■ 論 文 ■

Nash의 협상게임과 Wardrop의 사용자 균형

Alternating Offers Bargaining Game and Wardrop's User Equilibrium

임 용 택

(여수대학교 교통물류시스템공학부 조교수)

목 차

Key Words : 협상게임(bargaining game), Wardrop's user equilibrium, SPE(subgame perfect equilibrium), 대안제시(alternating offers)

요 약

본 연구는 Nash의 협력게임인 협상게임(bargaining game)과 Wardrop의 사용자 균형해와의 관계를 규명하는데 목적이 있다. Wardrop의 균형은 다수의 운전자들이 교통상황을 정확히 알고 있고(perfect information), 동시에 합리적으로 경로를 선택(rationality)한다는 경직된 가정이 존재하는데, 이는 실제로 존재하는 운전자 상호간의 교류나 타협을 배제하고 있다. 이런 측면에서 운전자간의 교류와 조절과정을 Nash게임의 협상과정(bargaining process)으로 표현할 경우, Wardrop의 경직된 기본가정들을 어느정도 완화할 수 있을 것으로 보인다. 이를 위하여 본 연구에서는 Nash의 협상게임에 대한 교통망측면의 검토와 Nash의 협상해(bargaining solution)가 Wardrop의 사용자 균형(user equilibrium)과 동일함을 정리(theorem)를 통하여 증명하고 몇가지 예제로 이를 확인한다. 협상게임은 대표적인 2인 협조게임(two-person cooperative game)으로 본 연구에서도 주로 2인게임에 대해서 기술하며, 향후 n-인게임(n-person game)모형에 대해서는 간략히 언급토록 한다.

This paper presents a relationship between Nash bargaining game and Wardrop user equilibrium, which has been widely used in transportation modeling for route choice problem. Wardrop user equilibrium assumes that drivers in road network have perfect information on the traffic conditions and they choose their optimal paths without cooperation each other. In this regards, if the bargaining game process is introduced in route choice modeling, we may avoid the strong assumptions to some extent.

For such purpose, this paper derives a theorem that Nash bargaining solution is equivalent to Wardrop user equilibrium as the barging process continues and prove it with some numerical examples. The model is formulated based on two-person bargaining game, and n-person game is remained for next work.

Ⅰ. 서론

교통망문제(transportation network problem)에 대한 게임이론(game theory)적 접근이 최근 활발해지고 있다. 이는 통행자들이 자신의 통행시간을 최소화시키기 위하여 경로를 선택하거나 교통운영자가 승용차 운전자에게 혼잡통행료를 부과하는 등 혼잡완화를 위한 여러 교통정책들을 게임이론으로 모형화할 수 있기 때문이다. 즉, 다수의 통행자는 게임의 참가자(player)가 되며, 통행비용은 게임의 이익(payoffs)을, 그리고 경로상에 배정된 통행량은 게임의 전략(strategy)으로 표현될 수 있으며, 이 경우 기존 모형으로 설명하지 못한 많은 부분들을 게임이론을 이용하여 설명할 수 있게 된다. 게임이론(game theory)은 게임에 참여하는 참가자들이 자신의 이익을 최대화시키기 위하여 어떤 최적 전략을 선택할 것인가를 연구하는 분야로 산업공학, 경영학, 경제학 등 여러 학문분야에 널리 활용되고 있다.

이런 게임이론은 교통분야에도 도입되어 응용되고 있으며, 교통망 문제에 대한 게임이론적인 해석은 1960년대 이후 지속적으로 이루어져 왔다. 통행자들의 경로선택원리로 사용되는 Wardrop(1952)의 사용자 균형원리는 Nash(1950)의 비협력게임(non-cooperative game)의 대표적인 예인데, 이에 대해 Dafermos et al.(1968)이 처음 이들간의 관계를 설명한 이후, Rosenthal(1973)이 연속적인 통행인 경우 Wardrop의 균형과 Nash 균형이 동일함을 보여 주었다. Fisk(1984)는 교통망문제에서 Nash의 비협력게임과 Stackelberg의 협력게임을 서로 비교하였으며, Harker(1991)는 Nash 게임과 준 변동부등식(quasi-variational inequality)이 동일함을 보여주었다. Bell(2002)은 게임이론을 이용하여 위험회피 통행배정(risk-averse traffic assignment)모형을 제안했으며, 최근 Altman et al.(2005)는 게임이론과 교통망 모형 그리고 telecommunication에 대한 폭 넓은 고찰과 향후 연구과제들을 제시하였다. 한편, 이런 게임이론을 교통망문제에 적용한 연구는 다수 있었는데, 주로 교통망설계문제(transportation network design problem)와 기종점 통행량추정문제(OD estimation problem) 등에 적용되었으며, 최근 Zhou et al.(2005)는 대중교통시장의 요금결정문제에 대한 일반화 Nash 균형모형을 제시하였다. 반면, 교통망문제에 게임이론을 적용한 국내 연구는 많지 않은데, 최기주외(2004)가 가변정보판(VMS)의 운영전략에 대하여 Nash게임 형태로 문제를 구성하여 VMS운영자와 운전자간의 타협점이 운영효율을 높일 수 있음을 보여 주었으며, 임용택외(2004)는 바이레벨문제(bi-level prblem)에서 Nash게임과 Stackelberg 게임을 서로 비교하여 Stackelberg게임의 해가 좀 더 나은 결과를 도출함을 보여주었다.

본 연구는 Nash의 협력적 게임인 협상게임(Bargaining game)과 Wardrop의 사용자 균형해와의 관계를 규명하는데 목적이 있다. Wardrop의 균형은 다수의 운전자들이 교통상황을 정확히 알고 있고(perfect information), 동시에 합리적으로 경로를 선택(rationality)한다는 경직된 가정이 존재하는데, 이는 실제로 존재하는 운전자 상호간의 교류나 타협을 배제하고 있다. 특히, 이는 가까운 장래에 통행자간에 실시간 커뮤니케이션이 가능해질 것으로 예상됨에 따라 이를 고려할 수 있는 새로운 접근법이 필요한데, 이런 측면에서 운전자간의 교류와 조절과정을 Nash게임의 협상과정(bargaining process)으로 표현할 수 있을 것으로 기대되며, 이는 경직된 Wardrop의 기본가정들을 완화할 수 있을 것으로 보인다. 이를 위하여 본 연구에서는 Nash의 협상게임에 대한 교통망측면의 검토와 Nash의 협상해(bargaining solution)가 Wardrop의 사용자 균형(user equilibrium)과 동일함을 증명하고 몇가지 예를 통하여 이를 확인한다. 협상게임은 대표적인 2인 협조게임(two-person cooperative game)으로 본 연구에서도 주로 2인게임에 대해서 기술하며, 향후 n-인게임(n-person game)모형에 대해서는 간략히 언급토록 한다.

본 연구는 다음과 같이 구성되어 있다. 먼저, 제2절에서는 Wardrop의 사용자균형과 Nash균형과의 관계를 검토해 보고, 협상게임에 대한 기본적인 내용들을 살펴본다. 제3절에서는 본 연구에서 논의하는 연속적인 대안제시 협상게임(alternating offers bargaining game)에 의한 해가 Wardrop의 균형해와 동일함을 보이며 예제를 통하여 이를 확인한다. 마지막으로 결론에서 본 연구의 결과를 정리한 후, 향후 연구과제에 대해서 기술한다.

Ⅱ. Wardrop균형과 협상게임

1. Wardrop 균형과 Nash 균형

현재 교통망 모형에서 경로선택원리로 널리 사용되고 있는 사용자균형(User equilibrium)이라는 개념은

Wardrop(1952)에 의해 처음 제시되었다. Wardrop (1952)의 균형은 2가지 형태로 제1원리는 교통망을 이용하는 사용자들간의 균형(User equilibrium)에 관한 것이며 2번째 원리는 교통망을 최적화시키는 체계최적(system optimum) 원리이다. 이중 제1원리가 통행자의 경로선택 행위를 표현하는 원리로 다음과 같이 정의된다.

〔Wardrop equilibrium〕

The journey time on all the routes actually used are equal, and less than those which would be experienced by a single vehicle on any unused route.

즉, Wardrop의 사용자 균형은 사용된 모든 경로의 통행비용은 동일하며, 사용되지 않는 경로보다 작은 상태를 의미한다.

Wardrop의 균형과 유사한 개념이 Nash(1950)에 의해 제시되었으며 Nash균형을 교통망측면에서 정의하면 다음과 같다.

〔Nash equilibrium〕

A flow pattern is in Nash equilibrium if no individual decision maker on the network can change to a less costly strategy, or, route.

Nash균형은 어떤 한 개인이 자신의 경로를 바꿈으로서 더 이상의 비용감소를 기대할 수 없는 상태로 정의될 수 있으며, 1명 이상의 의사결정권자가 동시에 경로를 변경하는 경우에 대해서는 설명되지 않는다. 그러나 사용자의 수가 많아지면 Nash균형은 Wardrop의 균형과 같아지게 된다.

이와 관련하여 Altman et al.(2004)은 Wardrop의 균형과 Nash균형과의 관계를 설명하였는데, 먼저 Wardrop의 균형을 사용자계층(user class, 또는 player) i 에 대하여 Smith(1979)가 제시한 변동부등식(variational inequality)으로 표현하면 다음과 같다.

$$c_i(x^*)^T(x_i^* - x_i) \le 0 \tag{1}$$

여기서, $x = \sum_{i=1}^{I} x_i$ 인 교통량 벡타이며, x_i는 사용자 계층 i의 교통량이다. $i = 1, 2, \ldots, I$. 또한, x^*는 균형 교통량 벡타이고 $c(x^*)$는 이때 링크 비용벡타이다.

한편, Nash균형 x_i^*는 다음 조건을 만족한다.

$$\sum_{l \in R_i} x_{il}^* c(x_{il}^*, x_{\neq il}^*) \le \sum_{l \in R_i} x_{il} c(x_{il}, x_{\neq il}^*)$$
$$\text{for } i = 1, 2, \ldots, I \tag{2}$$

여기서, $\neq i$는 i 계층에 속하지 않는 사용자 계층을 나타내며, R_i는 i 계층이 속하는 링크의 집합이다. 식(2)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\sum_{l \in R_i} x_{il}^* c(x_{il}^*, x_{\neq il}^*) - \sum_{l \in R_i} x_{il} c(x_{il}, x_{\neq il}^*) \le 0 \tag{3}$$

여기서, 만약

$$c(x_{il}^*, x_{\neq il}^*) - c(x_{il}, x_{\neq il}^*) = 0 \tag{4}$$

인 경우, 식(3)은 다음 식(5)와 같이 정리할 수 있다.

$$\sum_{l \in R_i} (x_{il}^* - x_{il})\ c(x_{il}^*, x_{\neq il}^*) \le 0 \tag{5}$$

그런데, 식(5)는 Wardrop의 변동부등식(식1)과 동일하다. 즉, 추가적인 사용자의 비용이 0이 되는 식(4)와 같은 조건이 성립하는 경우, Nash균형이 Wardrop의 균형과 같아진다. 이는 앞에서 기술한 바와 같이 사용자가 많아지고 사용자 비용이 균형비용과 같아지면 (즉, 더 이상의 비용변화가 없는 경우가 되면), Nash균형과 Wardrop의 균형은 같게 됨을 의미한다.

2. 협상게임(Bargaining game)

협상게임(Bargaining game)은 참가자간 상호 협상 또는 교류가 가능하여 서로의 이익을 높이려는 협력적 게임(cooperative game)의 하나이다. Nash(1950)에 의해 처음으로 제시된 공리적인 협상게임(Bargaining game)은 2명의 참가자에 대한 효용집합 $S = \{s_1, s_2\}$와 이들이 타협하지 않을 경우 얻어지는 비협상점(disagreement)

$d=\{d_1, d_2\}$로 다음과 같이 표현된다.

$$(S, d)$$

여기서, S는 R^2의 부분집합(subset)으로 비어있지 않고(non-empty), 볼록(convex)하며 꽉차(compact)있고 $d \in S$이다. 비협상점(d)는 참가자간에 협상이 이루어지지 않을 때 얻을 수 있는 최소한의 이익으로 이것은 비협력적(non-cooperative)인 상황하에서 얻어지는 안전수준(security level)과 같다. 또한, $s > d$인 $s \in S$가 존재한다고 가정한다. 여기서, 협상문제(bargaining problem)집합을 B라면, B의 해(solution)은 다음과 같은 함수로 표현된다.

$$f: B \rightarrow S$$

이런 협상게임은 Nash(1950)에 의해서 유일한 해가 존재함이 증명되었으며, Nash의 협상게임을 풀기 위하여 여러 방법이 제시되었다. 이중 Nash는 다음 문제 $f^N(S, d)$를 풀어 해를 구할 수 있음을 보여 주었다.

$$f^N(S, d) = \arg\max_{d \le s \in S}(s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$$
$$\text{for } all \ (S, d) \in B \qquad (6)$$

식(6)과 같은 Nash협상게임의 해는 Pareto Efficiency, Symmetry, Invariance 그리고 Independence of Irrelevant Alternatives라는 4개의 공리(Axiom)를 만족하는 유일해가 된다(이들 공리에 대한 자세한 내용은 Nash 1950, 1953; Weber, 2003; 박순달, 1992 등 참조). 이런 4개의 공리중 Sym- metry(대칭)이라는 공리를 완화시킨 비대칭 Nash해(Asymmetric Nash Solution)를 구하는 문제도 식(7)과 같이 제시되었다.

$$f(S, d) = f^{\tau}(S, d)$$
$$= \arg\max_{d \le s \in S}(s_1 - d_1)^{\tau}(s_2 - d_2)^{1-\tau} \qquad (7)$$

여기서, $0 \le \tau \le 1, \tau \ne 1/2$인 파라메타로 참가자의 협상력(bargaining power)를 나타낸다.

이밖에 Nash의 협상게임을 푸는 방법으로 Kalai Smorodinsky(1975)방법, Egalitarian solution 방법, Utilitarian solution 방법들이 있다(Naeve Steinweg, 2004; Rocheteau et al., 2004).

Ⅲ. 대안제시 협상게임 모형(Alternating offers bargaining game model)

이 절에서는 Nash의 연속적인 대안제시 협상게임(Alternating Bargaing game)의 해가 Wardrop의 균형해와 동일함을 정리를 통하여 증명하고 몇가지 예제를 이용하여 이를 평가해 본다.

1. 대안제시 협상게임

대안제시 협상게임(Alternating Offers Bargaining game)은 Rubinstein(1982)이 제시한 협상게임으로 참가자들이 서로 대안을 제시하면서 협상을 진행하여 해(solution)를 구하는 게임이다. 만약, $u_1(x), u_2(x)$를 각 참가자들의 효용함수(utility functions)라 하고 (여기서, $u_1(x) + u_2(x) = 1$이고 x는 효용함수를 이루는 변수), t시점에서 x^*라는 협상이 이루어 졌다면, 각 참가자의 이익은 $[\delta_1^t u_1(x^*),\ \delta_2^t u_2(x^*)]$가 된다. 여기서, $\delta_i = e^{-r_i \triangle}$이며 $r_i > 0$는 참가자 i의 할인율(discount rate)이고 $\triangle > 0$는 참가자들이 서로 대안을 제시하는 시간간격(duration)이다. x^*, y^*를 대안제시 협상게임의 해라면 부분게임 완전균형(Subgame Perfect Equilibrium, SPE)으로 다음과 같이 표현된다.

$$\delta_1 u_1(x^*) = u_1(y^*)$$
$$\delta_2 u_2(y^*) = u_2(x^*)$$

즉, 참가자1이 x^*를 제안하고 적어도 y^*인 어떤 제안도 수락하며, 참가자2도 동일하게 y^*를 제안하고 적어도 x^*인 어떤 제안도 수용하는 경우이다. 여기서, 부분게임 완전균형(SPE)이란, 원게임을 구성하는 부분게임에서의 Nash 균형을 의미하는데, 제한된 각 부분게임에서의 최적점이다. 이런 협상게임은 다음과 같은 균형해를 갖는다.

$$u_1(x^*) = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$$

$$u_2(y^*) = \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}$$

여기서, 만약 $\delta_1 = \delta_2 = \delta$이면 대칭게임(symmetric game)이 된다.

이런 Rubinstein(1982)의 대안제시 협상과정을 이용하여 본 연구에서는 다음과 같은 새로운 정리(Theorem)를 제시한다. 이 정리는 Nash의 협상게임에서 대안을 제시하면서 협상을 계속하여 얻어지는 해가 Wardrop의 균형해와 동일함을 보인다.

〔Theorem〕 Wardrop의 균형해는 Nash게임의 대안제시 협상해(Alternating Offers bargaining solution)와 동일하다.

Wardrop's equilibrium is an Altenating offers bargaining solution in Nash bargainging game.

(증명)

Nash의 협상해는 다음 문제를 풀어서 구할 수 있다.

$$\max \quad f(u) = (u_1(x) - d_1)(u_2(x) - d_2)$$

여기서, $U_1(x) = (u_1(x) - d_1)$, $U_2(x) = (u_2(x) - d_2)$라 두고, x^*, y^*를 대안제시 협상게임의 해라면, 부분게임 완전균형(SPE)에서 다음 관계가 존재한다.

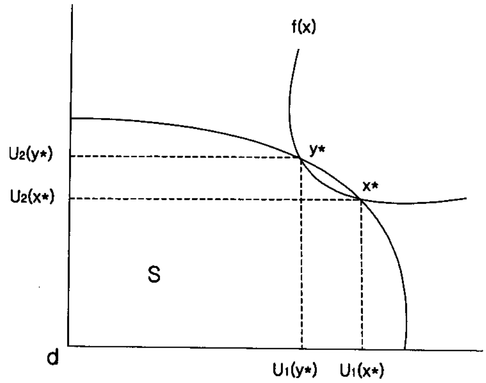
$$\delta U_1(x^*) = U_1(y^*)$$

$$\delta U_2(y^*) = U_2(x^*)$$

여기서, $\delta = e^{-r\Delta}$이다.

따라서, x^*에서 Nash의 협상함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f(u(x^*)) &= U_1(x^*)U_2(x^*) \\ &= U_1(x^*)\delta U_2(y^*) \\ &= U_1(y^*)U_2(y^*) \\ &= f(u(y^*)) \end{aligned}$$



〈그림 1〉 대안제시 협상게임의 해

즉, $u(x^*) = u(y^*)$가 성립하여 Wardrop의 균형해와 동일하다. 이때 $x^* \in S$는 $f(u(x))$를 최대화시키는 점이 되어 Nash 협상문제 (S, d)의 해가 된다(증명 끝).

위 정리는 〈그림 1〉을 이용하여 설명하면 다음과 같다. 그림에서 보듯이 함수 $f(x)$는 원점으로부터 멀어질수록 더 많은 이익을 얻게 되므로, 가능역 S와 접하는 지점에서 $f(x)$는 최대값이 된다. 이때, $u(x^*) = u(y^*)$가 된다. 이것은 참가자간 효용이 동일해지는 상태로 Wardrop의 균형상태를 나타낸다.

여기서 하나 주목해야 할 점은 비록 위 정리와 같이 Wardrop의 균형해와 대안제시 협상게임의 해가 동일하지만, 이들 간에는 차이가 있다. 대안제시 협상게임은 기본 구조가 부분게임하에서 지속적으로 균형(SPE)을 찾지만, Wardrop의 균형해는 통행자들이 완벽한 정보를 갖고 있으며, 합리적으로 경로를 선택한다는 기본 가정을 갖고 있다. 따라서 Wardrop의 균형해는 수많은 통행자들이 동시에 완벽하게 경로를 선택하게 된다. 그러나, 대안제시 협상게임은 여러번의 부분게임을 통하여 제한된 범위내에서 순차적으로 경로를 변경하면서 선택하기 때문에 통행자들의 경로선택과정을 좀 더 현실적으로 묘사한다고 볼 수 있다.

2. 대안제시 협상게임의 평가

앞에서 제시된 정리를 예제들을 통하여 평가해 보자. 먼저, 대안제시 협상게임의 해와 Wardrop의 균형해가 동일하다는 것을 보이기 전에 협상게임(bargaining game)에 대한 이해를 돕기 위해 간단한 경로선택문제를 예제로 Nash 협상게임에 대해 알아보자.

1) Nash 협상게임예제

〔예제1〕 2개의 경로로 구성된 단일 기종점 교통망에서 통행자들이 경로를 선택하는 문제에 대해서 Nash의 협상게임을 적용해 보자. 여기서 참가자(player)는 2개의 경로집합이며, 이익(payoffs)은 경로통행비용이고 전략(strategy)은 각 경로에 배정된 통행량이 된다. 각 경로의 비용 (c_1, c_2)은 다음과 같으며, x_1, x_2는 각 경로의 통행량이고 총 통행수요는 5이다.

$$c_1 = 2 + x_1$$
$$c_2 = 1 + 2x_2$$
$$\text{and} \quad x_1 + x_2 = 5$$

(풀이)

만약 참가자들이 서로 타협하지 않는다면, 비타협점(disagreement)은 모든 통행자가 경로1로 통행하는 통행비용7이 된다. 왜냐하면 경로2로 통행할 경우 11이라는 비용이 소요되기 때문에 비타협시 경로비용이 7인 경로1로 통행하기 때문이다. 즉, $d = (c_1^0, c_2^0) = \min\{7, 11\} = 7$ 이다.

따라서, Nash의 협상해는 다음 문제를 풀어서 구할 수 있다.

$$Max\ f(c_1, c_2) = -(c_1 - c_1^0)(c_2 - c_2^0)$$

여기서,

$$\begin{aligned} f(c) &= -(2 + x_1 - 7)(1 + 2(5 - x_1) - 7) \\ &= 2x_1^2 - 14x_1 + 20 \end{aligned}$$

협상함수 f의 최대값을 구하기 위하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{df}{dx_1} = 4x_1 - 14 = 0$$

그러므로

$$x_1^* = 3.5 \quad x_2^* = 1.5$$
$$c_1^* = 5.5 \quad c_2^* = 4$$

위 결과로부터 우리는 협상을 이룸으로서 각 경로의 통행비용이 비타협점 $(c_1^0, c_2^0) = (7, 7)$에서 $(c_1^*, c_2^*) = (5.5, 4)$로 감소했음을 알 수 있다.

〔예제2〕 2번째 예제는 참가자간 협상력(bargaining power)에 차이가 있는 비대칭(asymmetric) 협상게임에 대해 〔예제1〕과 동일한 문제를 풀어보자. 여기서 협상력은 $\tau = 3/4$로 참가자 1의 협상력이 참가자 2보다 3배 큰 경우이다.

(풀이)

Nash의 비대칭 협상문제는 다음과 같다.

$$Max\ f(c_1, c_2) = -(c_1 - c_1^0)^{\tau}(c_2 - c_2^0)^{1-\tau}$$

따라서,

$$\begin{aligned} f(c_1, c_2) &= -(2 + x_1 - 7)^{0.75}(1 + 2(5 - x_1) - 7)^{0.25} \\ &= -(x_1 - 5)^{0.75}(4 - 2x_1)^{0.25} \end{aligned}$$

양변에 log를 취하면,

$$\begin{aligned} F \equiv \log f(x_1, x_2) &= -0.75 \log(x_1 - 5) \\ &\quad - 0.25 \log(4 - 2x_1) \end{aligned}$$

따라서, 최대값을 구하기 위하여 위식을 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{dF}{dx_1} = -0.75 \frac{1}{x_1 - 5} - 0.25 \frac{-2}{4 - 2x_1} = 0$$

위 식을 풀면 다음과 같다

$$x_1 = 2.75 \quad x_2 = 2.25$$
$$c_1 = 4.75 \quad c_2 = 5.5$$

이 결과는 앞에서 살펴본 동등한 협상력을 갖는 〔예제1〕의 협상결과와 다름을 알 수 있다. 즉, 협상력이 큰 참가자1의 통행비용이 5.5에서 4.75로 감소했음을 알 수 있다. 본 예제에서 협상력(bargaining power)이란 경로의 우월적인 속성을 의미한다. 즉, 경로1이 경로2보다 통행비용을 줄일 수 있는 도로조건을 갖고 있다고 볼

수 있다. 만약 본 예제와는 달리 게임의 참가자를 통행자로 설정할 경우, 협상력은 통행자의 교통상황에 대한 우월적인 지위(예를 들어, 남들보다 더 정확하고 더 많은 교통정보를 소유)를 나타낸다고 볼 수 있다.

2) 대안제시 협상게임의 평가

자, 이제 본 연구에서 제시된 정리를 앞에서 살펴본 동일한 예제들을 통하여 평가해 보자. 즉, 경로별 통행비용은 다음과 같이 동일하다.

$$c_1 = 2 + x_1$$
$$c_2 = 1 + 2x_2, \quad x_1 + x_2 = 5$$

이 문제의 Wardrop의 균형해는 $x_1^* = 3$, $x_2^* = 2$이며 통행시간은 $c_1 = c_2 = 5$로 더 이상 통행비용을 줄일 수 있는 해는 존재하지 않는다. 즉, 유일한 최적해이다.

(1) 동일한 협상력을 갖는 경우(대칭 협상게임)

위 문제를 대안제시 협상게임으로 풀어보자. [예제 1]에서 살펴본 바와 같이 참가자간에 협상이 이루어지면, 우리는 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$x_1^* = 3.5 \quad x_2^* = 1.5$$
$$c_1^* = 5.5 \quad c_2^* = 4$$

그런데, 위 결과에 만족하지 않고 새로운 대안을 제시하면서 협상을 계속한다면, SPE에서 비타협점은 $(c_1^0, c_2^0) = (4, 4)$이므로

$$f(x) = -(2 + x_1 - 4)(1 + 2(5 - x_1) - 4)$$
$$= 2x_1^2 - 11x_1 + 14$$

따라서,

$$\frac{df}{dx_1} = 4x_1 - 11 = 0$$

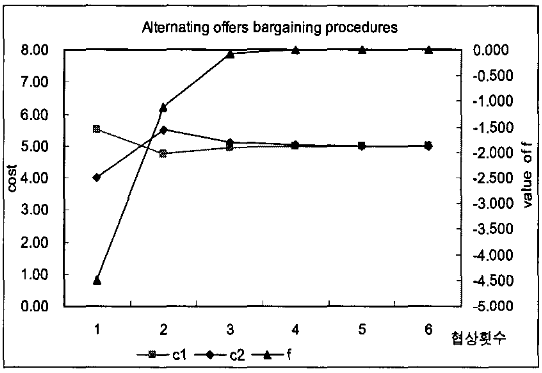
그러므로

$$x_1^* = 2.75 \quad x_2^* = 2.25$$
$$c_1^* = 4.75 \quad c_2^* = 5.5$$

위 결과에 만족하지 않고 이런 협상과정을 반복한 결과가 <표 1>과 <그림 2>에 나타나 있다. 표에서 보듯이 협상이 진행됨에 따라 각 경로의 통행비용이 5에 접근함을 알 수 있다. 즉, Wardrop의 균형해에 도달하여 대안제시 협상게임의 해가 Wardrop의 균형해와 동일함을 보여준다. 또한, 목적함수 f 값도 통행비용이 동일해 짐에 따라 0으로 수렴하고 있다. <그림 2>는 각 경로들의 통행비용변화를 보여주고 있는데, 각 값들은 협상단계별로 나타난 SPE값들로 제한된 부분게임 하에서의 최적값이며 통행자의 경로선택 과정을 나타내고 있다.

<표 1> 대안제시 협상게임의 해(대칭 협상게임)

협상 횟수	비타협점 (c_1^0, c_2^0)	통행량 x_1	통행량 x_2	경로비용 c_1	경로비용 c_2	f
0				7	11	
1	(7, 7)	3.50	1.50	5.50	4.00	-4.500
2	(4, 4)	2.75	2.25	4.75	5.50	-1.125
3	(4.75, 4.75)	2.94	2.06	4.94	5.13	-0.070
4	(4.94, 4.94)	2.98	2.02	4.98	5.03	-0.004
5	(4.98, 4.98)	3.00	2.00	5.00	5.01	0.000
6	(5.00, 5.00)	3.00	2.00	5.00	5.00	0.000



<그림 2> 협상진행에 따른 통행비용과 목적함수값의 변화

(2) 협상력에 차이가 있는 경우(비대칭 협상게임)

동일한 문제를 [예제2]와 같이 협상력이 비대칭인 경우($\tau = 3/4$)에 대해서 풀어보면, 1차 협상결과는 다음과 같다.

$$x_1 = 2.75 \quad x_2 = 2.25$$
$$c_1 = 4.75 \quad c_2 = 5.5$$

여기서, 최소비용은 4.75이므로 이를 비협상점으로 설정하고 이런 협상과정을 반복하면,

$f(x_1, x_2)$

$= -(2+x_1-4.75)^{0.75}(1+2(5-x_1)-4.75)^{0.25}$
$= -(x_1-2.75)^{0.75}(6.25-2x_1)^{0.25}$

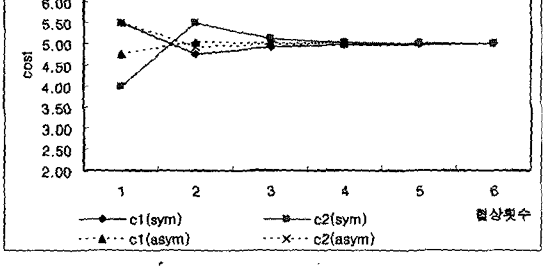
이고 위식에 log를 취한 후, 미분하여 정리하면 다음과 같은 값을 얻을 수 있다.

$x_1 = 3.03 \quad x_2 = 1.97$
$c_1 = 5.03 \quad c_2 = 4.94$

여기서, 협상을 계속하면 <표 2>와 같은 결과를 얻을 수 있다. 표에서 보듯이 협상이 진행됨에 따라 Wardrop의 균형해인 $x_1=3 \quad x_2=2 \quad c_1=c_2=5$로 수렴하고 있다. 이결과는 앞에서 살펴본 동등한 협상력을 갖고 있는 경우(대칭 협상게임)와 동일하다. 따라서, 협상력에 차이가 있는 경우, 초기의 협상단계에서는 해가 다르게 나타나지만, 협상과정을 반복하면, 결국 서로 동일한 균형해에 도달함을 알 수 있다. 그러나, 수렴에 도달하는 협상횟수에는 차이가 있는데, <그림 3>에서 보듯이 협상력이 비대칭인 경우 좀 더 빠르게 수렴하고 있다. 이는 참가자들이 동등한 협상력을 갖는 경우보다 한쪽이 우월한 협상력을 갖는 경우가 더 신속하게 최종 협상에 도달함을 보여준다. 즉, 균형해에 빨리 수렴하게 된다.

<표 2> 대안제시 협상게임의 해(비대칭 협상게임)

협상횟수	비타협점 (c_1^0, c_2^0)	통행량 x_1	x_2	경로비용 c_1	c_2	f
0				7	11	
1	(7, 7)	2.75	2.25	4.75	5.5	-3.375
2	(4.75, 4.75)	3.03	1.97	5.03	4.94	-0.053
3	(4.94, 4.94)	3.01	1.99	5.01	4.98	-0.003
4	(4.98, 4.98)	3.00	2.00	5.00	5.00	0.000



<그림 3> 대칭게임과 비대칭게임의 수렴과정

3. n-person 대안제시 협상게임

앞에서 살펴본 2인 협상게임을 참가자수가 n명인 Nash의 n-인 협상게임으로 확장하면 다음과 같이 표현된다.

$$\max imize \quad \Pi_{i=1}^{n}(u_i(x)-d_i) \qquad (8)$$

위 식(8)은 $u(x) \geq d$라는 조건하에 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\max imize \quad \sum_{i=1}^{n}\log(u_i(x)-d_i) \qquad (9)$$

식(9)는 $u(x)$가 분리 오목(separable concave)형태이면 비선형문제로 유일해를 갖게 된다. 그런데, 교통망문제의 경우 $u(x)$를 통행비용함수로 설정하면 볼록(convex)형태가 되며, $u(x) \geq d$를 만족시키기 쉽지 않기 때문에 위 문제를 풀기가 쉽지 않게 된다.

Ⅳ. 결론

본 연구에서는 대안제시 협상게임(alternating offers bargaining game)의 해가 Wardrop의 사용자균형과 동일함을 보이고 간단한 예제를 통하여 이를 확인하였다. 협상게임은 다수의 부분게임(subgame)을 거치게 되는데, 각 부분게임이라는 제한된 게임하에서 완전정보를 통한 최적점(균형해)을 찾는 과정을 반복하게 되므로 Wardrop의 균형해에 비해 통행자의 경로 선택과정을 좀 더 현실적으로 묘사한다고 볼 수 있다. 즉, 최종 결과로 얻어지는 해는 동일하지만, 여기에 이르는 과정을 현실적으로 표현할 수 있다는 장점이 있다. 이런 협상과정은 향후 통행자 상호간에 실시간 커뮤니케이션이 가능해질 경우, 경로선택, 출발시간선택, 수단선택 등 여러 통행행위선택시 발생하는 상호 의견교류와 조절과정을 협상이라는 과정으로 표현할 수 있을 것으로 보여 추후 이들모형의 개발에 도움이 될 것으로 기대된다.

또한, 비록 간단한 예제를 통하여 도출된 결과지만 주목할 점은 게임 참가자들의 협상력에 따라 균형에 도달하는 협상횟수가 다르다는 점이다. 이를 교통정보측면에서 보면, 교통정보를 제공받는 우월한 지위의 통행자가 있는 경우에 좀 더 일찍 Wardrop의 균형에 도달할 수 있음을 시사하고 있다. 그러나 이는 단편적인 연

구의 결과로 이에 대해서는 좀 더 깊이 있는 연구가 필요할 것으로 보인다.

본 연구는 협상게임이론을 교통망 모형에 적용한 기초적인 연구로 여러 가지 한계와 향후 연구과제를 남겨 두고 있다. 먼저, 제3절의 식(8)과 같이 참가자가 다수인 n-인 협상게임(n-person bargaining game)모형의 경우 앞에서 기술한 바와 같이 풀기가 쉽지 않은데, 이를 해결하기 위하여 모형의 수학적인 속성(mathematical property)에 대한 연구와 알고리듬의 개발이 요구된다. 이는 본 연구에서 제안한 내용을 대규모 교통망에 적용할 수 있는 토대가 될 것이다. 또한, 본 연구에서 보여준 게임이론과 교통망 균형과의 관계외에 협상과정에 대한 심도있는 연구도 필요하다.

참고문헌

1. 박순달(1992), 게임이론, 민영사.
2. 임용택 · 임강원(2004), Bi-level program에서 Cournot-Nash게임과 Stackelberg게임의 비교연구, 대한교통학회지, 제22권 제7호, 대한교통학회, pp.99~106.
3. 최기주 · 장정아(2004), 게임이론에 기반한 VMS 운영모형, 대한토목학회논문집, 제24권 제2D호, 대한토목학회, pp.155~165.
4. Altman, E., L. Wynter(2004), Equilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunications networks, Networks and Spatial Economics 4, pp.7~21.
5. Altman, E., T. Boulogne, R. El-Azouzi, T. Jimenez, L. Wynter(2005), A survey on networking games in telecommunications, Computers & Operations Research, in press.
6. Bell, M. G. H., Chris Cassir(2002), Risk-averse user equilibrium traffic assignment: an application of game theory, Transportation Research 36B, pp.671~681.
7. Dafermos, S., Sparrow, F. T.(1968), The traffic assignment problem for a general network, Nastional Bureau of Standards. J. Res. 73B, pp.91~118.
8. Fisk, C. S.(1984), Game theory and transportation systems modelling, Transportation Research Vol. 18B, pp.301~313.
9. Harker, P. T.(1991), Generalized Nash games and quasi-variational inequalities, European Journal of Operational Research 54, pp.81~94.
11. Kalai, E., M. Smorodinsky(1975), Other solutions to Nash's bargaining problem, Econometrica 43, pp.513~518.
12. Nash, J.(1950), The bargaining problem, Econometrica 18, pp.155~162.
13. Nash, J.(1951), Noncooperative games, Ann. Mathematics 54, pp.286~295.
14. Nash, J.(1953), Two-person cooperative games, Econometrica 21, pp.128~140.
15. Naeve-Steinweg, E.(2004), The averaging mechanism, Games and Economic Behavior 46, pp.410~424.
16. Rocheteau, G., C. Waller(2004), Bargaining in monetary economies, Australian National University, working paper.
17. Rosenthal, R. W.(1973), The network equilibrium problem in integers, Networks 3, pp.53~59.
18. Rubinstein, A.(1982), Perfect equilibrium in a bargaining model, Econometrica 50, pp.97~109.
19. Smith, M. J.(1979), The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria, Transportation Research 13B, pp.295~304.
20. Wardrop J. G.(1952), Some theoretical aspects of road traffic research, Proc. Inst. Civil Engineer, Part II, pp.325~378.
21. Weber, R.(2003), Mathematics for operation research, M. Phil in Statistical Science, Mathematical Tripos, Part III.
22. Zhou, J., W. H. K. Lam, B. G. Heydecker (2005), The generalized Nash equilibrium model for oligopolistic transit market with elastic demand, Transportation Research 39B, pp.519~544.

♧ 주 작 성 자 : 임용택
♧ 논문투고일 : 2005. 2. 18
논문심사일 : 2005. 6. 8 (1차)
2005. 8. 17 (2차)
심사판정일 : 2005. 8. 17
♧ 반론접수기한 : 2005. 12. 31