대한수학교육학회지 <학교수학> 제 7 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.7, No.2, 123-137. Jun 2005

순열 조합 문장제의 문제 변인과 오류 분석

이 지 현* · 이 정 연** · 최 영 기***

순열 조합의 문제는 내재된 의미 구조에 의해 선택, 분배, 분할의 세 가지의 유형으로 분류될 수 있다. 본 연구에서는 순열 조합의 연산과 문제 유형의 변인이 문제의 난이도에 미치는 영향을 분석하였다. 그리고 문제 이해과정에서의 오류를 순서, 중복, 대상의 구별, 같은 것이 있는 순열, 상자의 구별, 분할의 조건, 기타로 분류하고 이해 단계의 장애를 구체적으로 분석하였다. 연구 결과, 순열 조합 연산과 문제의 유형은 난이도에 유의미한 영향을 미치는 것으로 나타났다. 특히 학생들에게 선택, 분할, 분배 문제간의 변환은 쉽지 않으며 순열 조합의 문제에서 학생들이 겪는 어려움 중 하나는 바로 문제 유형의 차이에서 비롯된다는 것을 알 수 있었다. 또한 현 교과서에서는 선택, 분배, 분할을 고려한 다양한 문제 유형이 부족한 것으로 나타났다. 따라서 순열 조합의 지도에 있어 문제 유형을 활용하여 다양한 의미 구조의 문제를 제시하고, 공식위주가 아닌 문제 상황을 충분히 이해하고 이에 대한 해법을 변형, 확장하는 경험을 강조하는 것이 필요하다고 하겠다.

I. 서 론

학교 수학에서 다루고 있는 조합론의 분야는 경우의 수와 순열과 조합이다. 이 단원은 교사들에게도 다루기 힘든 분야임에도 불구하고 학교 수학에서의 교육적인 관심은 그리 많지 않았으며, 이 분야의 문제 해결에 대한 실증적인 연구도 부족한 형편이다. 문제 해결 연구에서는 문제 변인을 정의하고 이를 바탕으로 문제 해결 행동을 체계적으로 분석하는 것이 기본적인 부분이다(Kulm, 1984).

그러므로 순열 조합 문제의 변인과 문제 해결 과정의 오류를 실증적인 자료를 통하여 분석하는 것은 의미가 있다고 하겠다.

Fischbein과 Gazit(1998)는 순열 조합 문제에서 여러 가지 순열과 조합의 연산, 문제 상황에 제시된 대상의 종류, 변수 값의 크기 등의 변인이 난이도에 미치는 영향을 연구하여, 학습 전에는 조합을 사용하는 문제에서 가장 정답률이 높고 순열에서 낮았으나 학습 후에는 반대로 순열의 정답률이 가장 높았고 조합이 더 낮았으며, 문제 상황이 사물이나 사람으로 제시된 경우 보다는 숫자로 제시된 경우에 정답률이 더 높았다는 결과를 얻었다.

Dubois(1984)는 순열 조합 문제를 문제 내에 포함된 행위인 선택(selection), 분배(distribution), 분할(partition)의 세 가지 유형으로 분류하였으

* 서울 중화고(leeji_hyun@hanmail.net)
** 서울대 대학원(khskme@hanmail.net)
*** 서울대학교(yochoi@snu.ac.kr)

며 Batanero, Navarro-Pelayo, Godino(1997a)는 Dubois(1984)의 문제 유형이 문제의 해결에 미치는 영향을 분석하였다. 연구 결과 문제의 유형은 Fischbein과 Gazit(1988)가 연구한 변인들과 함께 난이도에 영향이 있는 것으로 나타났으며, 이것은 오류의 유형과도 관련이 있는 것으로 나타났다.

Dubois(1984)와 같은 문제에 내재된 의미구조에 의한 문제 유형의 분류는 주로 초보적인 산술 문장제 연구에서 많이 진행되었다. 특히 같은 산술 연산의 문제일지라도 서로 다른 의미 유형으로 제시할 수 있으며, 의미 유형에 따라서 문제해결의 성공률도 다르게 나타났다(현주, 1990). 또한 아동들은 문제에 포함되어 있는 행위나 상황을 그대로 모방하는 전략부터 시작하기 때문에 문제 내에 포함되어 있는 행위에 따라 해결 전략도 달라진다(김경철, 1995에서 재인용).

따라서 산술 문장제의 의미 구조에 대한 연구는 순열 조합 문장제의 의미 구조에 대한 연구의 가능성을 보여준다고 하겠다.

본 논문에서는 순열 조합의 연산과 문제 유형이 난이도에 미치는 영향을 분석하였다. 또한 문제 이해과정의 오류를 분류하였다. 이를 위해 고등학교 2학년 자연계열 학생들을 대상으로 Batanero등의(1997a) 연구에서 사용한 문항을 재구성하여 조사하였다.

이 논문의 구체적인 연구 질문은 다음과 같다.

(1) 순열, 중복순열, 조합 등의 연산에 따라 난이도에 어떠한 차이가 있는가?

(2) 분배, 선택, 분할 문제 유형에 따라 난이도에 어떠한 차이가 있는가?

(3) 순열 조합 문장제의 이해과정에서 범하는 오류는 어떤 것이 있는가?

II. 순열 조합 문장제의 유형

1. 문제의 유형

조합론에서 세는 것(counting)에 대한 수학적인 상황은 선택, 분배, 분할 모델로 나누어 볼 수 있으며, Batanero등(1997b)은 이에 따른 문장제의 유형을 다음과 같이 설명하고 있다.

선택 문제 (Selection model)

선택 문제는 n개의 사물들 중에서 r개를 택하는 것이다.

(예시) 상자에 각각 2, 4, 7이 적힌 세 개의 공이 들어있다. 공을 하나씩 꺼내서 숫자를 적어 세 자리 자연수를 만든다. 만들 수 있는 세 자리 자연수는 모두 몇 가지인가?

선택 문제로 해석될 수 있는 표현은 위 문제 상황의 '꺼내다' 외에 '선택하다', '뽑다' 등이 있다.

분배 문제 (Distribution model)

분배 문제는 r개의 사물들을 n개의 상자(cell) 또는 자리(위치)에 분배하거나 배치, 배열하는 것이다. 이 경우의 수는 결국 r개의 사물들(정의역)에서 n개의 상자(공역)로의 함수의 개수와 같다. 따라서 분배 문제에서 세고자 하는 경우의 수는 사물의 여러 가지 분배, 배치, 배열 가능성이나 두 집합 사이의 함수의 개수이다.

(예시) 똑같은 연필 3개를 빨강색, 노랑색, 파랑색, 초록색 4개의 필통에 넣고 싶다. 한 필통에 연필을 하나씩만 넣는다면, 연필들을 넣는 방법은 모두 몇 가지인가?

이 문항은 3개의 연필을 4개의 필통에 넣는 상황이므로 분배문제가 된다. 그 외에 분배 문제임을 알 수 있는 것은 '넣다', '배정하다', '분배하다', '배열하다', '나열하다'등이 있다.

분할 문제 (Partition model)

분할 문제는 r개의 사물들을 n개의 부분집합으로 나누는 것이다.

(예시) 1부터 4까지의 숫자가 적힌 네 장의 우표를 갑과 을이 각각 두 장씩 나누어 가지는 방법은 모두 몇 가지인가?

r개의 사물들을 n개의 부분집합으로 나누는 분할 문제는 r개의 사물들을 n개의 상자에 넣는 분배 문제에서 상자를 무시하고 사물들이나누어진 결과만 보는 것과 같다. 따라서 분배 문제와 분할 문제 사이에는 일대일 대응이 존재한다.

2. 교과서의 문제 유형과 공식 제시 방법

교과서에서 문제 유형이 어떻게 나타나는지 7차 교육과정 고등학교 수 I 교과서 3권을 임의로 선정하여 조사하였다. '순열과 조합' 단원 본문의 총 46문항을 다음과 같이 선택, 분배, 분할, 선택+분배 문제로 분류하였다<표Ⅱ-1>.

<표Ⅱ-2>는 문항 분류 결과이다. 분배 문제가 가장 많았고(45.7%), 선택 문제(28.3%), 선택+분배 문제(17.4%), 분할 문제(8.7%)순으로 나타났다. 특히 분할 문제는 불과 4문제에 불과하여 교과서의 문제 유형은 분배 또는 선택 문제 유형에 집중되어 있었다. 각 연산의 경우,

<표Ⅱ-1> 교과서의 분석틀 예시

문제 유형	예시 (주요어)
분배	다음 6개의 바둑돌을 한 줄로 배열하는 방법의 수를 구하여라. (1) 3개의 흰 돌과 3개의 검은 돌 (이강섭외, 2002, p. 198) (주요어) 배열하다, 일렬로 나열하다, (사람이 줄)서다, 가입하다, 배정하다, 넣다
선택	30명의 학생 중에서 2명의 임원을 뽑는 방법의 수를 구하여라. (박규홍외, 2002, p. 229) (주요어) 뽑다, 선출하다, 투표하다
분할	은영이는 9명의 친구들과 함께 양로원에 봉사 활동을 하러가기로 하였다. 10명 중 2명은 빨래를 하고, 3명은 청소를 하며, 5명은 할아버지와 할머니를 목욕시켜 드리기로 할 때, 역할을 나누는 방법은 몇 가지인가? (임재훈외, 2003, p. 241) (주요어) 나누다, (역할을) 나누다, 묶다
선택+분배	0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자 중에서 서로 다른 네 개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 수는 모두 몇 개인가? (임재훈 외, 2003, p. 233)

주. 교과서에 제시된 문제들은 공식을 한번만 적용해서 풀 수 있는 문제들을 대상으로 조사하였다.

<표Ⅱ-2> 교과서 문제 유형 분석 결과

순열 조합 공식 \ 문제의 유형	분배	선택	분할	선택+분배	계
${}_nP_n=n!$	8	-	-	-	8
${}_nP_r$	-	3	-	2	5
중복 순열	3	3	-	6	12
같은 것이 있는 순열	8	-	-	-	8
조합	2	7	4	-	13
문항 계	21 (45.7%)	13 (28.3%)	4(8.7%)	8(17.4%)	46

순열 (${}_{n}P_{n}=n!$)과 같은 것이 있는 순열 문제는 모두 분배 문제 유형이었으며, 분할 문제는 모두 조합(${}_{n}C_{r}$)에서만 나타났다.

순열과 조합 등의 여러 공식에 대한 교과서의 설명을 문제 유형의 분류와 관련지어 분석하였다. 교과서마다 이러한 설명 방식은 큰 차이가 없어 그 중 한 교과서의 설명 방식을 정리하였다<표Ⅱ-3>. 순열과 중복 순열은 선택+분배로, 같은 것이 있는 순열은 분배 유형으로 설명하고 있음을 알 수 있다. 또한 조합은 선택 유형으로 설명하고 있다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 검사도구

본 연구에서 사용한 지필 검사도구는 Batanero 등(1997a)의 연구에서 사용한 문항을 토대로 3차례의 예비 조사 결과를 검토하고 수정하여 사용하였다.

<표Ⅲ-1>에 각 문항에 포함된 문제 변인을 제시하였으며, 검사 문항은 <부록1>에 제시하였다.

<표 Ⅱ-3> 교과서의 순열 조합 공식

문제 유형	정의 설명
선택+분배	n개의 서로 다른 원소에서 n개 모두를 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는 다음과 같다. ${}_{n}P_{n}=n(n-1)(n-2)\cdot\cdot\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!$
	서로 다른 n 개에서 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_{n}P_{r}=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\cdot\cdot(n-r+1)$
	서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 뽑아 일렬로 배열하는 중복 순열의 수는 ${}_{n}\Pi_{r}=n^{r}$
분배	n개 중에 서로 같은 것이 각각 p개, q개, r개, …, s개씩 들어 있을 때, 이들을 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는 $\dfrac{n!}{p!q!r!\cdot\cdot\cdot s!}$ $(p+q+r+\cdot\cdot\cdot+s=n)$
선택	서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_{n}C_{r}=\dfrac{{}_{n}P_{r}}{r!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-r+1\ )}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ $(0<r\leq n)$

주. "고등학교 수학 Ⅰ(p.231-241)", 임재훈, 이경화, 김진호, 윤오영, 반용호, 조동석, 이휘종, 박수연, 한명주, 2003, 서울: (주)두산

<표 Ⅲ-1> 검사 도구

연산 \ 문제의 유형	분배		선택		분할	
조 합	${}_{4}C_{3}$	(3번)	${}_{5}C_{3}$	(8번)	${}_{4}C_{2}$	(10번)
같은 것이 있는 순열	$\dfrac{5!}{3!1!1!}$	(12번)	$\dfrac{4!}{2!1!1!}$	(2번)	$\dfrac{4!}{2!1!1!}$	(7번)
중복순열	${}_{2}\Pi_{4}$	(6번)	${}_{4}\Pi_{3}$	(11번)	${}_{3}\Pi_{4}$	(4번)
순열(${}_{n}P_{n}$)	4!	(1번)	3!	(5번)	—	
순열(${}_{n}P_{r}$)	${}_{5}P_{3}$	(9번)	${}_{4}P_{3}$	(13번)		

문제 변인

(1) 순열 조합의 연산: 조합, 같은 것이 있는 순열, 중복순열, $_nP_n$, $_nP_r$

(2) 문제의 유형: 선택 문제, 분배 문제, 분할 문제

문제 제시 순서는 문제의 유형과 순열 조합 연산이 집중되지 않도록 고려하였고, 문제 제시 순서로 인한 영향을 배제하기 위해 제시 순서가 정반대인 홀수형과 짝수형을 사용하여 홀수 번 학생은 홀수형을, 짝수 번 학생은 짝수형을 풀도록 하였다.

2. 연구 대상과 자료 수집 및 분석 방법

2003년 11월 서울시 소재 3개 인문계 고등학교의 2학년 수학 I 의 "순열과 조합" 단원을 이미 학습한 자연 계열의 남, 여학생 339명이 지필검사에 참여하였다. 지필검사는 담당 교사의 동의를 얻어 정규 수업시간에 약 45분간 진행하였다. 검사 후 대표적이거나 특이한 반응 혹은 오류를 보인 17명의 학생들을 선정하여 문제 해결과정에 대한 인터뷰를 실시하였다. 지필 검사는 가채점 결과를 바탕으로 먼저 문제에서 세도록 요구하는 것을 정확히 이해했는지를 정답, 오답, 알 수 없음으로 나누고, 특히 문제의 이해에서 실패한 경우는 그 유형을 분류하였다. 그 다음 문제를 정확히 이해한 것으로 판단되는 학생들의 해결 전략을 공식, 수형도, 열거하기, 합의 법칙 · 곱의 법칙으로 분류하였고, 최종적으로 정답은 1, 정답 외의 기타 오답은 0으로 코딩하였다.

3. 지필검사 결과

학생들의 평균 점수는 8.17점(백점환산 62.85점)이고, 표준 편차는 3.24로 나타났다. 남학생의 평균점수(7.1점)보다 여학생의 평균점수(9.22점)가 높게 나타났으며, T-test결과 유의미한 차이가 있었다 ($t=-6.325$, $df=335$, $p=.000$).반면 질문지 유형(홀수형/짝수형)에서는 T-test결과 차이가 없었다. ($t=-0.345$, $df=336.94$, $p=0.730$)

문제 유형별 정답률과 순열 조합 연산별 정답률은 <표 Ⅲ-2>와 같다. 문제 유형별 정답률은 선택 문제에서 가장 높았고 분할 문제에서 가장 낮아, 선택 문제는 비교적 쉬워하나 분할

<표 Ⅲ-2> 문제 유형-조합 연산별 정답률(%)

연산/문제 유형	분배	선택	분할	연산별 평균 정답률
조 합	55.8 (3번)	71.4 (9번)	56.9 (10번)	61.4
같은 것이 있는 순열	67.3 (12번)	58.1 (2번)	52.5 (7번)	59.3
중복 순열	35.7 (6번)	70.8 (11번)	20.4 (4번)	42.3
순열 ($_nP_n$)	94.4 (1번)	90.0 (5번)	-	92.2
순열 ($_nP_r$)	66.7 (9번)	77.6 (13번)	-	72.1
문제 유형별 평균 정답률	64.0	73.6	43.3	

문제는 어려워함을 알 수 있었다. 연산별 정답률은 순열(${}_nP_n$), 순열(${}_nP_r$), 조합, 같은 것이 있는 순열, 중복순열의 순으로 나타났다. 순열 문제에서는 정답률이 높았으나 조합, 같은 것이 있는 순열, 중복 순열에서는 상대적으로 낮은 정답률을 보였다.

각 연산에서의 문제 유형별 정답률은 연산마다 다른 경향을 보였다. 조합, 순열(${}_nP_r$), 중복 순열에서는 선택 문제에서 정답률이 가장 높았다. 그러나 같은 것이 있는 순열, 순열(${}_nP_n$)은 분배 문제에서 정답률이 가장 높았다. 즉 문제 유형의 상대적인 난이도는 연산에 따라 다르게 나타났다.

위와 같은 결과는 교과서의 문제 유형 분석 결과와 관련성을 찾을 수 있었다. 특히 분할 문제의 낮은 정답률의 원인 중 하나는 교과서에서의 낮은 빈도(8.7%)로 생각된다. 그리고 교과서 설명 방식의 분석 결과 순열과 중복 순열의 정의는 분배와 선택이 혼합된 상황으로 제시되어 있었으며, 정답률도 분배나 선택 문제 유형에서 높게 나타났다. 같은 것이 있는 순열과 조합의 경우도 역시 각각 교과서의 설명 방식인 분배 문제와 선택 문제에서 가장 높은 정답률을 보였다. 따라서 순열 조합 연산에서는 학생들에게 익숙한 문제 유형의 정답률이 높은 경향이 나타남을 알 수 있었다.

Ⅳ. 문제 변인이 난이도에 미치는 영향

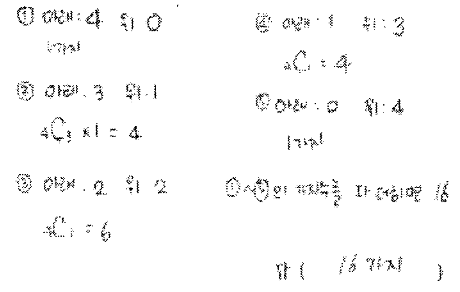
문제의 유형과 순열 조합 연산 변인이 오답률에 미치는 영향을 SAS 통계패키지를 이용하여 반복 측정에 의한 범주형 자료분석(Analysis of repeated categorical data)으로 분석하였다. 반복 요인은 순열과 조합의 연산(5수준)과 문제의 유형(3수준)이며, 종속변인은 각 문항의 오답률이다. 그러나 분할 유형의 순열 2문항이 누락된 불완전한 3×5문항 디자인(13문항)으로 두 변인의 상호작용 중 일부만을 확인할 수 있었다. 카이제곱 적합도 검정 결과, 순열 조합 연산 ($\chi^2=397.58$; $p<0.001$), 문제의 유형 ($\chi^2=239.15$; $p<0.001$), 순열 조합 연산과 문제 유형의 상호작용 ($\chi^2=201.68$; $p<0.001$)이 모두 오답률에 유의미한 영향을 주는 것으로 나타났다(표Ⅳ-1).

<표 Ⅳ-1> 분산 분석 결과

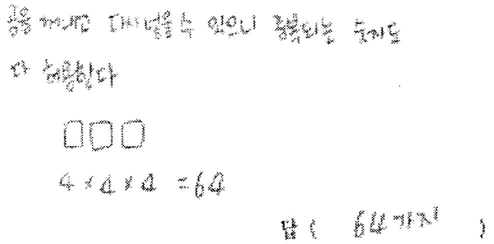
요인	자유도	Chi-Square	Pr > ChiSq
절편	1	844.84	<.0001
연산	4	397.58	<.0001
문제 유형	2	239.15	<.0001
연산×유형	6*	201.68	<.0001
잔차	0	.	.

특히 인터뷰 결과, 같은 연산의 문제이나 문제 유형이 다르면 같은 문제로 보지 못하는 학생을 볼 수 있었다. 다음은 중복 순열 문제인 6번과 11번에 대한 학생(175)의 답안과 인터뷰 중 일부이다[그림 Ⅳ-1, 2].

6번. 네 명을 두개의 방에 배정하는 분배 문제 : ${}_2\Pi_4$



11번. 네 개의 숫자 공을 복원 추출하여 세 자리 수를 만드는 선택 문제 : $_{4}\Pi_{3}$



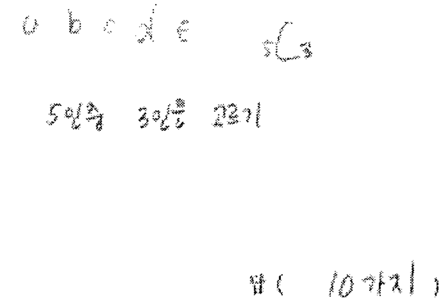
[그림 Ⅳ-1, 2]선택 문제와 분배 문제에서의 해결 전략

연구자 : 6번 이것도 4번처럼 아랫방 윗방으로 나누어서 한 거죠?
학생 : 예 !
연구자 : 그럼 11번은요?
학생 : 11번은 이제 자리 수를 나누어서 일의 자리 십의 자리 백의 자리. 공 네 개가 있는데 일단 중복이 허용되잖아요. 그래서 첫 번째 자리에 나올 수 있는 수가 4가지, 이것도 네 가지 이것도 네 가지 이렇게 해서 4의 3승.
연구자 : 그럼, 이건 맞는데. 그럼 6번과 11번은 어떤 차이점과 공통점이 있을까?
학생 : 11번에서. 이건 분명히 중복순열이라고 배웠고...
연구자 : 6번은?
학생 : 이건 중복순열이라고 하기에는 사람을 나누는 거니까 중복이 허용되지 않죠.

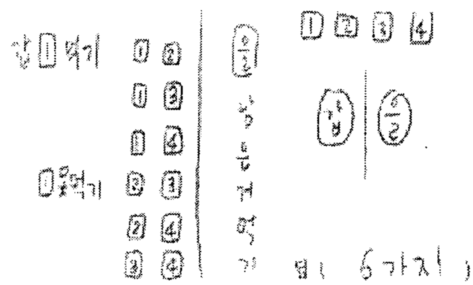
이 학생은 선택 문제(11번)은 중복 순열의 공식을 이용하였으나 분배 문제(6번)에서는 합의 법칙·곱의 법칙으로 해결하였다. 분배 문제에서는 '사람을 나누어야 하므로' 중복이 허용되지 않아 중복 순열이 아니라고 생각하고 있음을 인터뷰에서 알 수 있다. 즉 문제의 상황을 네 명이 두 개의 방을 중복하여 선택할 수 있는 중복 순열 문제로 전환하지 못했기 때문에 공식을 사용할 수 없었다.

따라서 같은 연산의 문제에서도 문제 유형에 따라 다른 전략을 사용하는 경우가 많았다. 많은 학생들이 선택 문제에서는 공식을 사용하면서도 분배나 분할 문제는 열거하기 등 다른 전략을 사용하였다. 다음은 선택 문제(8번)는 조합 공식으로 해결하였으나, 분할 문제(10번)에서는 공식 대신 경우를 나누고 열거하여 해결한 학생(187)의 풀이이다[그림 Ⅳ-3, 4].

8번. 다섯 학생 중 세 명의 학생 고르는 선택 문제 : $_{5}C_{3}$



10번. 네 장의 우표를 두 사람이 나누어 갖는 분할 문제 : $_{4}C_{2}$



[그림 Ⅳ-3, 4] 선택 문제와 분할 문제에서의 해결 전략

Ⅴ. 오류 유형 분석

학생들은 흔히 문제의 진술에서 세어야 하는 경우의 수에 대해 올바르게 고려하지 못하며 문제에 대한 피상적이고 일관되지 못한 이해는 오답의 원인이 되므로, 순열 조합 문제에서는

문제에 대한 이해가 매우 중요하다(Hadar, Hadass, 1981). 순열 조합 문제에 대한 학생들의 이해도를 채점한 결과, 4문항(3, 4, 6, 10번)에서 20%이상의 학생들이 문제의 이해 단계에서 이미 실패하였으며, 1번을 제외한 나머지 문항에서도 10%이상의 학생들이 문제의 이해단계에서 실패하였다(부록2). 문제 이해 과정에서 오류를 범한 경우를 Batanero등의(1997a) 연구를 토대로 다음과 같이 분류하였으며, 문제 이해 과정의 채점 결과와 각 오류 유형별 빈도수는 <부록 2>에 제시하였다 .

1. 순서에 관한 오류

순서가 필요하지 않은 경우에도 순서를 고려하거나 반대로 순서가 반드시 필요한데도 고려하지 않은 경우이다.

10. 4장의 우표를 두 사람이 두 장씩 나누어 가지는 문제

갑 : (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 4), (2,4), (2, 3)
을 : (3, 4), (2, 4), (2 , 3), (1,2), (1,3), (1, 4)
$6 \times 2 = 12$ 가지 (학생 269)

우표를 받는 순서는 관계가 없으나 순서까지 생각하여 2를 더 곱하였다.

2. 중복에 관한 오류

중복이 가능함에도 불구하고 중복 가능성을 고려하지 않는 것처럼 '중복 가능성'에 대해 잘못 고려한 경우가 있었다. 또 다음 예와 같이 '어떤 것이 중복이 허용되는지'를 잘못 고려하기도 하였다.

4. 네 개의 자동차를 세 사람에게 나누어 주는 문제

각 사람에게 줄 수 있는 최대가 4개
$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ 가지

자동차를 받을 수 있는 '사람'이 아니라 '자동차'가 중복될 수 있다고 잘못 생각하였다.

3. 대상의 구별에 관한 오류

구별할 수 없는 대상들을 구별할 수 있는 것처럼 잘못 생각하거나 또는 반대로 생각하는 오류이다.

3. 세 개의 똑같은 연필을 4개의 필통에 넣는 문제

연구자 : 그런데 연필을 왜 이렇게 1, 2, 3이라고 했어?
학생 : 세 개니까요. 한 개, 두 개, 세 개...
연구자 : 그런데 여기서 보면 똑같은 연필 3개라고 했잖아. 그런데 이래도 연필을 1,2,3으로 쓸 수 있다고 생각해?
학생 : 똑같은 거라도 개수로 따지면 세 개니까, 한 개, 두 개, 세 개..
연구자 : 개수로 따지면 세 개니까?... (학생 237, 중략)

이 학생은 '똑같은' 연필이라고 하면서도 세는 과정에서 연필을 습관적으로 1, 2, 3으로 구별하고 있다.

4. 같은 것이 있는 순열에 관한 오류

파란 공 2개, 흰 공 1개, 빨간 공 1개를 배열하는 문제와 같이, 같은 것이 있는 순열에서 같은 것들이 이웃하는 경우만을 고려하는 경우이다.

2. 파란 공 2개, 흰 공 1개, 빨간 공 1개를 배열하는 문제

(파, 파) $\times$ 흰 $\times$빨 $3! \times 2 = 12$ (학생 117)

파란 색 2개를 하나로 묶어 흰 공, 빨간 공과 자리가 바뀌는 경우의 수 3!에 파란 공 2개가

자리가 바뀌는 경우 2가지를 곱하였다. 여기서 같은 파란 공이 이웃하는 경우만 고려하고 있는 것을 알 수 있다.

5. 상자의 구별에 관한 오류 【분배 · 분할 문제】

*n*개의 대상을 *m*개의 상자나 위치에 분배하고 나누는 분배와 분할 문제에서 '상자의 구별 가능성'을 잘못 고려한 경우이다.

10. 4장의 우표를 두 사람이 두 장씩 나누어 가지는 문제
    (1 , 2) (3 , 4)
    (1, 3) (2 , 4)
    (2, 3) (1 , 4) 3가지 (학생 227)

우표를 두 장씩 나누어 놓기만 하고 어느 사람이 우표를 가지게 되는지는 고려하지 않았다.

6. 분할의 조건에 관한 오류 【분배 · 분할 문제】

대상들을 상자들에 '분할하는 조건'을 잘못 이해한 경우로, 문제의 조건에 위배되는 경우와 가능한 유형 중에서 일부만을 생각하는 경우로 나누어 볼 수 있었다.

4. 네 개의 자동차를 세 사람에게 나누어 주는 문제

· 문제 조건에 위배되는 경우

갑이 네 개 中 하나를 고르면
을은 세 개 中 하나를 고르고
병은 두 개 中 고르게 되고, 한 사람에게 모두 줄 수도 있으므로 3가지가 더 있다.
(4×3×2) + 3 = 27 가지 (학생 225)

세 사람에게 자동차를 하나씩 주는 경우를 고려하였다. 그러나 자동차를 세 사람에게 한 대씩 주게 되면 하나가 남게 되므로 문제에서 요구하는 것이 아니다.

· 가능한 유형 중에서 일부만을 고려

1명이 두개의 장난감을 가질 수밖에 없다.
빨 노 → 갑 or 을 or 병
노 파
파 초
빨 초
빨 파
노 초
따라서 3×6 18가지. (학생 228)

세 사람 모두 한대씩은 꼭 받아야 하므로 어느 1명은 반드시 2개를 받아야 한다고 생각하였다. 그러나 이렇게 생각하면 결국 가능한 모든 경우에서 일부만을 생각하게 된다.

7. 기타 오류

앞에서 열거한 오류 유형에 포함되지 않는 문제의 진술을 잘못 해석한 경우와 문제의 변수 값을 잘못 본 경우, 문제의 변수 값을 단순히 곱해서 적어 놓은 반응 등의 문제를 잘 이해하지 못한 경우를 기타로 분류하였다.

문제 이해 과정에서의 오류를 분류해 본 결과, 앞에서 논의한 문제 유형, 순열 조합 연산 변인과도 관련성을 찾을 수 있었다. 조합 문제에서는 '순서', 중복 순열 문제에서는 '중복', 같은 것이 있는 순열에서는 동일한 것이 포함되어 있어 '대상의 구별'에 대해 잘못 이해한 오류가 많았다. 따라서 조합, 중복 순열, 같은 것이 있는 순열 문제의 낮은 정답률의 원인 중 하나는 바로 '순서', '중복', '대상의 구별'에 대한 문제 진술의 이해 부족이라고 할 수 있다.

그리고 특히 분할 문제(4, 10번), 분배 문제

(3, 6번)는 문제 이해도가 낮게 나타났다. 분배 문제는 n개의 대상을 m개의 상자나 위치에 분배하거나 배열하는 것이며, 분할 문제는 n개를 m개의 부분집합으로 분할하는 것이다. 특히 상자의 구별, 분할의 조건에 관한 오류는 분배와 분할 문제의 복잡성을 보여주는 것이라고 할 수 있다.

VI. 결론 및 시사점

본 논문에서 순열 조합 연산과 문제의 유형이 난이도에 미치는 영향을 분석한 결과, 두 변인 모두 난이도에 유의미한 영향을 미치는 것으로 나타났다. 연산별 정답률은 순열, 조합, 같은 것이 있는 순열, 중복 순열 순으로 나타났으며, 문제 유형별 정답률은 선택 문제에서 가장 높았고 분할 문제에서 가장 낮았다. 특히 동일한 연산의 문제라도 문제 유형이 다른 경우에 학생들은 문제를 동일하게 보지 못하였으며 해결 전략도 달라지는 경향이 나타났다. 즉 학생들에게 선택, 분할, 분배 문제간의 변환은 쉽지 않았다. 따라서 순열 조합의 문제에서 학생들이 겪는 어려움 중 하나는 이러한 문제 유형의 차이에서 비롯된다고 할 수 있다.

현 교과서에서는 세는 것(counting)에 대한 수학적인 상황 모델인 선택, 분배, 분할을 고려한 다양한 문제유형이 부족한 것으로 나타났다. 획일적인 교과서의 연습 문제는 '이 문제가 순열일까 아니면 조합일까'를 알아낼만한 키워드만을 찾는 겉핥기식 문제해결 전략을 양산할 뿐이다. 따라서 문제의 유형을 적극적으로 활용하여 다양한 의미 구조의 문제를 제시할 필요가 있다. 예를 들면 하나의 순열 문제를 네 사람을 일렬로 배열하는 경우의 수(분배 문제) 뿐만이 아니라 네 사람에게 네 개의 다른 과일을 하나씩 나누어 주는 방법의 수(분할 문제), 네 사람이 네 개의 다른 과일 중에서 하나씩 선택하는 방법의 수(선택 문제)등으로 다양하게 제시하는 것이 가능하다. 그리고 현 순열과 조합 단원은 공식 중심으로 전개되고 있어 공식을 그대로 대입하여 계산하는 연습에 치중하고 있으나, 그 대안으로 선택, 분배, 분할이라는 수학적인 상황을 중심으로 단원을 전개하는 방법도 고려할 수 있다.

본 연구에서는 문제 이해 과정에서의 오류를 순서, 중복, 대상의 구별, 같은 것이 있는 순열, 상자의 구별, 분할의 조건, 기타로 분류하였다. 이와 같은 오류 유형은 순열 조합의 문제를 이해한다는 것이 결코 쉬운 과정이 아니며 그 과정에서의 가능한 장애를 구체적으로 보여준다. 따라서 교사들은 순열 조합 문제를 제시할 때, 이 문제가 학생들에게 어떻게 이해될 수 있는지를 고민해 보는 것이 필요하다.

순열이나 조합의 개념을 이해한다는 것은 그 공식을 단순히 재생산하는 것이 아니다. 주어진 문제 상황에 대한 해법을 다른 문제로 변형하거나 확장하는 것이 학생들에게는 어렵다는 것을 연구 결과 알 수 있었다. 그러므로 공식 위주의 교육에서 벗어나, 문제 상황을 충분히 이해하고 이에 대한 해법을 변형하고 확장시키는 경험을 강조하는 순열과 조합 지도가 요청된다.

참고문헌

김경철(1995). 덧셈 ·뺄셈 문장제 지도를 위한 이론적 고찰. **학생생활연구**, **21**, 105-127

박규홍 · 임성근 · 양지청 · 김수영 · 남기수 · 양기수(2003). **고등학교 수학 I**. 서울: 교학사

현주(1990). **아동의 산수문장제 해결능력 발달에 관한 연구**. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

이강섭 · 허민 · 김수환 · 이정례 · 임영훈 · 왕규채 · 송교식(2002). **고등학교 수학 I**. 서울: 지학사

임재훈 · 이경화 · 김진호 · 윤오영 · 반용호 · 조동석 · 이휘종 · 박수연 · 한명주 · 남승진(2003). **고등학교 수학 I**. 서울: (주)두산

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. (1997a). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning of secondary school students. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 181-199.

Batanero, C., Godino, J, & Navarro V. (1997b). Assessing combinatorial reasoning. In I. Gal & J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. e I.O.S. Press.

Dubois, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples [A systematic for simple combinatorial configurations]. *Educational Studies in Mathematics, 15,* 37-57.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt fr Didaktitk der Mathematik: 5.* 193-198.

Hadar, N., & Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 435-443.

Kulm, G. (1984). The classification of problem-solving research variables. In G. A. Gordin & E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 1-19). Philadelphia: The Franklin Institude press.

Analysis of Variables and Errors of the Combinatorial Problem

Lee, Ji Hyun (Jung-Hwa High school)
Lee, Jung Yun (Seoul National University, Graduate school)
Choi, Younggi (Seoul National University)

Elementary combinatorial problem may be classified into three different combinatorial models(selection, distribution, partition). The main goal of this research is to determine the effect of type of combinatorial operation and implicit combinatorial model on problem difficulty. We also classified errors in the understanding combinatorial problem into error of order, repetition, permutation with repetition, confusing the type of object and cell, partition. The analysis of variance of answers from 339 students showed the influence of the implicit combinatorial model and types of combinatorial operations.

As a result of clinical interviews, we particularly noticed that some students were not able to transfer the definition of combinatorial operation when changing the problem to a different combinatorial model.

Moreover, we have analysed textbooks, and we have found that the exercises in these textbooks don't have various types of problems. Therefore when organizing the teaching , it is necessary to pose various types of problems and to emphasize the transition of combinatorial problem into the different models.

* key words : implicit combinatorial model(내재된 순열조합문제의 모형), combinatorial problem(순열조합의 문제), combinatorial operation(순열 조합의 연산), understanding the problem(문제의 이해)

논문접수 : 2005. 4. 30.
심사완료 : 2005. 6. 8.

<부 록1>

1. 지필검사 문항

1. 4명의 학생을 일렬로 세우는 방법은 모두 몇 가지인가?

2. 주머니 속에 파란색 공 2개, 흰색 공 1개, 빨간색 공 1개가 있다. 공을 꺼내어 나온 순서대로 색깔을 적는다. 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다고 할 때, 4개의 공의 색깔을 적는 방법은 모두 몇 가지인가?

3. 똑같은 연필 3개를 빨강색, 노랑색, 파랑색, 초록색 4개의 필통에 넣고 싶다. 한 필통에 연필을 하나씩만 넣는다면, 넣을 수 있는 방법은 모두 몇 가지인가?

4. 빨강색, 노랑색, 파랑색, 초록색의 장난감 자동차 4개가 있다. 이 4개의 자동차를 갑, 을, 병 세 명에게 남기지 않고 모두 나누어 주려고 한다. 나누어 줄 수 있는 방법은 모두 몇 가지인가? (단, 한 명에게 4개를 모두 다 줄 수도 있다.)

5. 상자에 각각 2, 4, 7이 적힌 세 개의 공이 들어있다. 공을 하나씩 꺼내서 숫자를 적어 세 자리 자연수를 만든다. 만들 수 있는 세 자리 자연수는 모두 몇 가지인가?
(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

6. 갑, 을, 병, 정 4명이 아랫방, 윗방에서 자려고 한다. 그리고 어느 한 방에서 4명이 다같이 잘 수도 있고, 몇 명씩 나누어서 잘 수도 있다. 이 4명을 2개의 방에 배정하는 방법은 모두 몇 가지인가?

7. 빨간 모자 2개, 하얀 모자 1개, 파란 모자 1개가 있다. 이 4개의 모자를 갑, 을, 병, 정 4사람이 하나씩 나누어 가지는 방법은 모두 몇 가지인가?

8. 5명의 학생이 칠판을 지우는 일에 자원하였다. 이 학생들 중 3명을 선택하는 방법은 모두 몇 가지인가?

9. 1, 2, 3, 4, 5의 번호가 매겨져 있는 다섯 개의 사물함이 있다. 갑, 을, 병의 세 사람이 각자 하나씩 사물함을 사용하는 방법은 모두 몇 가지인가?

10. 1부터 4까지의 숫자가 적힌 네 장의 우표를 갑과 을이 각각 두 장씩 나누어 가지는 방법은 모두 몇 가지인가?

11. 상자 속에 각각 2, 4, 7, 9가 적힌 공 네 개가 있다. 공을 하나씩 꺼내어 숫자를 적고, 다시 상자에 넣는다. 이렇게 세 번 공을 꺼내어 만들 수 있는 세 자리 자연수는 모두 몇 가지인가?

12. 5장의 카드에 각각 A, B, C, C, C라고 적혀있다. 이 카드를 테이블 위에 일렬로 나열하는 방법은 모두 몇 가지인가?

13. 갑, 을, 병, 정 4명 중에서 반장, 부반장, 총무를 뽑는 방법은 모두 몇 가지인가?

<부 록 2>

문항별 문제 이해 과정에서의 오류 결과

		1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번	11번	12번	13번
바른 이해		315	225	185	136	300	192	207	261	247	204	246	252	279
		92.9%	66.4%	54.6%	40.1%	88.5%	56.6%	61.1%	77.0%	72.9%	60.2%	72.6%	74.3%	82.3%
잘못된 이해	순서	-	-	-	1	-	4	-	49	41	70	2	-	25
		-	-	-	0.3%	-	1.2%	-	14.5%	12.1%	20.6%	0.6%	-	7.4%
	중복 (a)	-	-	16	13	5	6	2	1	8	5	31	-	1
		-	-	4.7%	3.8%	1.5%	1.8%	0.6%	0.3%	2.4%	1.5%	9.1%	-	0.3%
	중복 (b)	-	-	-	32	-	22	-	-	-	-	-	-	-
		-	-	-	9.4%	-	6.5%	-	-	-	-	-	-	-
	대상 구별	2	31	78	19	-	8	36	-	-	-	-	14	-
		0.6%	9.1%	23.0%	5.6%	-	2.4%	10.6%	-	-	-	-	4.1%	-
	같은 순열	-	13	-	-	-	-	7	-	-	-	-	16	-
		-	3.8%	-	-	-	-	2.1%	-	-	-	-	4.7%	-
	상자 구별	-	-	-	2	-	-	-	-	-	3	-	-	-
		-	-	-	0.6%	-	-	-	-	-	0.9%	-	-	-
	분할 조건	-	-	-	14	-	16	-	-	-	2	-	-	-
		-	-	-	4.1%	-	4.7%	-	-	-	0.6%	-	-	-
	기타	1	2	7	13	3	13	11	4	4	7	16	4	2
		0.3%	0.6%	2.1%	3.8%	0.9%	3.8%	3.2%	1.2%	1.2%	2.1%	4.7%	1.2%	0.6%
	계	3	46	101	94	8	69	56	54	53	87	49	34	28
		0.9%	13.6%	29.8%	27.7%	2.4%	20.4%	16.5%	15.9%	15.6%	25.7%	14.5%	10%	8.3%
확인 불가	채점 불가	21	68	53	109	31	78	76	24	39	48	44	53	32
		6.2%	20.1%	15.6%	32.2%	9.1%	23.0%	22.4%	7.1%	11.5%	14.2%	13.0%	15.6%	9.4%

주. 개념 이해 여부를 채점한 결과 ($n=339$명)이다.
확인 불가는 무응답 혹은 문제 해결 과정이 부족하여 문제를 어떻게 이해했는지 알 수 없었던 경우이다.
중복(a)는 중복 가능성을 잘못 고려한 오류이며, 중복(b)는 어떤 것이 중복이 허용되는지를 잘못 고려한 오류이다.