육에서 사면체에 대해 체계적으로 다룰 수 있는 기초를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 헤론의 공식과 유사한 사면체의 부피 공식

사면체의 부피를 구하는 다양한 공식들이 알려져 있다. 예를 들어, 사면체 DABC에서 면 ABC의 넓이를 S_{ABC}, 꼭지점 D에서 면 ABC에 그은 높이를 DH라 하면, 사면체 DABC의 부피 V_{DABC}는 $\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DH$이다. 또 다른 공식으로는, 사면체 DABC의 모서리 DA의 길이를 a, 면 DAC와 DAB의 이면각을 α라 하면, 사면체 DABC의 부피 V_{DABC}는 $\frac{2}{3a} S_{DAB} \cdot S_{DAC} \cdot \sin\alpha$이다. 이들 공식에 대한 자세한 증명은 에르든예프·한인기(2005)의 연구에 제시되어 있다.

이제, 사면체의 부피를 구하는 공식들 중에서 헤론의 공식과 유사한 것들을 살펴보자. 헤론의 공식은 변들의 길이를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 공식으로 알려져 있다. 헤론의 공식은 '삼각형 ABC에서 변 AB, BC, AC의 길이를 각각 a, b, c, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이 S_{ABC}는 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$이다'고 쓸 수 있다.

헤론의 공식과 유사한 사면체의 부피 공식을 찾기 위해, 헤론의 공식을 분석하자. 첫째, 헤론의 공식에서 삼각형의 넓이는 제곱근호 안에 놓여있는 네 인수의 곱으로 표현된다. 이때, 이들 네 인수는 s, (s-a), (s-b), (s-c)로, 한 인수는 식 s이고, 나머지 인수들은 식 s에서 각각 어떤 식을 뺀 것이다. 그리고, 제곱근호 앞에는 1이 적혀있다.

둘째, 헤론의 공식에서 제곱근호 안의 식 s, s-a, s-b, s-c은 모두 삼각형의 변들부터 얻어진다. 즉, 헤론의 공식에서 삼각형의 넓이는 삼각형의 변들에 가감승제를 하고, 얻어진 결과에 제곱근을 취한 식으로 표현된다.

기술한 분석에서 첫 번째의 것은 헤론의 공식의 외형적인 특징을 말하고 있으며, 두 번째의 것은 실제적인 계산 방법을 말하고 있다. 본 연구에서는 외형적인 특징에서 헤론의 공식과 유사한 사면체

의 부피 공식을 정리 1에서 살펴보고, 계산 방법에서 유사한 사면체의 부피 공식을 정리 2에서 살펴보도록 하자.

정리 1. 사면체 DABC에서 모서리 DA, DB, DC의 길이를 각각 u, v, w, 이들 모서리 사이의 평면각, 즉 각 ADB, BDC, ADC를 α, β, γ라 하고, $p=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$라 하자. 그러면, 사면체 DABC의 부피는

$$V_{DABC}=\frac{uvw}{3}\sqrt{\sin p\cdot\sin(p-\alpha)\cdot\sin(p-\beta)\cdot\sin(p-\gamma)}$$

이다.

정리 1에서 사면체의 부피 공식은 $\frac{uvw}{3}$과 제곱근호의 곱으로 표현된다. 특히, 제곱근호 안은 헤론의 공식과 마찬가지로, 네 인수의 곱으로 구성된다. 이때, 첫 번째 인수는 p의 사인값이고, 다른 인수들은 각각 $p-\alpha$, $p-\beta$, $p-\gamma$의 사인값이다. 실제로, α, β, γ는 꼭지점 D를 공유하는 평면각들이다.

정리 1과 같은 형태의 공식은 잘 알려져 있지 않으며, 정리 1과 유사한 형태의 공식이 우크라이나 언어로 된 Bevz(1974)의 책에 제시되어 있다.

이제, 모서리들의 길이만을 이용하여 사면체의 부피를 구하는 방법을 살펴보자. Gotman(2002)은 사면체 DABC에서 DA=a, DB=b, DC=c, BC=a_1, CA=b_1, AB=c_1이라 하고, 사면체 DABC의 부피 V에 대해, $144V^2=4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-a_1^2)-b^2(a^2+c^2-b_1^2)-c^2(a^2+b^2-c_1^2)+(b^2+c^2-a_1^2)(a^2+c^2-b_1^2)(a^2+b^2-c_1^2)$임을 보였으며, Townes(1956)는 판별식을 이용하여 사면체의 부피를 구하였다. 그런데, 이들이 제시한 공식은 헤론의 공식과 외형적으로 유사하지는 않다. 헤론의 공식과 유사한 다음 정리를 살펴보자.

정리 2. 사면체 DABC에서 모서리 DA, DB, DC, AB, BC, AC의 길이를 각각 u, v, w, W, U, V라 하자. 이때, $X=(w-U+v)(U+v+w)$, $Y=(u-V+w)(V+w+u)$,

$Z=(v-W+u)(W+u+v)$, $x=(U-v+w)(v-w+U)$,

$y=(V-w+u)(w-u+V)$, $z=(W-u+v)(u-v+W)$이다.

이때, $a=\sqrt{xYZ}$; $b=\sqrt{yZX}$; $c=\sqrt{zXY}$; $d=\sqrt{xyz}$라 하면, 사면체 DABC의 부피는

$$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{192uvw}$$

이다.

정리 2에서는 사면체의 부피가 모서리들의 길이, 이들에 대한 가감승제, 제곱근을 이용하여 표현되어있다. 정리 2는 러시아의 수학교육에 관련된 한 학술잡지인 'Matematicheskoe Prosveshenie'의 제 6집(2002년도 발행)에 헤론의 공식에 대한 3차원 유추로 소개되었으며, 이것의 증명은 아직 알려지지 않은 상태였다. 그런데, Travkin(2003)은 정리 2에 대한 증명을 'Matematicheskoe Prosveshenie' 제 7집에 제시하였다. 본 연구에서는 정리 2에 대한 새로운 증명을 찾았으며, Travkin의 증명과 함께 제시할 것이다.

3. 헤론의 공식과 유사한 사면체의 부피 공식 증명

정리 1과 정리 2를 증명하기 위해, 사면체의 부피를 구하는 몇몇 공식들을 살펴보자. 우선, 사면체 DABC에서 평면각, 이면각, 모서리의 길이를 이용해 부피를 구하는 간단한 공식을 보조정리로 살펴보자.

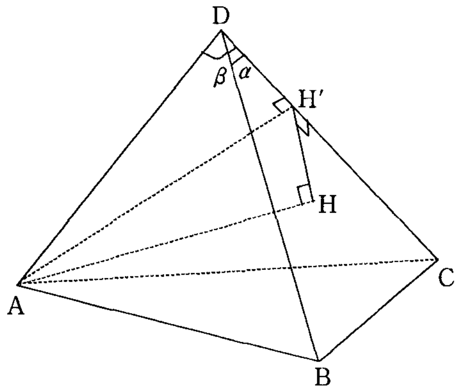
보조정리. 사면체 DABC에서 평면각 BDC를 α, 평면각 ADC를 β, 면 ADC와 DCB의 이면각의 크기를 δ라 하면, 사면체의 부피는

$$V_{DABC}=\frac{1}{6}DA\cdot DB\cdot DC\cdot \sin\alpha\cdot \sin\beta\cdot \sin\delta$$

이다.

보조정리의 증명. 사면체의 부피는 밑면의 넓이와 높이의 곱의 ⅓이므로, S_{BCD}와 AH를 구하자. <그림 1>에서 $S_{BCD}=\frac{1}{2}DB\cdot DC\cdot \sin\alpha$이다.

이제, AH를 구하기 위해, 우선 면 ADC에서 꼭지점 A로부터 변 DC에 수선 AH'을 내리자. 그러면, AH'은 $DA\cdot \sin\beta$가 된다. 한편, 꼭지점 A로부터 면 DBC에 수선 AH를 내리면, 삼수선의 정리에 의해, 점 H'과 H를 연결한 선분은 DC와 직교하고, 각 AH'H는 면 ADC와 DCB의 이면각 δ가 된다. 그러므로, $AH=AH'\cdot \sin\delta=DA\cdot \sin\beta\cdot \sin\delta$가 된다. 결국, S_{BCD}와 AH를 사면체의 부피 공식 $V_{DABC}=\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot AH$에 대입하면, 구하는 사면체의 부피가 얻어진다. □



<그림 1>

보조정리의 사면체 부피 공식에는 사면체의 모서리, 평면각, 이면각 등이 포함되며, 사면체의 부피가 밑면과 밑면에 그은 높이의 곱의 ⅓임을 이용하여 쉽게 증명되었다. 보조정리의 증명 방법은 평이하지만, 보조정리로부터 사면체의 부피를 구하는 흥미로운 공식들(정리 1과 정리 3)을 유도할 수 있다.

정리 3. 사면체 DABC에서 모서리 DA, DB, DC의 길이를 u, v, w, 평면각 ADB, ADC, BDC의 크기를 γ, β, α라 하면, 사면체 DABC의 부피는

$$V_{DABC}=\frac{uvw}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$

이다.

정리 3의 증명. 보조정리를 이용하여 정리 3을 증명하려면, 보조정리에서 포함된 면 ADC와 DCB의 이면각 δ를 평면각들로 나타내야 한다. 이를 위해, 삼면각 DABC에 대한 코사인 정리를 사용하자. <그림 1>에서 평면각 ADB를 γ라 하면,

$$\cos\delta=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

이다. 면 ADC와 DCB의 이면각 δ는 평각보다 작으므로, $\sin\delta=\sqrt{1-\cos^2\delta}$이다. 즉,

$$\sin\delta=\sqrt{1-\left(\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\right)^2}=\sqrt{\frac{(\sin\alpha\cdot\sin\beta)^2-(\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2}{(\sin\alpha\cdot\sin\beta)^2}}$$

이다. 이제, $\sin\delta$에 대해 얻어진 식을 보조정리에 대입하자. 그러면,

$$V_{DABC}=\frac{1}{6}DA\cdot DB\cdot DC\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\delta$$

$$= \frac{\mathrm{uvw}}{6}\sqrt{(\sin\alpha\cdot\sin\beta)^2-(\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{uvw}}{6}\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta-\cos^2\gamma-\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}.$$

이제, 얻어진 식의 제곱근호에 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta$를 대입하자. 그러면, 구하는 사면체의 부피 공식이 얻어진다. □

정리 3에서는 한 꼭지점 D를 공유하는 모서리들 DA, DB, DC와 이들 사이의 평면각 ADB, ADC, BDC을 이용하여 사면체 DABC의 부피를 표현하였다. 헤론의 공식과 유사한 공식으로 증명하려고 하는 정리 1도 사면체의 모서리들과 평면각들만 포함되므로, 정리 3과 유사한 방법으로 해결할 수 있을 것임을 추측할 수 있다.

(1) 정리 1의 증명

정리 1의 증명. 정리 3의 증명에서

$$V_{DABC}=\frac{\mathrm{uvw}}{6}\sqrt{(\sin\alpha\cdot\sin\beta)^2-(\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2}$$

임을 알았다. 이제, 제곱근호 안의 식을 정리 3의 증명과는 다른 방법으로 정리하자. 즉,

$$\begin{aligned}&(\sin\alpha\cdot\sin\beta)^2-(\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2\\&=(\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta)(\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta)\\&=[\cos\gamma-(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)][(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)-\cos\gamma]\\&=[\cos\gamma-\cos(\alpha-\beta)][\cos(\alpha+\beta)-\cos\gamma].\end{aligned}$$

이제, 코사인 합·차의 공식을 이용하자. 그러면,

$$\begin{aligned}&(\sin\alpha\cdot\sin\beta)^2-(\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2\\&=2^2\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.\end{aligned}$$

이때, $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\mathrm{p}$이므로, $\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}=\mathrm{p}-\beta$, $\frac{\gamma-\alpha+\beta}{2}=\mathrm{p}-\alpha$, $\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=\mathrm{p}-\gamma$이다. 결국, 얻어진 식을 정리 3에 대입하면, 구하는 사면체의 부피 공식을 얻게 된다. □

헤론의 공식에서는 변의 길이를 각각 a, b, c라 놓고, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$을 이용하여 삼각형 ABC의 넓이를 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$와 같이 표현했다. 그런데, 정리 1에서 제곱근호 안에 놓인 식은 꼭지점 D에서의 평면각 α, β, γ, $\mathrm{p}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$에 대해, p, $(\mathrm{p}-\alpha)$, $(\mathrm{p}-\beta)$, $(\mathrm{p}-\gamma)$의 사인값의 곱으로 표현되어 있다.

(2) 정리 2의 증명

정리 2에 대한 첫 번째 증명은 Travkin(2003, pp.185-186)에 의해 제시되었다. Travkin의 증명방법을 분석하면,

첫째, X, Y, Z, x, y, z를 코사인 정리를 이용하여 나타내고;

둘째, 얻어진 식들을 $a=\sqrt{xYZ}$; $b=\sqrt{yZX}$; $c=\sqrt{zXY}$; $d=\sqrt{xyz}$에 대입하며;

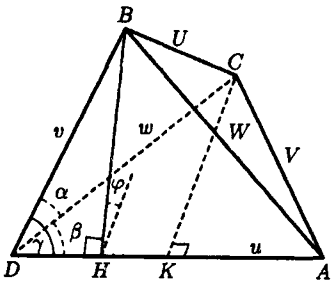
셋째, $-a+b+c+d$, $a-b+c+d$, $a+b-c+d$, $a+b+c-d$를 계산하여;

넷째, 얻어진 식들을 정리 2의 구하는 공식에 대입하여 정리 1과 같은 형태를 유도하였다.

이와 같이, Travkin은 정리 2의 공식을 정리 1과 같은 형태로 유도한 다음, 정리 1과 보조정리의 관계를 언급하였다. 이미, 정리 1에 대한 상세한 증명을 제시하였으므로, 첫째, 둘째, 셋째, 넷째 과정에 상응하여 Travkin의 증명만을 상세히 살펴보자.

증명방법 1. <그림 2>와 같이 모서리와 평면각들을 표시하자. 코사인 정리를 이용하면,

$$X=(w-U+v)(U+v+w)=(v+w)^2-U^2$$
$$=v^2+2vw+w^2-v^2-w^2+2vw\cos\alpha=2vw(1+\cos\alpha)=4vw\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$



<그림 2>

같은 방법으로, $Y=4wu\cos^2\frac{\beta}{2}$, $Z=4uv\cos^2\frac{\gamma}{2}$를 얻을 수 있다. 이제, x, y, z에 대해서도 유사한 계산을 하면, $x=4vw\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $y=4wu\sin^2\frac{\beta}{2}$, $z=4uv\sin^2\frac{\gamma}{2}$를 얻을 수 있다.

x, y, z, X, Y, Z에 대해 얻어진 식들을 $a=\sqrt{xYZ}$; $b=\sqrt{yZX}$; $c=\sqrt{zXY}$; $d=\sqrt{xyz}$에 대입하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$a=8uvw\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\quad b=8uvw\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$
$$c=8uvw\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},\quad d=8uvw\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

이제, 식 $-a+b+c+d$, $a-b+c+d$, $a+b-c+d$, $a+b+c-d$를 계산하면,

$$-a+b+c+d=8uvw\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2},\quad a-b+c+d=8uvw\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2},$$

$$a+b-c+d=8uvw\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2},\quad a+b+c-d=8uvw\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

이제, 이들을 $V_{ABCD}=\frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{192uvw}$에 대입하자. 그러면,

$$V_{ABCD}=\frac{64u^2v^2w^2\sqrt{\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}}{192uvw}$$

$$=\frac{uvw}{3}\sqrt{\left(\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)}.\ \square$$

Travkin의 증명에서는 코사인 정리, 코사인 반각공식, 사인의 반각공식, 사인의 합과 차의 공식, 정리 1을 이용하였다. 특히, Travkin의 증명에서 $-a+b+c+d=8uvw\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}$ 또는 $a-b+c+d$, $a+b-c+d$, $a+b+c-d$를 계산하는 과정에서 비정형적인 식의 대수적 변형이 포함된다. 이제, 정리 2에 대한 새로운 증명 방법을 살펴보자.

증명방법 2. 사면체 DABC에서 평면각 ADB, BDC, CDA를 각각 α, β, γ라 하자. 그러면, 정리 3에 의해, $V_{DABC}=\frac{uvw}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$이다.

이제, 사면체 DABC의 각 면에 대해, 코사인 정리를 사용하자. 그러면,

$$\cos\alpha=\frac{u^2-v^2-W^2}{2uv},\quad \cos\beta=\frac{v^2+w^2-U^2}{2vw},\quad \cos\gamma=\frac{w^2+u^2-V^2}{2uw}.$$

이제, $1+\cos\alpha$, $1-\cos\alpha$, $1+\cos\beta$, $1-\cos\beta$, $1+\cos\gamma$, $1-\cos\gamma$의 값을 계산하면, $1+\cos\alpha=\frac{Z}{2uv}$, $1-\cos\alpha=\frac{z}{2uv}$, $1+\cos\beta=\frac{X}{2vw}$, $1-\cos\beta=\frac{x}{2vw}$, $1+\cos\gamma=\frac{Y}{2uw}$, $1-\cos\gamma=\frac{y}{2uw}$이 된다. 이로부터, $\cos\alpha=\frac{Z-z}{4uv}$, $\cos\beta=\frac{X-x}{4vw}$, $\cos\gamma=\frac{Y-y}{4uw}$가 된다. 이들 식을 $V_{DABC}=\frac{uvw}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$에 대입하면,

$$V_{DABC}=\frac{uvw}{6}\sqrt{1-\frac{(Z-z)^2}{2^4u^2v^2}-\frac{(X-x)^2}{2^4v^2w^2}-\frac{(Y-y)^2}{2^4u^2w^2}+\frac{(X-x)(Y-y)(Z-z)}{2^5u^2v^2w^2}}.$$

이제, 제곱근호 안에 있는 식들을 통분하여 정리하자. 그러면,

$$
\begin{aligned}
V_{DABC} &= \frac{1}{192uvw}[2^{10}u^4v^4w^4 - 2^6(Z-z)^2u^2v^2w^4 - 2^6(X-x)^2u^4v^2w^2 \\
&\qquad - 2^6(Y-y)^2u^2v^4w^2 + 2^5(X-x)(Y-y)(Z-z)u^2v^2w^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{192uvw}[2^{-2}(X+x)^2(Y+y)^2(Z+z)^2 - 2^{-2}(X-x)^2(Y+y)^2(Z+z)^2 \\
&\qquad - 2^{-2}(X+x)^2(Y-y)^2(Z+z)^2 - 2^{-2}(X+x)^2(Y+y)^2(Z-z)^2 \\
&\qquad + 2^{-1}(X+x)(X-x)(Y+y)(Y-y)(Z+z)(Z-z)]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

이제, 얻어진 식들을 전개하여 정리하면,

$$
\begin{aligned}
V_{DABC} &= \frac{1}{192uvw}[-x^2Y^2Z^2 - y^2Z^2X^2 - z^2X^2Y^2 - x^2y^2z^2 + 8xyzXYZ \\
&\qquad + 2xyz^2XY + 2xy^2zXZ + 2x^2yzYZ + 2xyZ^2XY + 2yzX^2YZ + 2zxY^2ZX]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{192uvw}\sqrt{-a^4-b^4-c^4-d^4+8abcd+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2} \\
&= \frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{192uvw}. \ \square
\end{aligned}
$$

살펴본 새로운 증명방법(증명방법 2)에서는 정리 3, 코사인 정리을 이용하였다. 증명방법 2에서 사용된 정리의 개수는 Travkin의 증명방법에 비해 훨씬 적으며, 간결한 접근을 취하고 있음을 알 수 있다. 그러나, 증명방법 2에서는 식의 복잡한 대수적 변형과정이 포함되어 있다.

4. 결 론

수학사에서 공간도형의 부피는 중요한 탐구 대상으로 여겨져 왔다. 기원전부터 3대 작도불능 문제의 하나인 배적문제는 많은 수학자들이 다양한 수학적 개념들, 방법들을 발명하도록 하였으며, 1900년에 독일의 수학자 Hilbert는 공간도형의 분할합동에 대한 흥미로운 문제를 제안하여, 수학자들을 새로운 발명의 길로 이끌었다. 특히, 공간에서 사면체는 평면에서 삼각형과 유사한 성질들을 많이 가지며, 공간도형의 성질 탐구에서 바탕이 되는 중요한 기본 도형이라 할 수 있다.

본 연구에서는 사면체의 부피를 구하는 공식으로 정리 1, 정리 2를 중심적으로 다루었으며, 이들은 외형적으로 또는 계산 방법상으로 삼각형의 넓이를 구하는 헤론의 공식과 유사하다. 정리 1에서는 사면체의 모서리와 평면각들을 이용하여 사면체의 부피를 표현하며, 정리 2는 사면체의 모서리들만 이용하여 부피를 표현한 것으로 2002년에 미해결 탐구 문제로 제시된 바 있다. 본 연구에서는 헤론 공식과 이들 공식의 유사점에 대해 논의하였으며, 정리 2에 대한 새로운 기초적인 증명 방법을 제시하였다.

본 연구에서는 정리 1과 정리 2를 증명하기 위해, 보조정리로 사면체의 평면각, 이면각, 모서리의 길이를 이용해 부피를 구하였다. 이때, 보조정리는 사면체의 부피가 밑면과 밑면에 그은 높이의 곱의 ⅓임을 이용하여 쉽게 증명되었다.

보조정리에 포함된 이면각을 삼면각의 코사인 정리를 이용하여 평면각들로 표현하여, 정리 1과 정리 3을 얻을 수 있다. 정리 1에서는 사면체의 부피 공식이 $\frac{uvw}{3}$과 제곱근호의 곱으로 표현되었다. 이때, 제곱근호 안은 헤론의 공식과 유사한 형태인 네 인수의 곱으로 되어있다.

한편, 정리 2에서는 사면체의 부피가 모서리들의 길이, 이들에 대한 가감승제, 제곱근을 이용하여 표현되어있다. 정리 2는 2002년에 발행된 학술잡지 'Matematicheskoe Prosveshenie'에 헤론의 공식에 대한 3차원 유추로 미해결 문제로서 제시되었다. 2003년에 Travkin은 코사인 정리, 코사인 반각공식, 사인의 반각공식, 사인의 합과 차의 공식, 정리 1을 이용하여 이것을 증명하였다. 본 연구에서는 정리 3, 코사인 정리만을 이용한 간결한 증명방법을 제시하였다.

본 연구의 결과는 사면체의 부피에 대한 탐구영역의 폭을 넓히며, 특히 중등학교 수학 영재교육에서 사면체에 대해 체계적으로 다룰 수 있는 기초를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

에르든예프 · 한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

Bevz (1974). *Geometriya tetraedra*, Ukraina: Radyanska Shkola.

Boltyanski V. G. (1956). *Ravnovelikie i ravnosostavlennye figury*, Moskva: GITTL.

Boltyanski V. G. (1985). *Elementarnaya geometriya*, Moskva: Prosveshenie.

Cho E. C. (1995). The volume of a tetrahedron, *Appl. Math. Lett.* **8(2)**, pp.71-73.

Gotman E. G. (2002). Analog formuly Herona v stereometrii, *Matematika v shkole* **3**, pp.63-64.

Hilbert D. (1900). Mathematical problems: Lecture Delivered Before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900. In R. Calinger (Ed.) 1995, *Classics of Mathematics*. NJ: Prentice-Hall, Inc. pp.698-718.

Honsberger R. (1976). *Mathematical Gems II*, Washington: MAA.

Townes S. B. (1956). The volume of a tetrahedron as a determinant, *The american mathematical monthly* **63(8)**, pp.574-575.

Travkin (2003). Ob obeme tetraedra, *Matematecheskoe prosveshenie* **7**, pp.185-186.