

VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 경제적 설계

송서일 · 박현규 · 정혜진

동아대학교 산업경영공학과

Economic design of VSI \bar{X} -CRL Synthetic Control Chart

Suh-Il Song · Hyun-Kyu Park · Hey-Jin Jung

Dept. of Industrial & Management Systems Engineering, Dong-A University

This paper is designed a VSI \bar{X} -CRL synthetic control chart in aspect of economy. We found the optimal sampling interval and various control limit factors under various cost parameters using cost function, proposed Lorenzen and Vance. Optimal design parameters include the sample size, control limit width, sampling interval, CRL/S chart control limit; L. Comparison and analysis of cost parameters are applied between synthetic VSI \bar{X} -CRL chart and FSI \bar{X} -CRL chart.

The result of this paper shows that VSI \bar{X} -CRL chart brings cost-cutting effect of 3.04% control expense less than FSI control chart. It may not be difficult to establish the optimal economic control parameters to apply the practical cost parameters in the field.

Keywords : synthetic control, economic design of control chart, VSI control chart

1. 서 론

오늘날 제조 환경에서 통계적 공정관리(SPC)는 제조 시스템의 생산성 향상과 지속적인 공정변동의 모니터링을 통하여 공정의 품질과 제품의 품질을 개선하는데 유용하게 사용되고 있는 문제해결도구이다. 그 중 관리도는 공정의 변동 감소를 통하여 공정에 보다 향상된 공정능력을 제공하고, 변동의 원인으로부터 이상원인을 찾아 공정 안정성을 성취하기 위한 통계적 방법이다.

관리도의 설계는 기본적으로 통계적 접근과 경제적 접근으로 나누어 진다.

통계적 접근은 주로 평균런길이인 ARL(average run length)를 기준으로 관리도의 모수가 선정되어진다. 관리도에 있어서 ARL 값은 공정이 관리상태일 때는 큰 값을 가질수록 이상상태일 때는 보다 작은 ARL을 가질 수 있도록 수행도가 우수한 관리도가 된다.

그리고 경제적 접근은 공정운영비용의 최소화나 공정의 기대되는 총 산출량의 최대화를 목적함수로 관리도의 모수를 선정하는 것이다.

최근 관리도의 통계적 설계에 관한 연구는 전통적인 관리도의 단점을 개선하기 위한 연구가 주를 이루고 있다. 먼저 Nelson[11]과 Champ와 Woodal[5]는 기존의 런(run) 규칙과 함께 작은 변화에 민감하도록 런 규칙을 보완하였다. Albin 등[3]은 결합 \bar{X} -EWMA 관리도를 개발하였고 그들이 제시한 관리도는 표준편차가 작은 변화일 때를 제외하고 공정변화를 모니터링하는데 민감하다는 것을 제시하였다. Ncube[10]는 Shewhart 관리도와 CUSUM 관리도를 결합시키는 것을 제안하였고, Shamma와 Shamma[12]는 평균에서의 작고 일반적인 공정평균 변화를 감지하기 위하여 이중 EWMA 관리도를 제안하였다.

Wu와 Spending[14]은 \bar{X} 관리도와 CRL(conforming run

* 이 논문은 2004학년도 동아대학교 학술연구조성비(공모과제)에 의하여 연구되었음.

length) 관리도를 결합한 관리도를 개발하였으며, 평균변화가 0.5σ 이상인 경우에는 어떠한 결합관리도 보다 우수한 수행도를 가진다는 것을 제시하였다. 이후 Calzada와 Scariano[4]는 공정의 품질특성이 정규 분포를 따르지 않는 경우에 있어서 합성관리도의 강건성에 대하여 연구하였다. 최근 Wu와 Yeo 등[13]은 np 관리도와 CRL 관리도를 결합한 합성 관리도를 제안하였고, 공정이 이상상태일 때 평균 ATS를 최소화하도록 관리도를 설계하였다. 송서일 등[1]은 가변추출구간을 이용한 합성관리도를 개발하여 ATS를 최소화하는 관리모수를 설정하였다.

관리도의 경제적 설계에 관한 연구로써 Duncan[7]은 \bar{X} 관리도의 최적 경제적 설계를 제안했다. 그는 단위시간당 기대되는 순 투입비용의 최소화라는 설계기준을 적용하였고, 이상원인의 감지와 제거의 조정에 따라서 제품의 시작점으로부터 시간의 구간을 두어서 제품 사이클을 고려하였다.

Chiu와 Wetherill[6]은 관리도의 실용적 설계를 위하여 Shewhart \bar{X} 관리도의 준(semi) 경제적 설계를 나타내었다. 모수 선택의 원리는 OC 곡선에서 평균손실 비용을 최소로 만드는 것이고, 열등한 품질을 보호하기 위해서 제 1종 오류를 고려하여 관리도의 모수를 선택하는 조건표를 제공하였다.

그들의 방법은 관리모수를 계산하는데 있어서 용이성을 제공하였고, Duncan[7]의 경제적 설계와 비교하여 보다 실질적인 최소의 비용과 가깝게 평균비용을 일반적으로 산출할 수 있다는 것을 제시하였다.

Lorenzen과 Vance[8]은 일반적인 비용모형을 제시함으로써 모든 관리도에 적용할 수 있는 범용적인 비용모형을 제시하였다. 그들의 연구는 제조 사이클로부터 시간당 기대 비용의 최소화에 주안점을 두었고, 제시한 모형은 α 와 β 위험을 대신에 이상상태 평균 런 길이를 기본에 두고, Duncan[7]의 모형을 적용하였다. 경제적 모형에 통계적인 특성을 함께 고려한 EWMA 관리도의 통계적 경제 모형은 Montgomery[9]에 의해서 연구되었다. 또한 임태진 등[2]은 Wu와 Speddng[14]의 합성관리도의 경제적 최적설계에 관하여 제시하였다.

본 연구는 관리도 사용에 있어서의 공정품질비용을 최소화하는 경제적 설계를 다루고 있다. 따라서 Lorenzen과 Vance[8]의 비용모형을 이용한 VSI \bar{X} - CRL 합성관리도의 경제적 설계를 통하여, 최적 비용 모형을 제시하고자 한다.

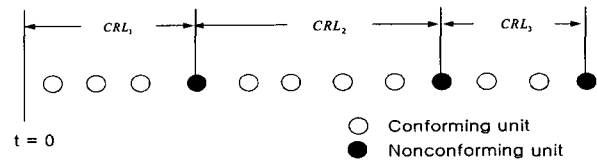
2. VSI \bar{X} -CRL 합성 관리도

2.1 기본개념

본 연구에서 경제적 설계의 대상으로 사용하고자는 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도는 송서일 등[1]에 의해서 제안되었다.

VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 기초가 되는 관리도는 Wu와 Speddng[14]에 의해 제안된 \bar{X} -CRL 합성관리도에 가변 샘플링 기법을 이용하는 것이다.

CRL 관리도에서 CRL의 기본개념은 <Figure 1>에 의해서 쉽게 설명될 수 있다. <Figure 1>에서 비어있는 원은 양품, 검은색 원은 불량으로 표시 할 때, 불량발견되기 까지의 연속적인 검사수의 길이를 CRL로 표시한다. <Figure 1>에서는 공정이 시간 $t=0$ 에서 출발한다고 가정하고, 여기서 $CRL_1 = 4, CRL_2 = 5, CRL_3 = 3$ 이 된다.



<Figure 1> CRL (Conforming Run Length)

\bar{X} -CRL 합성관리도는 \bar{X}/S 하위 관리도와 CRL/S 하위 관리도의 2단계로 구성된 관리도으로써, CRL 관리도에서 계수치의 양품, 불량품 대신에 \bar{X} 샘플을 사용한다는 것을 제외하고는 일반적인 CRL 관리도와 동일한 방법을 사용하는 것이다.

중요한 사실은 일반적인 \bar{X} 관리도와 달리 \bar{X} 의 샘플 값이 관리한계를 벗어나도 즉시 이상상태로 판정하지 않고 CRL/S하위 관리도에서 CRL이 관리하한(L)보다 작거나 같을 때에 이상상태로 판정하는 것이다. VSI \bar{X} -CRL 관리도를 설계하는 것은 \bar{X} -CRL 합성관리도에서 \bar{X}/S 하위 관리도에 VSI 기법을 적용함으로써 간단하게 설계할 수 있다. VSI \bar{X} -CRL 합성관리도를 설계하기 위하여 다음과 같은 기호가 필요하다.

- ATS_0 : 관리상태에서 관리도가 이상신호 발생까지의 평균시간
- ATS_1 : 이상상태에서 관리도가 이상신호 발생까지의 평균시간
- d_1 : 짧은 샘플링 간격(시간)
- d_2 : 긴 샘플링 간격(시간)
- $\pm k$: 통계량이 표준정규분포를 따를 때의 \bar{X}/S 관리도의 관리한계선
- $\pm k'$: 통계량이 표준정규분포를 따를 때의 \bar{X}/S 관리도의 경고한계선

- p_{01} : 관리상태에서 통계량이 \bar{X}/S 관리도의 관리 한계선과 경고한계선 사이에 타점될 확률
- p_{02} : 관리상태에서 통계량이 \bar{X}/S 관리도의 경고 한계선 사이에 타점될 확률
- p_{11} : 이상상태에서 통계량이 \bar{X}/S 관리도의 관리 한계선과 경고한계선 사이에 타점될 확률
- p_{12} : 이상상태에서 통계량이 \bar{X}/S 관리도의 경고 한계선 사이에 타점될 확률
- L : CRL/S 관리도의 관리한계선

주는 것이다.

일반적인 VSI \bar{X} 관리도에서와 마찬가지로 \bar{X}/S 관리도의 관리한계를 식 (1)과 같은 샘플링 구간으로 나눌 수 있다.

$$I_1 = [LCL, LWL) \cup (UWL, UCL] \dots\dots\dots (1)$$

$$I_2 = [LWL, UWL]$$

$$LCL = \mu_0 - k\sigma_{\bar{X}}$$

$$UCL = \mu_0 + k\sigma_{\bar{X}}$$

$$LWL = \mu_0 - k'\sigma_{\bar{X}}$$

$$UWL = \mu_0 + k'\sigma_{\bar{X}}$$

단, $k > k'$

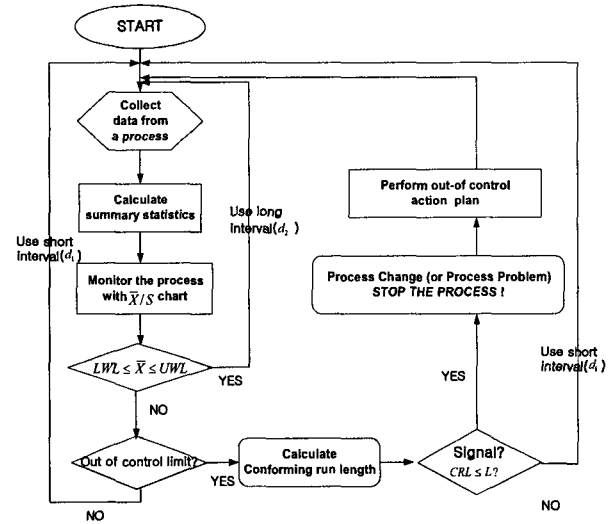
이때 관리통계량이 I_1 구간에 속하게 되면 그 다음 샘플을 빠른 시간 d_1 으로 하고, I_2 구간에 속하게 되면 긴 샘플링 간격 d_2 에서 다음 샘플링을 하면 된다. 그런데 여기에서 I_1 에 속하는 영역에서 \bar{X}/S 하위관리도의 관리 한계선인 UCL 과 LCL 을 통계량이 벗어나도 일단 관리상태를 벗어난 것이 아니라는 것에 주의할 필요가 있다. 결국 관리한계선을 벗어나더라도, CRL/S 하위관리도의 관리한계 L 값보다 CRL이 작거나 같지 않으면 공정은 관리상태에 있다. 이때에는 다음 샘플링 구간에 따라 샘플을 취하여 \bar{X}/S 관리도에 타점하게 된다. 본 연구에서는 이때 샘플링 간격은 짧은 구간으로 하는 것으로 한다.

마코브 체인을 이용하여 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 ATS_0 와 ATS_1 를 구하면 식 (2)와 같다[1].

$$ATS_0 = [p_{01}d_1 + p_{02}d_2] / [(p_{01} + p_{02})(1 - p_{01} - p_{02})] \times 1 / [1 - (p_{01} + p_{02})^L]$$

$$ATS_1 = [p_{11}d_1 + p_{12}d_2] / [(p_{11} + p_{12})(1 - p_{11} - p_{12})] \times 1 / [1 - (p_{11} + p_{12})^L] \dots\dots\dots (2)$$

<Figure 2>는 VSI \bar{X} -CRL 관리도의 운용절차를 보여



<Figure 2> VSI \bar{X} -CRL control chart scheme

2.2 경제적 설계

VSI \bar{X} -CRL 합성 관리도의 경제적 모형을 정식화하기 위해 필요한 몇 가지 가정들은 대부분의 경제적 관리도 모형에서 사용되고 있는 일반적인 것들로써 다음과 같다.

- ① 품질특성치들은 정규분포를 따른다.
- ② 공정은 하나의 품질특성치에 의해 나타내진다.
- ③ 이상원인의 종류는 하나이다.
- ④ 공정의 관리상태 시간은 평균 $1/\lambda$ 의 지수확률변수(exponential random variable)로써 가정한다. 즉 이상원인이 발생하는 평균시간은 $1/\lambda$ 로써 정의할 수 있다.
- ⑤ 이상원인이 발생할 확률은 미리 정해진다.
- ⑥ 공정은 자체 수정능력이 없다.
- ⑦ 공정의 주기는 관리상태에서 시작해서 이상원인이 발생하여 이상원인이 탐지될 때까지로 한다.

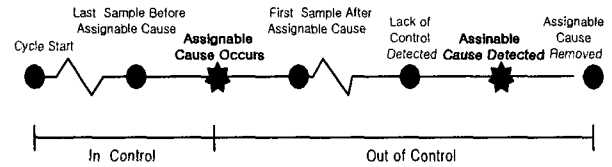
그리고 비용함수에 포함되는 기호들의 정의는 다음과 같다.

- Z : 표준정규분포 통계량
- n : 샘플 크기
- d : 샘플링 간격(시간)
- τ : 관리상태에 있는 동안에 i 번째와 $i+1$ 번째 샘플

- 플사이에서 이상원인이 발생하는 기대시간
- s : 관리상태에 있는 동안 취해지는 샘플의 기대수
- a : 샘플당 고정비용
- b : 샘플링된 부품당 비용
- Y : 허위경보당 비용
- C_0 : 관리상태에 있는 동안 생산되는 시간당 품질비용
- C_1 : 이상상태에 있는 동안 생산되는 시간당 품질비용 ($C_1 > C_0$)
- W : 이상원인이 존재할 때 이를 찾아서 교정하는데 드는 비용
- E : 하나의 항목을 택하는데 소요되는 시간
- T_0 : 허위경보 신호하에서 조사에 소요되는 기대시간
- T_1 : 이상원인을 발견하는데 소요되는 기대시간
- T_2 : 공정변화를 교정하는데 소요되는 기대시간
- γ_1 : 만약 조사하는 동안 제품 생산을 계속한다면, 1
만약 조사하는 동안 제품 생산을 멈춘다면, 0
- γ_2 : 만약 공정을 수리하는 동안 생산을 계속한다면, 1
만약 공정을 수리하는 동안 생산을 멈춘다면, 0
- R : 공정이 관리상태에 머무르는 시간의 길이
- d_1 : 짧은 샘플링 간격
- d_2 : 긴 샘플링 간격
- τ_1 : 관리상태에 있는 동안에 이상원인이 i 번째와 $i+1$ 번째 샘플 사이의 짧은 샘플링 간격(d_1)에서 발생하는 기대 시간
- τ_2 : 관리상태에 있는 동안에 이상원인이 i 번째와 $i+1$ 번째 샘플 사이의 긴 샘플링 간격(d_2)에서 발생하는 기대 시간
- s : 관리상태에 있는 동안 취해지는 샘플의 기대수
- a_1 : VSI \bar{X} 관리도에서 드는 샘플당 고정비용
- a_2 : CRL 관리도에서 드는 샘플당 고정비용
- b_1 : VSI \bar{X} 관리도에서 드는 샘플링된 부품당비용
- b_2 : CRL 관리도에서 드는 샘플링된 부품당 비용
- ATS_0 : 관리상태에서 신호가 발생하기까지의 평균 시간
- ATS_1 : 이상상태에서 신호가 발생하기까지의 평균 시간

Lorenzen과 Vance[8]은 관리도의 경제적 설계의 통합된 절차를 제공하였으며, 모든 관리도에 적용할 수 있는 일반적인 경제적 모형을 개발하였다. 관리도의 경제적 설계의 주된 목적은 <Figure 3>에서 나타내고 있는 한 주기에 대한 시간당 기대비용을 최소화하는 관리도의 모수를 결정하는 것이다. 이 모형은 α 와 β 위험 대신에

관리상태와 이상상태의 런 길이를 기초로 하였다.



<Figure 3> Diagram of in-control and out-of control states of a process

재생 과정을 사용하여, 목적함수인 시간당 기대 비용은 기대 주기시간 $E(T)$ 와 주기당 기대비용 $E(C)$ 의 비로써 정의된다. 주기시간은 ① 이상원인이 발생하기까지의 시간의 기대시간 $E(T_1)$, ② 다음 샘플을 취하고 이상상태의 신호를 발견하기까지의 기대시간 $E(T_2)$, ③ 샘플과 관리도를 분석하는데 걸리는 기대시간 $E(T_3)$, ④ 이상원인을 발견하고 공정을 수리하는데 걸리는 기대시간 $E(T_4)$ 와 같이 구분하여 그 합으로 구해진다.

경제적 설계를 하기 전에 먼저 경제적 설계에서 필요한 변수들을 살펴볼 필요가 있다. 경제적 설계와 관련된 변수는 입력하는 입력변수와 계산을 해야 하는 변수로 나눌 수 있다. 계산해야 될 변수를 살펴보면, $S(Z)$ 는 표준정규분포 통계량 Z 의 현재 위치에 대한 샘플링 간격에 관한 함수이다.

$$S(Z) = \begin{cases} d_2, & \text{if } -k' < Z < k' \\ d_1, & \text{if } k' < |Z| < k, |Z| > k \text{ and } CRL > L \end{cases}$$

여기서 k' 는 주어진 d_1, d_2, L, n 에 의해 구해지는 값이다. 공정이 관리상태에 있는 동안 관리도에 신호가 발생하는 평균시간 ATS_0 는 식 (3)과 같이 나타낸다.

$$ATS_0 = d_1 \cdot \frac{p_{01} + p_{03}}{p_0'} + d_2 \cdot \frac{p_{02}}{p_0'} \dots \dots \dots (3)$$

여기서, $p_{01} = P(k' < |Z| \leq k)$, $p_{02} = P(|Z| \leq k')$, $p_{03} = P(|Z| > k) \cdot P(|Z| \leq k)^L$, $p_0' = p_{01} + p_{02} + p_{03}$, $Z \sim N(0, 1^2)$

공정에 변화가 발생했을 때, 즉 평균이 μ_0 에서 $\mu_0 + k\sigma$ 까지 변화되었을 때 통계량을 W 라고 한다면 이때, 관리도에 신호가 발생하는 평균시간 ATS_1 은 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$ATS_1 = d_1 \frac{p_{11} + p_{13}}{p_1'} + d_2 \cdot \frac{p_{12}}{p_1'} \dots \dots \dots (4)$$

여기서, $p_{11} = P(k' < |W| \leq k)$, $p_{12} = P(|W| \leq k')$,
 $p_{13} = P(|W| > k) \cdot P(|W| \leq k)^L, p_1' = p_{11} + p_{12} + p_{13}$,
 $W \sim N(\delta\sqrt{n}, 1^2)$

식 (3)과 식 (4)에서 $d_2 > d_1$ 이기 때문에 $\eta \leq \phi$ 은 샘플 사이의 시간이 좀 더 짧아졌다는 것을 알 수 있다. 그러므로 신호를 보다 빨리 감지할 수 있다.

시간의 길이가 지수분포를 따르고 공정이 관리상태에 있는 동안 i 와 $i+1$ 번째 샘플 구간에서 샘플이 발생하는 기대시간은 구간 상태에 따라 식 (5)와 같이 두 가지로 나누어 구할 수 있다.

$$\tau_1 = \frac{[1 - (1 + \lambda d_1)e^{-\lambda d_1}]}{[\lambda(1 - e^{-\lambda d_1})]}$$

$$\tau_2 = \frac{[1 - (1 + \lambda d_2)e^{-\lambda d_2}]}{[\lambda(1 - e^{-\lambda d_2})]} \dots \dots \dots (5)$$

공정이 관리상태에 머무르는 시간의 길이 R 이 지수 분포를 따른다는 가정하에서 관리상태에 있는 동안 취해지는 샘플의 기대수 s 는 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} i P\{\text{failure occurs between } i_{th} \text{ and } (i+1)_{th} \text{ sample}\}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i P\{T_i < R \leq T_{i+1} \mid R > T_i\} P\{R > T_i\}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i [P\{T_{i+1} - T_i = d_2\} P\{R \leq d_2\} + P\{T_{i+1} - T_i = d_1\} P\{R \leq d_1\}] P\{R > T_i\} \dots \dots \dots (6)$$

여기서 T_i 는 i 번째 샘플링 시각을 나타낸다.

$$P\{R > T_i\} = P\{R > T_i - T_1 \mid R > T_1\} P\{R > T_1\}$$

$$= P\{R > T_i - T_2 \mid R > T_2 - T_1\} \times P\{R > T_2 - T_1\} P\{R > T_1\}$$

$$= \prod_{j=2}^i P\{R > (T_j - T_{j-1})\} P\{R > T_1\} \dots \dots \dots (7)$$

첫 번째 샘플은 항상 d_1 에서 취한다고 가정하면,

$$P\{R > T_i\} = \Gamma^{i-1} e^{-\lambda d_1} \quad \text{for } 2 \leq j \leq i$$

$$= P\{R > d_2\} \cdot \frac{p_{02}}{p_0} + P\{R > d_1\} \cdot \frac{p_{01} + p_{03}}{p_0}$$

$$= e^{-\lambda d_2} \cdot \frac{p_{02}}{p_0} + e^{-\lambda d_1} \cdot \frac{p_{01} + p_{03}}{p_0} \dots \dots \dots (8)$$

단, $\Gamma = P\{R > (T_j - T_{j-1})\}$

식 (7)과 식 (8)을 이용하여 식 (6)을 다시 간단하게 나타내면 식 (9)와 같이 될 수 있다.

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} i \left[P\{R \leq d_2\} \cdot \frac{p_{02}}{p_0} + P\{R \leq d_1\} \cdot \frac{p_{01} + p_{03}}{p_0} \right]$$

$$\times \Gamma^{i-1} \cdot e^{-\lambda d_1}$$

$$= e^{-\lambda d_1} \left[(1 - e^{-\lambda d_2}) \cdot \frac{p_{02}}{p_0} + (1 - e^{-\lambda d_1}) \cdot \frac{p_{01} + p_{03}}{p_0} \right]$$

$$\times \frac{1}{(1 - \Gamma)^2} \dots \dots \dots (9)$$

본 연구의 주기시간도 전술한 바와 같이 네 개로 구분한다. 첫째로, 이상원인이 발생하기까지의 시간의 기대시간 $E\{T_1\}$ 은 식 (10)과 같이 구할 수 있다.

$$E\{T_1\} = 1/\lambda + (1 - \tau_1) P\{CRL < L\} \cdot s T_0 \dots \dots \dots (10)$$

여기서 $P\{CRL > L\}$ 는 통계량 CRL이 VSI \bar{X} -CRL 합성 관리도의 관리한계 L 를 벗어날 확률, 즉 α 를 나타낸다. 이 값은 식 (11)과 같다.

$$P\{CRL < L\} = 1 - [P\{|Z| \leq k\} + P\{|Z| > k\} \cdot P\{|Z| \leq k\}^L]$$

$$= 1 - p_0' \dots \dots \dots (11)$$

둘째로, 다음 샘플을 취하고 이상상태 신호가 발생할 때까지의 기대시간 $E\{T_2\}$ 는 식 (12)와 같다.

$$E\{T_2\} = TT + ATS_1 \dots \dots \dots (12)$$

여기서,

$$TT = \left[(d_2 - \tau_2) \cdot \frac{d_2 p_{12}}{p_1'} + (d_1 - \tau_1) \cdot \frac{d_1 (p_{11} + p_{13})}{p_1'} \right] - \eta$$

셋째로, E 는 샘플과 하나의 항목을 취하는데 걸리는 시간이고, n 개의 항목에 대하여 샘플과 관리도를 분석하는데 걸리는 기대시간 $E\{T_3\}$ 는 nE 가 된다.

마지막으로, 이상원인을 발견하고 공정에 조치를 취하는데 걸리는 기대시간 $E\{T_4\}$ 는 $T_1 + T_2$ 이다. 그러므로 한 주기동안 기대주기시간 $E\{T\}$ 은 식 (13)과 같이 나타내어진다.

$$E[T] = 1/\lambda + (1-r_1)P\{z_{RL} < L\} \cdot sT_0 + TT + ATS_1 + nE + T_1 + T_2 \dots \dots \dots (13)$$

공정의 주기당 총비용은 ① 공정이 관리상태에 있는 동안 소요되는 평균비용 C_a , ② 공정이 이상상태에 있는 동안 소요되는 평균비용 C_b , ③ 허위경보에 소요되는 평균비용 C_c , ④ 공정의 이상원인을 교정하는데 소요되는 평균비용 C_d , ⑤ 샘플링에 소요된 평균비용 C_e 와 같이 구분하여 그 합으로 구해진다.

첫째, 공정이 관리상태에 있는 동안 소요되는 평균비용은 공정이 관리상태에 있는 동안의 평균시간($1/\lambda$)에 관리상태에 있는 동안 소요되는 평균비용 C_a 는 시간당 품질비용의 곱으로써 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$C_a = C_0/\lambda \dots \dots \dots (14)$$

둘째, 공정이 이상상태에 있는 동안 소요되는 평균비용은 이상상태의 신호가 발생하기까지의 기대시간 $E[T_2] = TT + ATS_1$ 와 n 개의 항목에 대하여 샘플과 관리도를 분석하는데 걸리는 기대시간 $E[T_3] = nE$ 와 이상원인을 발견하고 공정을 교정하는데 걸리는 기대시간 $E[T_4] = r_1T_1 + r_2T_2$ 의 합에 의하여 공정이 이상상태에 있는 동안 소요되는 평균비용 C_b 는 시간당 품질비용의 곱으로써 식 (15)와 같이 나타낸다.

$$C_b = C_1(TT + ATS_1 + nE + r_1T_1 + r_2T_2) \dots \dots \dots (15)$$

셋째, 허위경보에 소요되는 평균 비용 C_c 는 허위경보당 비용 Y 에 관리상태 동안 취해지는 샘플의 기대수와 허위 경보의 평균수를 곱함으로써 식 (16)으로 나타낼 수 있다.

$$C_c = P\{CRL < L\} \cdot sY \dots \dots \dots (16)$$

넷째, 공정의 이상원인에 대한 조치를 취하는데 소요되는 평균비용 C_d 는 W 로 나타낼 수 있다.

$$C_d = W$$

다섯째, 샘플링에 소요되는 평균비용 C_e 는 VSI \bar{X} 관리도에서 소요되는 샘플링 비용과 CRL 관리도에서 소요되는 샘플링 비용으로 나누어 구하면 식 (17)과 같다.

$$C_e = (a + bn)s + \left(\frac{a + bn}{\eta} \right)$$

$$\begin{aligned} & \times \{TT + ATS_1 + nE + r_1T_1 + r_2T_2\} \\ & = (a_1 + b_1n)s + \left[(a_1 + b_1n) / \left(d_2 \cdot \frac{p_{12}}{p_1} + d_1 \frac{p_{11}}{p_1} \right) + (a_2 + b_2n) / \left(d_1 \frac{p_{13}}{p_1} \right) \right] \\ & \times \{TT + ATS_1 + nE + r_1T_1 + r_2T_2\} \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

그러므로 한 주기당 소요되는 총 품질비용은 $C_a + C_b + C_c + C_d + C_e$ 가 된다. 따라서 주기당 총기대비용 $E[C]$ 는 식 (18)과 같다.

$$E[C] = \frac{C_a + C_b + C_c + C_d + C_e}{E[T]} \dots \dots \dots (18)$$

경제적 설계의 주된 목적은 식 (18)을 최소화하기 위한 설계모수들을 찾는 것이다.

3. 수치실험 및 수행도 평가

본 연구에서는 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 경제적 최적 모수 설계를 위하여 다음의 비용모수와 공정모수를 가지는 수치예제를 사용하였다.

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.02 & Y &= 977.40 & W &= 977.40 & a_1 &= 0.0 & b_1 &= 4.22 \\ C_0 &= 114.24 & C_1 &= 949.20 & E &= 0.1 & a_2 &= b_2 = 0.0 & T_0 &= 0.1 \\ T_1 &= 0.1 & T_2 &= 0.9 & \gamma_1 &= 1 & \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

공정변화는 $\delta = 0.5\sigma \sim 3.0\sigma$ 로 변화시켰고, 이때 식 (18)의 비용함수를 최소화 하는 L, n, k, k', d_1, d_2 를 구하여 <Table 1>에 나타내었다.

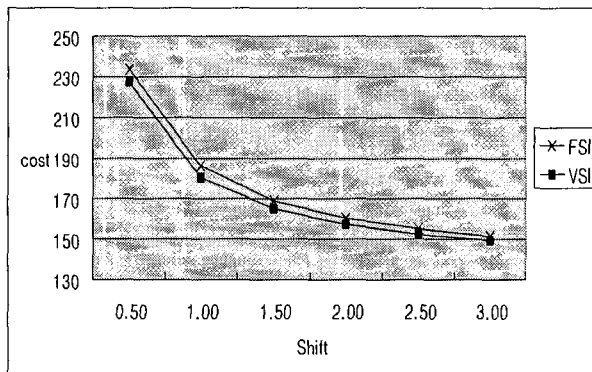
<Table 1> Optimal economic design of VSI \bar{X} -CRL control chart various shift

shift (δ)	optimum vector (L, n, k, k', d_1, d_2)	cost of FSI	cost of VSI
0.5	5, 11, 1.945, 0.938, .100, 2.235,	233.594	227.613
1.0	5, 4, 2.239, 0.974, 0.10, 1.397	186.150	180.491
1.5	4, 3, 2.425, 1.244, 0.10, 1.252	169.010	164.867
2.0	3, 2, 2.478, 1.349, 0.10, 1.028	160.158	157.063
2.5	4, 1, 2.482, 0.963, 0.10, 1.010	155.275	152.626
3.0	3, 1, 2.560, 1.238, 0.10, 1.010	151.360	149.649

<Table 1>의 결과에서 볼 수 있듯이 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도의 경제적 최적모수는 공정평균의 이동 크기에 따라 달라지고, 공정평균의 이동이 $\delta = 1.0\sigma$ 인 경우에는 $L = 5$, $n = 4$ 에서 비용이 최소가 된다. 이때 CRL/S 관리도의 관리한계는 $k = 2.239$, $k' = 0.974$ 가 되고, 샘플링 구간은 $d_1 = 0.10$, $d_2 = 1.397$ 로 결정된다.

<Table 1>에서 FSI \bar{X} -CRL 합성 관리도는 $\delta = 1.0\sigma$ 인 경우에 $L = 3$, $n = 6$, $k = 1.965$, $d = 1.456$ 으로 최적모수가 결정되고, 이때 최소 공정주기비용은 186.150이 된다. 즉, 공정평균이 1.0σ 이동한 경우 제안된 관리도가 가지는 관리최저비용 180.491보다 3.04%의 비용 낭비가 발생하게 된다.

공정평균이 증가함에 따라서 최적의 샘플 크기는 점점 감소하며, \bar{X}/S 관리도의 관리한계 L 또한 대체적으로 감소하게 되고, 제안된 VSI \bar{X} -CRL 합성관리도 관리도의 d_1 과 d_2 의 간격은 점점 줄어들게 된다.



<Figure 4> Minimum cost of VSI and FSI \bar{X} -CRL control chart various shift

<Figure 4>는 공정평균 이동에 대하여 FSI와 VSI \bar{X} -CRL 관리도의 비용변화를 그림으로 도시한 것이다. 다양한 환경에서 VSI \bar{X} -CRL 관리도의 경제적 모수설계를 위하여, 비용모수와 공정에 관한 모수들을 변화시켜가면서 비용이 최소가 되는 관리도의 모수를 설정하는 것이 필요하다. 따라서 각 모수의 변화를 조합하여 <Table 2>와 같이 20가지의 경우에 대하여 실험하였다.

<Table 2>의 모수조합에 대한 실험결과를 $\delta = 0.5$ 인 경우에 <Table 3>에 나타내었고, <Table 4>는 $\delta = 1.0$ 인 경우에 경제인 관리도의 최적모수이다. IR(increase ratio)은 증가비율을 나타내고, DR(decrease ratio)은 감소율을 나타낸다.

<Table 3>과 <Table 4>의 결과를 분석하면, 먼저 이상원인이 발생할 확률인 지수분포의 모수 λ 를 증가시키

에 따라서 이상원인이 발생할 확률이 증가하게 되어 비용이 점차적으로 증가하는 경향을 보이고 있다. 그리고 각 관리도의 관리한계선은 그다지 큰 영향을 받지 않는 것으로 나타났다.

<Table 2> Input parameter for economic design

No	λ	Y	C_1	E	T_0	T_1	a_1	b_1	r_1	r_2
1	0.01	977.40	949.20	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	1	0
2	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	1	0
3	0.03	977.40	949.20	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	1	0
4	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	0.9	0.0	10.0	1	0
5	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	0.9	1.0	5.0	1	0
6	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	0.9	1.0	10.0	1	0
7	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	0.9	5.0	5.0	1	0
8	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	0.9	5.0	10.0	1	0
9	0.02	500.00	949.20	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	1	0
10	0.02	1000.0	949.20	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	1	0
11	0.02	2000.0	949.20	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	1	0
12	0.02	977.40	500.00	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	1	0
13	0.02	977.40	1000.0	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	1	0
14	0.02	977.40	2000.0	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	1	0
15	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	0.5	0.0	4.22	1	0
16	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	1.0	0.0	4.22	1	0
17	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	1.5	0.0	4.22	1	0
18	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	0	0
19	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	0	1
20	0.02	977.40	949.20	0.1	0.1	0.9	0.0	4.22	1	1

그러나 샘플링 간격 d , d_1 , d_2 로, 제안된 경제적 관리도는 λ 의 증가에 대하여 이상원인을 발견하기 위한 시간을 점점 줄이기 위하여 샘플링 간격을 짧게 만든다.

또한 공정 평균이동이 $\delta = 0.5\sigma$ 에 비하여 공정평균의 이동이 큰 $\delta = 1.0\sigma$ 인 경우에는 같은 λ 에 대하여 관리한계의 폭은 넓어지고 샘플링 간격은 상대적으로 짧게 나타난다는 것을 알 수 있다.

샘플당 고정비용 a 와 샘플링 된 부품당 비용 b 를 변화시키는 경우, 각 관리도의 모수 변화를 살펴보면 \bar{X}/S 관리도의 최적 관리모수 L 값은 FSI \bar{X} -CRL 합성 관리도는 3으로써 일정하게 나타났으나, VSI \bar{X} -CRL 합성 관리도는 2~4 사이로 나타났다. 샘플 크기 n 값은 5 또

는 6에서 결정나는 것으로 나타났다.

신호가 허위경보일 때 조사하는데 소요되는 기대 시간 T_0 와 공정 변화를 교정하는데 소요되는 기대시간 T_2 를 변화시켜감에 따라 비용이 변화는 되는 것을 보기 위하여 구하였다. 비용모수 T_0 를 증가시키더라도 비용에는 큰 영향을 미치지 않는다는 사실을 알 수 있었고, 공정이 교정하는데 소요되는 기대 시간 T_2 가 증가됨에 따라 두 관리도 모두 비용이 감소됨을 알 수 있었다.

<Table 3> Optimal solution of VSI \bar{X} -CRL economic design for $\delta=0.5$

No	L	n	k	k'	d_1	d_2	ATS ₀ IR(%)	ATS ₀ DR(%)	Minimal Cost	Cost DF (%)
1	5	12	1.964	0.976	0.100	3.266	44.680	40.540	189.009	2.002
2	5	11	1.945	0.938	0.100	2.234	45.139	37.806	227.613	2.439
3	4	10	1.873	0.907	0.100	1.761	36.039	34.672	258.876	2.597
4	4	10	1.573	0.942	1.012	3.298	18.163	20.348	257.084	0.662
5	4	11	1.852	0.962	0.100	2.472	42.941	36.911	233.684	1.898
6	4	10	1.586	0.940	1.063	3.315	17.182	19.748	258.477	0.232
7	4	11	1.838	0.970	0.100	2.561	42.698	36.347	236.026	1.586
8	5	10	1.656	0.957	0.825	3.356	23.920	22.397	259.002	0.453
9	4	9	1.725	0.934	0.100	1.968	39.662	29.978	222.081	1.154
10	5	11	1.950	0.936	0.100	2.235	45.167	37.898	227.78	2.489
11	5	12	2.089	0.920	0.100	2.374	40.887	42.446	232.845	3.815
12	4	12	1.896	1.008	0.100	3.583	42.399	40.013	191.613	1.005
13	5	11	1.945	0.936	0.100	2.167	86.351	37.740	231.172	2.546
14	5	9	1.912	0.856	0.100	1.283	37.216	30.283	290.832	3.811
15	5	11	1.945	0.938	0.100	2.237	45.140	37.809	229.287	2.434
16	5	11	1.945	0.938	0.100	2.234	45.138	37.816	227.198	2.441
17	5	11	1.945	0.938	0.100	2.231	45.136	37.813	225.147	2.447
18	5	11	1.941	0.939	0.100	2.230	45.132	37.715	225.649	2.413
19	5	11	1.938	0.941	0.100	2.268	45.116	37.883	241.775	2.176
20	5	11	1.942	0.939	0.100	2.273	45.127	37.963	243.748	2.205

허위경보당 드는 비용 Y 와 이상상태에 있는 동안 생산되는 시간당 품질비용 C_1 를 변화시키는 경우 두 관리도 모두 비용모수가 증가됨에 따라 총비용이 증가됨과 동시에 비용이 클 수록 VSI \bar{X} -CRL 합성 관리도의 비용 감소효율이 증가되고 있음을 보이고 있다.

<Table 4> Optimal solution of VSI \bar{X} -CRL economic design for $\delta=1.0$

No	L	n	k	k'	d_1	d_2	ATS ₀ IR(%)	ATS ₀ DR(%)	Minimal Cost	Cost DF (%)
1	4	5	2.203	1.095	0.100	2.220	44.142	57.058	156.368	2.616
2	5	4	2.245	1.098	0.100	1.829	35.331	49.749	180.491	3.040
3	5	4	2.228	0.968	0.100	1.075	33.561	48.600	200.857	3.479
4	2	4	1.877	1.041	0.100	2.172	42.443	48.266	199.919	1.692
5	5	4	2.208	0.989	0.100	1.556	37.700	49.979	184.463	2.714
6	5	4	2.103	1.040	0.100	2.167	52.636	48.953	199.642	2.050
7	4	5	2.188	1.121	0.100	1.897	58.746	54.770	187.384	2.348
8	4	4	2.034	1.053	0.100	2.277	37.665	49.620	202.092	1.629
9	5	3	2.075	0.890	0.100	1.610	16.414	39.327	179.611	1.775
10	4	4	2.192	0.975	0.100	1.403	33.771	49.589	180.595	2.984
11	5	5	2.399	1.058	0.100	1.600	49.634	57.691	182.026	3.854
12	4	5	2.459	1.116	0.100	2.375	60.159	57.216	162.292	1.844
13	5	4	2.238	0.973	0.100	1.356	36.111	49.458	182.271	3.098
14	5	4	2.210	0.912	0.100	1.010	45.278	44.325	212.578	4.394
15	4	5	2.238	1.174	0.100	4.231	84.446	40.731	181.870	2.983
16	4	5	2.238	1.173	0.100	4.205	84.383	43.393	180.442	2.831
17	4	5	2.235	1.172	0.100	4.179	84.311	43.538	178.462	2.944
18	4	5	1.885	1.057	0.100	1.623	38.457	54.396	181.220	1.641
19	4	5	1.883	1.059	0.100	1.650	38.937	54.603	197.851	1.392
20	4	5	1.887	1.058	0.100	1.654	38.990	54.655	199.754	1.383

4. 결 론

관리도에 관한 연구는 공정변화를 보다 잘 감지할 수 있는 관리도의 개발에 주안점을 두고 있다.

특히 최근에는 통계적 접근법과 더불어 경제적 접근법으로 관리모수를 설정하여 공정관리 메카니즘을 사용하는데 있어서 최소의 비용을 가지도록 하여 품질 향상 비용을 절감시킬 수 있는 일반적인 기준을 제시하는데 그 목적이 있다.

본 연구에서는 통계적으로 그 우수성이 증명된 VSI \bar{X} -CRL 합성 관리도에 비용적 측면에서 관리도 설계모수를 고려함으로써 관리도의 선택부분에 있어서도 그 효율성을 제공하게 되었다. 또한 제안된 비용함수에 현

장에서 사용되는 비용모수들을 적용함으로써 경제적으로 최적인 관리모수를 설정하는데 어려움이 없을 것이다.

본 연구와 관련하여 추후 과제는 다중 이상원인에 관한 관리모수의 최적설계, 통계적 최적 모형과 경제적 최적 모형을 함께 고려한 통계적 경제적 관리도의 설계가 기대되며, 보다 효율적인 최적화 알고리즘에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] 송서일, 박현규; “가변추출기법을 이용한 합성관리도의 개발”, 한국품질경영학회지, 33(1) : pp. 1-10, 2005.
- [2] 임태진, 김용덕; “합성관리도의 경제적 설계”, 한국품질경영학회지, 31(2) : 117-130, 2003.
- [3] Albin, S. L., Kang, L. and Shea, G., “An \bar{X} and EWMA Chart for Individual Observations”, Journal of Quality Technology, 29 : pp. 41-48, 1997.
- [4] Calzada, M. E. and Scariano, S. M., “The Robustness of the Synthetic Control Chart to Non-Normality”, Communications in Statistics Simulation and Computation, 20(2) : pp. 311-326, 2001.
- [5] Champ, C. W. and Woodall, W. H., “Exact Results for Shewhart Control Chart with Supplementary Runs Rules,” Technometrics ,29 : pp. 398-399, 1987.
- [6] Chiu, W. k., and G. B. Wetherill., “A Simplified Scheme for the Economic Design of \bar{X} charts”, Journal of Quality Technology, 6 : pp. 166-171, 1977.
- [7] Duncan, A. J., “The Economic Design of \bar{X} -Charts When There is a Multiplicity of Assignable Causes”, Journal of the American Statistical Association, 66(33) : pp. 107-121, 1971.
- [8] Lorenzen, J. M. and Vance, L. C., “The Economic Design of Control Charts : A Unified Approach”, Technometrics, 28 : pp 3-10, 1986.
- [9] Montgomery, D. C., “Statistically Constrained Economic Design of the EWMA Control Chart”, Journal of Quality Technology, 27(3) pp. 250-256, 1995.
- [10] Ncube M. M., “An Exponentially Weighted Moving Average Combined Shewhart Cumulative Score Control Procedure”, International Journal of Quality and Reliability Management, 7 : pp. 29-35, 1990.
- [11] Nelson, L, S., “The Shewhart Control Chart-Tests for Special Causes”, Journal of Quality Technology, 16 : pp. 237-239, 1984.
- [12] Shamma, W. e. and Shamma, A. K., “Development and Evaluation of Control Charts Using Double Exponentilly Weighted Moving Averages”, International Journal of Quality and Reliability Management, 7 : pp. 18-25, 1992.
- [13] Wu, Z., Yeo, S. H. and Spedding, T. A. “A Synthetic Control Chart for Detecting Fraction Nonconforming Increases”, Journal of Quality Technology, 33(1) : pp. 104-111, 2001.
- [14] Zhang, W. and Trevor A. S., “A Synthetic Control Chart for Detecting Small Shifts in the Process Mean”, Journal of Quality Technology, 32 : pp. 32-38, 2000.