대한수학교육학회지 <학교수학> 제 7 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.7, No.2, 169-192. Jun 2005

주제 탐구형 수학 영재 교수·학습 자료 개발에 관한 연구

최 종 현* · 송 상 헌**

본 연구는 수학 영재들을 위한 교수·학습 자료 개발의 준거를 설정하고 교수·학습 자료 개발의 절차 모형을 개발하여 그에 따른 주제탐구형 수학 영재 교수·학습 자료의 실제적인 모델을 제시하는 것이다. 이를 위하여 우선 수학 영재 교수·학습 자료 개발 준거와 파네스의 창의적 문제해결 학습 모형에 따라 '약수를 통한 자연수 탐구'라는 주제로 4차시 분량의 주제 탐구형 수학 영재 교수·학습 자료를 개발하였다. 이 자료를 이용하여 대학부설 영재교육원의 초등 수학 심화/사사반 학생들과 교육청 부설 영재교육원 초등 수학반 영재아들을 대상으로 4차에 걸쳐 현장에 적용하면서 수정 및 재구성을 한 자료를 부록에 실었다. 그리고 그 자료를 수업에 적용·분석함으로써 원형 및 자료 개발의 타당성을 확인하는 과정을 통해 얻게 된 수학 영재 교수·학습 자료 개발의 방향과 시사점을 제안하였다.

Ⅰ. 서 론

개인적, 교육적 차원에서의 당위성뿐만 아니라 국가적 인재 양성과 국가 경쟁력의 향상을 위하여 세계의 각 나라들은 영재 교육의 중요성을 강조하면서 영재교육을 집중적으로 실시하고 있고, 우리나라도 최근 영재교육 진흥법 (2000. 1. 28)의 제정과 영재교육 진흥법 시행령 (2002. 4. 18)이 공포되면서 초·중등학생을 대상으로 한 영재교육이 점차 본격적으로 이루어지고 있다. 각 시도 교육청, 영재 교육원, 영재 시범학교, 영재교육원등을 통한 영재교육에 대한 전 국민적 관심 확대와 영재 교육 활성화의 기로에 놓여 있다.

최근에 다양한 수준의 수학 영재들에게 적합한 교수·학습 자료가 지속되고는 있지만 교수·학습 자료 자료개발을 위한 이론적인 연구와 그것의 실천적인 적용연구는 더욱 필요한 실정이다. 특히 자료 개발자들은 수학영재들의 수준별 심리적 특성을 고려해야 한다. 그리고 수학영재들이 지식의 소비자로서가 아니라 새로운 지식의 생산자로 기여할 수 있도록 고급 사고력을 배양하는데 도움이 되는 교수·학습 자료를 개발해야 한다.

이에 본 연구는 수학 영재들을 위한 교수·학습 자료 개발의 준거와 교수·학습 자료 개발의 절차 모형을 개발하고 그에 따른 주제탐구형 수학 영재 교수·학습 자료의 실제적인 모델을 제시하고자 한다. 그리고 이 모델을 실제 수업에 적용·분석함으로써 원형 및 자료 개발의 타당성을 확인하는 과정을 통해 수학

* 장곡초등학교(duck0808@paran.com)
** 경인교육대학교(shsong@ginue.ac.kr)

영재 교수·학습 자료 개발의 방향을 제안하고자 하는 것이 본 연구의 목적이다.

본 연구에서 주제 탐구형 수학 영재 교수 학습 자료 개발을 위해 설정한 연구의 내용 및 방법은 다음과 같다.

첫째, 수학 영재 교수·학습 자료 개발의 준거와 절차 모형을 제시한다.

둘째, 수학 영재 교수·학습 자료 개발의 원형(原型) 및 실례를 개발한다.

셋째, 개발한 자료를 현장에 투입한 수업을 분석하여 수학 영재 교수·학습 자료의 원형을 수정 보완하고 이를 통한 교수·학습 자료 개발의 시사점을 제안한다.

II. 이론적 배경

1. 영재들을 위한 교수·학습 모형

많은 연구 문헌에서 나타나는 수학영재들의 행동특성을 종합하면 다음과 같다. 수학 영재들은 수학분야에서의 높은 학업 성취도를 뛰어넘는 비범한 재능과 강한 자아개념, 그리고 수학적 과제에 대한 집착력이 있다. 또한 그들은 수학 분야에서 지적으로 새로운 자극과 도전을 갈망하며 높은 수학적 창의성을 바탕으로 평범하고 일반적인 것보다는 창의적이고 혁신적인 것을 좋아한다.

수학 영재 교수·학습 자료를 개발하기 위해서는 기존의 여러 가지 영재 교수·학습 모형을 포괄적으로 살펴보면서 특별히 수학 영재들의 특성과 학습 내용으로서의 수학적 특성에 적합한 교수·학습 모형을 구안하는 것이 필요하다. 각 모형들은 특히 제안자의 교육철학이나 강조점에 따라 달라진다.

지금까지 우리나라에 알려진 영재 교수·학습 자료개발 모형으로는 Renzulli의 심화학습 3단계 모형, Treffinger의 자기 주도적 학습 모형, Parnes의 창의적 문제해결 모형, Betts의 자발적 학습 모형, Taylor의 다중재능 접근 모형, Williams의 인지적 사고과정-정의적사고과정 모형, 문제중심 학습모형 등(강숙희 외, 2000; 김영채, 1999; 김홍원 외, 2002)이 있다. 그 중에서 한국교육개발원을 중심으로 한 우리나라 수학과 영재 교수·학습 자료들은 대부분 Renzulli의 심화학습 3단계 모형에 기초하고 있으며 이미 많은 문헌에서 소개하고 있다. 따라서 이 글에서는 그다지 알려지지 않은 Parnes의 창의적 문제해결 모형만 조금 더 살펴보려고 한다.

2. 창의적 문제해결 모형

창의적 문제 해결(Creative Problem Solving; CPS)이라 하면 개인이나 집단이 어떤 문제를 해결하기 위하여 창의적으로 사고하려는 노력들을 통칭한다. 그 중에 대표적인 것이 Isaksen & Treffinger가 제안한 방법이 있으나 이후에 Parnes가 이를 수정하여 제안하고 있다고 있다(김영채, 1999).

CPS는 요소 접근법을 취하며 문제 해결의 전체 과정을 보다 세부적인 단계로 접근한다. CPS는 광범위하게 적용할 수 있지만 특히 새롭고 유용한 해결을 필요로 할 때 효과적으로 사용할 수 있다. 다음은 CPS 3요소를 6단계로 구분한 것이다.

가. '문제의 이해' 요소

이 활동 요소는 문제 해결 노력이 분명하도록 하기 위한 것이다. '문제를 바르게 보고 바르게 진술'하면 이미 거기에 해결이 담겨 있을 수도 있다. 흔히 '문제를 발견하면 반은 이미 해결되었다.'라고 말할 만큼 문제를 바르게 정

의하는 것은 생산적인 대답을 찾아내는 데 결정적이다. '문제의 이해' 요소는 '관심영역 발견', '자료 발견' 및 '문제 발견'의 세 가지 단계를 포함한다.

① 관심 영역 발견(mess-finding)

이 단계는 '우리가 작업하려고 하는 도전, 기회 또는 관심사에는 어떤 것들이 있는가?'란 질문을 다룬다. 이 단계의 기본 목적은 좀 더 포괄적인 목표 또는 출발지점을 확인하고 선택하는 데 있다.

② 자료 발견

이 단계에서는 '관심 영역'들을 음미해 보는 데 중요한 여러 가지 정보를 수집하여 문제를 바르게 진술하는 데 도움이 되게 한다.

③ 문제 발견

이 단계에는 작업 가능하고, 자극적이고, 그리고 구체적인 것으로 문제를 진술한다.

나. '아이디어 생성'요소

이 요소는 '아이디어 발견'이라는 한 개의 단계를 포함한다. 문제 해결에 도움이 될 수 있는 많은 아이디어, 다양한(융통성 있는) 갖가지 아이디어, 독특하고 독창적인 아이디어들을 생성해 낸다. 그런 다음 이들 가운데서 특히 그럴듯하고 유망해 보이는 한 개 또는 몇 개의 아이디어를 선택한다.

다. '행위를 위한 계획'요소

이 요소의 목적은 재미있고 유망해 보이는 아이디어들을 유용하고, 수용 가능하고, 그리고 실현 가능한 행위로 번역하는 데 있다. 이 행위를 위한 계획 요소에는 '해결 발견'과 '수용 발견'의 두 가지 단계를 포함한다.

① 해결 발견

한 개 또는 몇 개의 유망한 아이디어를 가지고 그것들을 분석하고, 개발하고, 그리고 다듬는다.

② 수용 발견

이 단계에서는 최종적으로 선택한 아이디어(해결, 발명)를 현실에다 실현시키기 위한 행위계획을 만들고자 한다. 선택한 아이디어를 다른 사람의 눈으로 들여다보고, 도와줄 수 있는 사람과 저항할 사람들을 체크해 보며, 이들을 토대로 실천을 위한 구체적인 행위계획을 수립한다.

위 CPS 모형의 가장 큰 장점은 실제적으로 부딪히는 문제를 해결할 수 있다는 데 있다. 이 모형은 여러 상황에서 쉽게 사용될 수 있으며 모든 연령의 아동들에게 가르쳐 질 수 있다는 점이 긍정적으로 평가될 수 있다. 이 모형은 또한 창의성을 증진시킬 수 있는 구조와 과정을 제공해 주며 목표 및 절차와 평가 준거가 명확하게 설명되어 있다는 장점이 있다.

III. 수학 영재 교수 · 학습 자료 개발의 준거와 절차

1. 교수 · 학습 자료 개발의 준거

우리나라 16개 시 · 도 교육청 산하 영재교육원 및 지역 단위 영재학급에서 사용하는 초등 수학 영재를 위한 교수 · 학습 자료들은 대부분 한국 교육 개발원에서 개발한 것이다. 그 외에도 Samara & Curry(1990), 김주훈 외(1996), 남승인(1999), 이종욱(2000), 김지영(2002), 이경화(2003), 송상헌(2004) 등에서 수학영재 교수 · 학습 자료 개발을 위한 안내를 제안하였다. 이를 종합하면 다음과 같다.

첫째, 전통적인 학습경험에 비하여 수준이 보다 높고 정교하며 내용이 보다 깊이 있고 추상적이어야 한다.

둘째, 영재를 위한 교수 · 학습 자료는 단순

히 내용을 재생해내는 주입식 과정이 아니라 창의적 사고를 생산해 내는 과정이어야 한다.

셋째, 영재를 위한 교수·학습 자료는 학생의 흥미와 관심에 따라 학습자 자신이 학습내용을 결정하는 주체자가 되도록 하여야 한다.

넷째, 영재를 위한 교수·학습 자료는 학습자에게 모든 지식과 정보에 대하여 비판적인 사고력을 가지고 반성적인 질문을 하여 이에 대한 논리적인 답변을 하는 활동을 하여야 한다.

다섯째, 기존의 아이디어에 도전하는 새로운 아이디어로 산출물을 만들도록 격려하는 내용이어야 한다.

이러한 내용을 바탕으로 초등 수학 영재아들의 특성을 고려하여 주제탐구형 수학 영재 교수·학습 자료 개발의 준거를 다음과 같이 설정할 수 있을 것이다.

첫째, 수학 영재들을 위한 교수·학습 자료는 일반 교육과정에서 교수되는 많은 수학적 개념들을 기초로 하되 수학적 사고력을 보다 확장 또는 발전시키는 기회를 제공하는 심화된 주제로 구성하여야 한다.

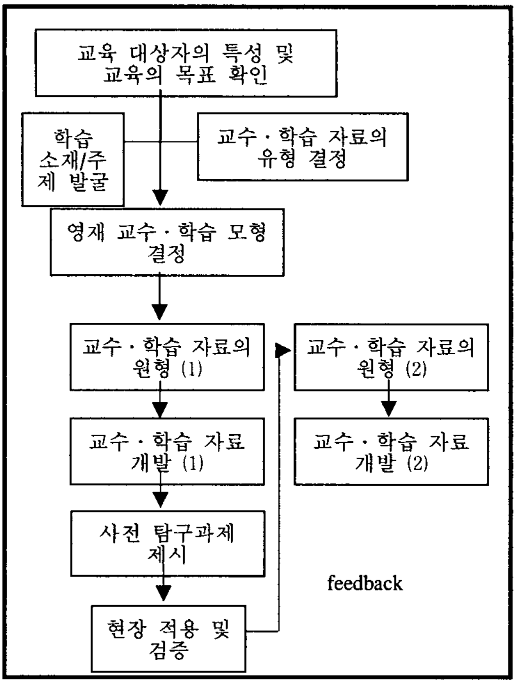
둘째, 탐구하고자 하는 주제의 학습 목표는 수학 영재들의 사고 측정을 고려하여 다양한 구체적인 조작활동이나 보다 추상적인 사고 활동 속에서 수학적으로 의미있는 추측과 그것의 타당화를 통해 새로운 개념을 이해하거나 재창조하는 경험을 갖도록 하여야 한다.

셋째, 의도한 교수·학습의 주된 목표를 달성하기 위해서는 하위 학습 주제와 탐구 활동들 간에 일관성이 유지되도록 체계적으로 조직하여야 한다.

넷째, 주제 탐구형의 교수·학습 자료를 개발하는 개발자는 그것을 활용하는 교사가 학생들로 하여금 실제적인 주제학습 과정에서 자기 주도적인 탐구를 수행할 수 있도록 자세히 안내할 뿐만 아니라 후속적인 탐구 활동을 유발하여 관련되는 학습 주제로 안내하는 방법에 도움을 얻을 수 있도록 자세히 기술해 주어야 한다.

2. 교수·학습 자료 개발의 절차

이 연구에서 사용한 수학 영재 교수·학습 자료 개발을 위한 절차 모형은 [그림 Ⅲ-1]과 같다.



[그림 Ⅲ-1] 수학 영재 교수·학습 자료 개발을 위한 절차 모형

가. 교육 대상자의 특성 및 교육의 목표 확인

수학 영재를 위한 교수·학습 자료를 개발하기 위해서는 먼저 영재아들의 지적·정의적인 특성과 욕구를 바르게 이해해야 한다. 또한 그들의 수준에 비추어 교육하고자 하는 목표를 분명히 정립해야 한다.

나. 자료 개발을 위한 소재/주제의 발굴

수학과 교수·학습 자료 개발의 핵심은 수학

영재들의 심리적 특성과 수준에 부합하는 지도 내용의 개발이다. 이 지도 내용의 개발을 위해서는 그 내용을 포괄하는 소재 또는 주제를 발굴해야 한다. 수학과 학습 내용을 위한 소재/주제들은 다음을 충족시켜야 한다.

첫째, 수학 영재들의 흥미와 호기심을 불러일으키고 그들에게 지속적인 성취감을 줄 수 있어야 한다.

둘째, 내용의 속진보다는 심화학습에 좀 더 비중을 두어야 한다. 특히, 7차 교육과정에서 가르치는 많은 기본적 개념들을 기본으로 하면서도 이를 심화·발전시킬 수 있어야 한다.

셋째, 여러 가지 해결방법이나 사고 전략을 유발하여 영재들의 수학적 사고 활동을 개발·육성할 수 있어야 한다.

넷째, 학생의 자기 주도적인 탐구 학습을 통해 수학분야에서의 창의적 산출물을 생산할 수 있어야 한다.

다. 교수·학습 자료의 유형 결정

기존에 개발된 수학과의 교수·학습 자료를 학습 방법적인 측면에서 살펴보면 <표 Ⅲ-1>과 같이 문제중심형, 주제중심형, 과제중심형, 연구중심형(R&E)으로 그 유형을 나눌 수 있다(송상헌, 2004). 최근에 개발되고 있는 자료들의 상당수는 주제중심형의 학습 자료로 볼 수 있다.

라. 교수·학습 모형의 결정

학습의 주어진 목표를 달성하기 위한 소재 또는 주제와 교수·학습 자료의 유형을 결정한 후에는 이것을 적용하기에 가장 적합한 교수·학습 자료의 모형을 결정해야 한다. 일반적인 영재교육에서는 영재교육과정 개발 모형에 근거하여 보다 구체적이면서 소규모의 단위 학습에 적용할 수 있는 영재 교수·학습 모형을 제안하면서 그 모형에 맞추어 학습할 내용을 맞추곤 한다. 그러나 수학과의 학습은 수학적인 내용이 학습의 중심이 되므로 지도하고자 하는 내용의 성격에 맞추어 그에 적합한 교수·학습 모형을 선택해야 한다.

마. 교수·학습 자료의 원형 개발

교수·학습 자료의 원형은 교수·학습 자료를 구성하기 위한 기초가 되는 것으로 이것을

<표 Ⅲ-1> 수학과 교수·학습 자료의 유형

유형	기초 ←	→ 심화	유의점
문제중심형	문제풀이형	문제해결형	문제를 푸는 수준을 넘어 학생이 직접 당면 상황에서 문제를 발견하고 만들어 보면서 동료가 만든 문제를 상호 평가하기도 함.
주제중심형	주제학습형	주제탐구형	주제를 가르치고 배우는 수준을 넘어 보다 깊이 탐구해 가도록 함.(단일 주제 심화형, 다 주제 통합형으로도 구분)
과제중심형	과제수행 형또는 안내된 재발명형	자기주도적 프로젝트형	예상하는 답을 향해 주어진 과제를 수행해 나가도록 요구하는 수준을 넘어 학생이 자기주도적으로 과제를 설정하고 그것의 창의적인 산출물을 생산해냄
연구중심형 (R&E)	안내된 발명형	창의적 개별연구형	전문가 수준의 연구/개발을 격려하며 보고서, 논문 등을 요구함

바탕으로 하여 교수 · 학습 자료를 개발한다. 원형 속에 포함되는 내용은 아래 <표 Ⅲ-2>과 같다.

<표 Ⅲ-2> 교수 · 학습 자료의 원형에 포함될 요소들

1) 교육의 목표
2) 주제
3) 대상
4) 교수 · 학습 자료의 유형
5) 개요
6) 학습목표
7) 교수 · 학습 요소
   가) 주요 학습 개념
   나) 학습 내용
   다) 주요 기능
   라) 산출물
8) 평가
9) 학습 활동의 전개 절차
10) 참고 문헌

바. 교수 · 학습 자료용 개발

교수 · 학습 자료의 원형을 바탕으로 하여 학생용 자료와 교사용 자료를 개발한다.

① 학생용 자료

아래 [그림 Ⅲ-2]는 학생용 자료의 집필 체제를 나타낸 것이다.

- 도입
  - 주제
  - 활동안내
  - 학습목표
  - 준비물
- 본활동
  - 활동 1 — 생각의 길잡이
  - 활동 2 — 생각의 길잡이
  - ⋮ ⋮
- 후속활동
  - 심화활동
  - 참고자료

[그림 Ⅲ-2] 학생용 자료 집필 체제

학생용 교수 · 학습 자료를 개발하기 위해서는 다음의 몇 가지를 고려하여야 한다.

첫째, 학생들의 능력, 적성, 개인차를 고려하여 학생의 자기주도적 학습이 가능하도록 수준별 또는 선택적 상황으로 구성한다.

둘째, 학생들이 스스로 탐구해 볼 수 있는 상황을 통해 문제를 발견하고 해결할 수 있도록 하며, 학생들의 상상력과 창의성을 제한할 정도로 너무 자세히 안내하지 않도록 한다.

셋째, 학생용 교수 · 학습 자료에는 학생들의 수학적 사고 과정을 구체적으로 표현할 수 있도록 충분한 여백을 제공하여야 한다.

넷째, 보다 심화된 자료를 제공하며 후속 탐구활동을 위한 참고문헌을 자세히 안내한다.

② 교사용 자료

[그림 Ⅲ-3]는 교사용 자료의 집필 체제를 나타낸 것이다.

- 수업을 위한 안내 활동
  - 주제명
  - 주제 설정의 취지
  - 관련교육과정
  - 학습목표
  - 주요 학습 개념도
  - 활동 전개 계획표
  - 준비물
  - 지도초점과 유의사
- 수업활동
  - 활동 과정안
    - 본활동
    - 심화활동
  - 보충 지도 자료

[그림 Ⅲ-3]는 교사용 자료의 집필 체제

교사용 교수 · 학습 자료를 개발하기 위해 다음의 몇 가지를 고려하여야 한다.

첫째, 주제 선정의 이유와 관련 교육과정, 그리고 학습의 목표 등을 명시하여 활용하고자 하는 교사들에게 충분한 안내서의 역할을 할 수 있어야 한다.

둘째, 주제별로 교육과정의 위계 또는 개념도, 활동 전개 계획표 등을 제시하여 수업에서 교사가 수업의 흐름을 확인할 수 있도록 해 주어야 한다.

셋째, 활동 학습을 통하여 학생들의 수학적 사고 능력과 태도의 변화를 유발하기 위한 지도의 초점과 지도시 유의사항들을 예시와 함께 상세히 기술해 주어야 한다.

넷째, 학생용 자료에 제시된 문제나 과제에 대해 학생들이 나타낼 수 있는 다양한 전략이나 풀이 방법 등을 예시해 주어야 한다.

다섯째, 교재를 개발하면서 도움을 받았던 참고문헌이나 인터넷 주소를 정확하게 적어 두어 지도교사가 그 교재를 재구성하거나 수업시 문제점이 발생하였을 때에 신속하게 대처할 수 있도록 해주어야 한다.

3. 주제 탐구형 수학 영재 교수·학습 자료 개발의 실제

본 논문에서는 [그림 Ⅲ-1]의 교수·학습 자료 개발을 위한 절차모형에 따라 교수·학습 자료의 원형과 교수·학습 자료를 개발하였다.

가. 교육 대상자의 특성과 교육의 목표 확인

본 연구의 적용을 위해 선택한 교육 대상자는 대학부설 영재교육원의 심화/사사반 학생들이다. 이들은 초등학교 6학년 학생들이지만 대부분 각종 수학 경시대회에서 입상한 경험도 있고 중학교 교육과정 이상의 내용을 학습한 경험이 있는 학생들이다.

이러한 학생들에 적합한 교육내용과 탐구주제를 선정하기 위해 기 개발된 자료들을 분석한 결과 도형과 측정 영역에 많은 비중을 차지하고 있었다. 또한 수와 연산 영역의 내용을 보면 수를 이용한 퍼즐이나 문제 해결력, 규칙 찾기 등에 한정되어 있고 약수의 기본적인 성질과 배수의 판정법을 이용한 문제 해결학습용 자료들이 일부 있었다. 이에 수의 성질에 관한 보다 심화된 내용을 경험해 볼 필요가 있다고 판단하여 자연수의 약수를 이용하여 자연수를 분류하는 기준과 그 기준이 되는 성질들의 특성을 탐구하는 것을 교육의 목표로 설정하였다.

나. 소재 및 주제 발굴

현 교육과정 내에서 약수와 관련된 내용으로는 5-가 단계에서 수의 약수를 구하는 것과 최대 공약수를 이용한 문제 해결 및 배수와 관련된 연관성만을 다루고 있다. 후속활동으로는 7-가 단계에서 소인수 분해와 조립제법을 활용한 세 수의 최대공약수와 최소공배수까지 다루고 있지만 자연수의 약수를 활용한 수의 성질과 분류는 정규 교육과정에서 취급하지 않는다. 이에 약수를 활용한 수학 귀신 게임과 피타고라스가 분류한 완전수, 과잉수, 부족수를 활동소재로 하였다. 이는 약수의 개념만 알아도 탐구할 수 있는 활동으로 학생들에게 많은 흥미와 호기심을 불러일으킬 수 있으며 현 교육과정의 속진이 없어도 충분히 심화할 수 있는 소재이다.

다. 교수·학습 자료의 유형 결정

위에서 제시한 목표와 소재 및 주제에 적합한 유형으로 수학적 내용에 관한 보다 깊이 있는 탐색을 할 수 있도록 하기 위해서는 주제 탐구형의 교수·학습 자료를 개발하고자 하였다. 특히 자연수의 약수를 탐구하여 귀납적으

로 학생 스스로 수학적 개념과 원리·법칙 등을 일반화하면서 정규교육과정에서 요구하는 수준 이상의 독창적인 탐구활동을 통해 새로운 문제를 찾아보도록 안내할 필요가 있기 때문이다. 그리고 문제를 해결하기 위한 연구 계획을 세워 자기 스스로 탐구활동을 수행함으로써 기 개발된 여러 사실들을 찾아내면서 재발견 또는 수학적인 증명을 경험할 수 있도록 하기 위함이다. 물론 현장에 적용하면서 주제에 대한 기본적인 이해를 필요로 하는 일부 학생들에게는 주제탐구 이전에 교사주도의 주제학습으로 학습 자료를 안내하면서 진행할 수밖에 없는 반면 사사반 수준의 일부 학생들에게는 보다 깊이 있는 개인 주제탐구를 위해 R&E형을 적용할 수도 있음을 고려하였다.

라. 영재 교수·학습 자료 모형의 선택

한국 교육 개발원에서 개발된 자료는 거의 Renzulli의 삼부심화학습의 모형으로 구성하고 있다. 이는 교수활동, 프로그램 평가를 위한 전략 등을 포함하는 전체적인 프로그램틀을 제공하며 모형이 실생활에 기초하여 통합되어져 있다 장점으로 많이 사용되고 있다. Renzulli의 삼부심화학습 모형과 Parnes의 창의적 문제 해결 모형을 비교하면 아래 <표 Ⅲ-3>과 같다. 본 자료는 단일 주제를 통한 단기간의 학습 요소를 포함하고 있으며, 수준이 서로 다른 학생들의 특성을 고려하여 학생들이 창의적으로 문제를 해결해 가는 과정을 산출해 낼 수 있도록 구성하였다.

이를 위해서는 Renzulli의 삼부심화학습 모형보다는 Parnes의 창의적 문제 해결 모형이 적합하다고 판단되었다.

마. 교수·학습 자료의 원형 개발

<표 Ⅲ-2>의 내용을 바탕으로 교수·학습 자료를 구성하기 위한 기초가 되는 교수·학습 자료의 원형을 제시하였다.

바. 교수·학습 자료의 구체화

수학 영재를 위한 교수·학습 자료를 개발하기 위해 다음을 고려하였다.

첫째, 교사의 설명보다는 학생의 자기 주도적인 탐구활동에 좀 더 비중을 두어 개발하였

<표 Ⅲ-3> Renzulli와 Parnes의 모형 비교

Renzulli의 삼부심화학습 모형	구분	Parnes의 창의적 문제 해결 모형
내용 영역의 통합형	내용	단일 주제 심화형
비교적 오랜 기간이 걸림	학습기간	단 기간에 학습 가능
3단계로 진행 (탐색/기능습득/프로젝트)	내용 전개 방식	3요소 6단계로 구성
교사주도 → 교사·학생의 협동 → 학생 주도	수업 전개 방식	교사의 자료 제시 → 학생주도에 따라 교사의 개입
협동자	학생들 간의 관계	개별자
안내자	교사의 역할	조언자
다양한 수준의 학생들이 자율적으로 사용 가능함	교재 구성	각 수준의 학생들에게 적합하도록 재구성할 필요가 있음
3부에서 프로젝트 수행시	문제 발견 시점	3단계의 문제 발견 단계
의사소통을 통한 아이디어의 공유	문제 해결을 위한 아이디어	문제 해결을 위한 영감과 상상력을 강조
세부적인 활동에서의 과제 집착력과 창의성을 구체적으로 평가하기 어려움	평가	세부적인 탐구단계에서의 과제 집착력과 창의성을 평가하기 용이함

다. 교사의 설명 위주의 수업은 학생들에게 지식적인 내용은 제시할 수 있으나 그 내용에 대한 탐구가 이루어지지 않아 원리 및 성질에 대한 이해 능력이 부족하다. 따라서 현 교육과정에 있는 기본적 개념들을 토대로 하여 깊이 있는 학습이 이루어지도록 하였다. 예를 들어 소수와 완전수, 과잉수, 부족수 등의 개념을 설명하기 이전에 보다 많은 약수의 합을 가져갈 수 있도록 고안한 게임을 통해 소수의 특성과 약수의 합이 많거나 적은 수들을 분류해 보는 기초 동을 통해 지적인 자극과 도전을 유발시키도록 구성하였다. 그리고 1부터 40까지의 자연수를 그 약수의 개수와 자신을 제외한 약수들의 합에 따라 여러 가지 방식으로 분류해 보면서 자연수들의 성질을 직접 조사, 탐구해 보도록 학습 자료를 전개하였다. 따라서 같은 내용을 다루는 교수·학습 자료라 할지라도 그 내용을 구성하는 방식과 지도하는 방식에 따라 학생들이 학습하는 내용과 깊이는 다를 수밖에 없다.

둘째, 동일한 주제에 대한 활동을 쉬우면서도 흥미로운 활동에서 점차 깊이 잇는 탐구가 필요한 활동으로 단계적으로 구성하면서 각 활동 간에 연계성이 있도록 구성하였다. 처음에 제시된 활동이 너무 어려우면 처음에 많은 부담감을 갖고 학생이 수업에 임하게 되어 다양한 사고를 하기가 어렵다. 처음에는 교육과정에서 가장 기본이 되는 내용을 제시하고 차츰 그 내용을 깊이 있게 들어가도록 하여야 한다. 또한 연계성이 없는 내용은 학습의 흐름을 방해할 수 있다. 따라서 현 교육과정에서 다루고 있는 약수를 구해보는 활동으로부터 이를 일반화시키는 활동으로 발전시켰다. 여러 수업을 진행하면서 학습 활동 사이의 연계성과 흐름의 문제성을 분석하여 자료를 수정·보완하였다.

셋째, 학생들의 수준을 고려한 교수·학습 자료를 구성하였다. 현재 우리나라에는 영재교육 프로그램을 운영하는 기관에 따라서는 학습자들의 수준에 상당한 차이를 보이고 있다. 따라서 각 교육기관마다 학생들의 수준에 맞는 교수·학습 자료가 필요하다. 수업을 전개해 나가는데 있어, 지역교육청부설 영재교육원, 지역단위 영재학급에서는 주제 학습의 방향으로 영재아들이 주제에 대한 여러 가지 사실을 찾아보는 활동으로 구성하고, 대학부설 영재교육원의 심화반 학생들에게는 그런 사실을 바탕으로 하여 일반화를 시켜보려는 활동과 지금까지 배운 내용을 바탕으로 더 공부하고 싶은 내용이나 연구하고 싶은 주제를 선정해보는 것까지로 구성하고, 대학부설 영재교육원의 사사반 학생들에게는 직접 한 개의 연구주제를 선택하여 자신만의 연구 프로젝트를 수행하는 것까지를 제시하여야 한다. 따라서 본 교수·학습 자료는 대학부설 영재교육원의 심화/사사반 학생들을 대상으로 하기 때문에 연구 프로젝트까지를 활동으로 구성하였다.

넷째, 다양한 전략이나 해결방법을 가지는 활동으로 발전적인 사고를 할 수 있도록 구성하였다. 같은 문제에 대하여 학생들의 다양한 반응 속에 가장 효율적인 방법을 찾는 것은 학생들의 사고 발달에 큰 도움이 된다. 자연수의 약수를 구하는 과정에서 여러 가지 방법이 나왔고, 그 방법을 비교하여 가장 효율적인 방법을 찾아냄으로써 그 방법이 나중에 과잉수의 여러 가지 특징을 일반화시키는 밑거름이 될 수 있도록 구성하였다. 또한 '수학 귀신을 이겨라.'라는 게임을 통해 전략을 탐구하고 그 전략을 이용해 게임을 발전시킴으로써 더 많은 사고의 확장을 가져올 수 있도록 하였다.

다섯째, 다양한 활동 속에서 개연적 추리를 통하여 수학적인 추측을 하고 이를 탐구하여

타당성을 확인하면서 수학적으로 의미 있는 의사소통 과정에 참여토록 하면서 스스로의 사고를 체계화하고 명확화 할 수 있도록 하였다. 의사소통 과정 속에 자신의 생각을 더 명확하게 할 수 있으며 다른 사람의 생각과 자신의 생각을 비교하면서 더 많은 사고의 확장을 가져올 수 있다. 따라서 수학적 의사소통 과정을 통해 수학 귀신 게임의 전략을 탐구하고 자연수의 특성들을 탐구하도록 하였다.

여섯째, 학생들의 사고과정이 산출물을 통해 나타나도록 하였다. 자신이 문제 해결을 해 나간 과정을 모두 기록하도록 하였고, 연구 주제에 대한 탐구를 통해 보고서로 제출하도록 하였다. 이를 바탕으로 학생들의 창의적 문제 해결 능력이 어느 정도에 도달할 수 있었는지를 알아 볼 수 있도록 하였다.

지금까지 고려한 사항과 원형을 바탕으로 [그림 Ⅲ-2], [그림 Ⅲ-3]에서 제시한 학생용, 교사용 자료 지필 체제에 맞게 개발하였다.

4. 현장 적용 결과 분석

현장 검증은 2003년 A대학부설 영재교육원 초등 수학 심화/사사반 학생들을 대상으로 1차 적용을 하였고, 2003학년도 A교육청 부설 영재교육원 초등 수학반 학생들을 대상으로 2차 적용을 하였다. 그리고 2004년 A대학부설 영재교육원 초등 수학 심화/사사반 학생들을 대상으로 3차 적용을 하였고, 마지막으로 2004년 I대학부설 영재교육원 초등 수학 사사반 학생들에게 4차 적용하였으며 각 활동들을 녹화하여 분석하였다. 1차와 2차 수업을 위한 교수·학습 자료는 같은 것으로 하였다. 그 이유는 대학부설 영재교육원과 지역교육청부설 영재교육원에는 실력 차가 있음을 여러 가지 수업을 통하여 느낄 수 있었다.
따라서 각 영재교육원 영재아들 사이에 어느 정도의 차이가 있으며 그들에게 맞는 교수·학습 자료를 개발하기 위해서는 무엇을 고려해야 하는지를 알고자 하였다. 3차 자료부터는 기 개발된 자료의 문제점을 분석하여 수정 보완한 후 수업에 적용하였다.

가. 1차 적용 분석

1차 개발 자료에 포함된 주요 활동 내용은 다음 <표 Ⅲ-4>와 같다.

<표 Ⅲ-4> 1차 개발 자료

구분	활동 내용	비고
활동 1	• 약수 구하기 - 1부터 40까지 약수 구하기 - 약수의 개수에 따라 수 분류하기 • 자연수를 과잉수, 완전수, 부족수로 분류하기 - 과잉수, 완전수, 부족수 사이의 공통점 찾기 - 친애수 찾기	☞ 자연수의 약수를 구하는 다양한 방법 중에 가장 좋은 방법 생각하기 ☞ 과잉수, 완전수, 부족수 사이의 특징 이해하기
활동 2	• 가로, 세로 약수 찾기 - 2×2, 4×4, 6×6	☞ 공약수 이해하기
활동 3	• 약수를 활용한 게임하기 - 수학귀신을 이겨라!	☞ 전략을 사용한 게임하기
활동 4	• 새로운 활동 만들기	☞ 배운 내용을 바탕으로 연구과제 해결하기

이렇게 적용한 결과를 토대로 개발된 자료의 문제점은 <표 Ⅲ-5>와 같다.

나. 2차 적용 분석

2차 적용에 사용된 교수·학습 자료는 1차와 같았다. 같은 교수·학습 자료를 대학부설 영재교육원과 교육청 부설 영재교육원에 각각 1차와 2차에 걸쳐서 투입하였을 때 분석된 차이점을 종합해 보면 <표 Ⅲ-6>과 같다.

<표 Ⅲ-6>과 같이 영재 교육을 받는 영재아들이라 할지라도 그들의 수준에 따라서는 여러 가지 차이를 보이는 것을 알 수 있다. 먼저 공

<표 Ⅲ-5> 1차 개발 자료의 문제점

구 분	문제점
활동 1	• 먼저 약수를 구하고 뒤에 개수를 찾기 위해서는 다시 앞으로 와서 문제를 해결하고 또 과잉수, 부족수, 완전수를 찾기 위해 다시 앞에 와서 자기 자신을 제외한 약수들의 합을 구해야 함으로 내용 전개가 매끄럽지 않다. • 1부터 40까지의 수 중에 과잉수가 모두 짝수이므로 이 교재의 내용으로는 과잉수가 모두 짝수로 오인할 수 있다.
활동 3	• 몇 번 게임을 해 보면 모든 학생들이 쉽게 게임에 승리한다. • 게임에 승리하기 위한 전략을 찾기보다는 게임에 이기는 것에 목적을 둔다.

<표 Ⅲ-6> 1차, 2차 개발 자료의 분석 비교

구 분		A대학부설 영재교육원	A교육청부설 영재교육원
공통점		• 자연수 약수 구하기 • 약수의 개수에 따라 자연수 분류하기 • 과잉수 사이의 공통점 찾기 • 완전수 사이의 공통점 찾기 • 완전수가 되기 위해 1부족한 수 사이의 공통점 찾기 • 2×2, 3×3의 빈 칸 채우기 • 수학귀신 이기기(12까지의 수)	
차이점	약수를 구하는 방법	• 다양한 방법으로 구할 수 있었고 어떤 방법이 더 효율적인지에 대한 판단을 할 수 있다.	• 가장 작은 수부터 약수를 구한다. (C=A×B일 때 A, B가 C의 약수임을 알고 있으나 이것을 활용하지 못함.)
	용어의 이해	• 소수, 제곱, 제곱수에 대해 모두 알고 있음.	• 아주 소수의 학생만 알고 있음
	홀수 과잉수 찾기	찾음	없다고 단정함
	게임 전략 찾기	• 몇 번의 게임을 통해 게임에 승리하기 위한 전략을 말이나 글로 표현함.	• 게임에 승리하기 위한 전략을 머릿속에서 생각은 하고 있는 듯하나 말이나 글로 표현하지 못함.
	연구 과제 수행하기	• 자기 나름대로 연구과제를 세워서 문제를 해결함.	• 무엇을 어떻게 해야 하는지에 대한 판단이 서지 못해 하지 못함.

통점으로는 학교 교육과정에서 기본적으로 배우는 내용에 대해서는 모두 잘 알고 있었고, 여러 가지 사실 속에서 공통점을 찾는 것은 거의 같은 대답이 나왔다. 그러나 문제 해결 방법이 여러 가지가 있을 때 효율성을 생각하는데 것과, 기존의 지식을 응용하는 능력 및 여러 가지 사실을 기초로 일반화시키기, 전략 세우기, 복잡한 형태의 문제를 단순화하거나 수 감각을 이용하여 문제를 해결하기 등에서 대학부설 영재교육원 영재아들이 훨씬 나은 실력을 가지고 있었다. 또한 개인 연구 과제 수행 능력은 지역 교육청 부설 영재교육원의 학생들은 가지고 있지 않았다. 그리고 교육청 부설 영재교육원 영재아들은 학년 교육과정 이상의 속진이 이루어지지 않았지만 대학부설 영재교육원 영재아들은 중등 교육에 대한 많은 속진이 이루어진 것으로 판단되었다. 따라서 교수 · 학습 자료를 구성함에 있어 중요하게 생각해야 하는 것은 대상 학생들의 수준을 고려하여 그에 따른 학습 목표를 세우고 그것을 달성하기 위한 교수 · 학습 자료를 구성해야 한다. 지역 영재 학급 및 지역교육청 부설 영재교육원 영재아들에게는 여러 가지 사실을 찾아내고 그 사실을 통해서 규칙이나 공통점을 찾아내는 주제 학습으로 목표를 설정하고 대학부설 영재교육원의 심화반 영재아들에게는 그런 사실들을 종합 · 분석하여 일반화하는 능력 및 개인 연구 주제로 적합한 것이 무엇이 있는지를 생각해 보는 주제 탐구형으로 목표를 선정하고, 사사반 영재아들에게는 자신이 세운 연구 주제를 해결하기 위한 구체적인 활동을 계획하고 실행하는 것까지를 목표로 설정하는 R&E형이 좋다.

다. 3차 적용 분석

1 · 2차 적용 분석 결과 교수 · 학습 원형에서는 문제점이 없었다. 따라서 분석한 내용을 토대로 기 개발된 교수 · 학습 자료를 <표 Ⅲ-7>과 같이 수정하였다. 3차 적용 분석 결과 1 · 2차 때보다 학생들이 더 많은 사고를 할 수 있었고 더 많은 자료를 얻을 수 있었다. 이 결과를 토대로 3차 교수 · 학습 자료의 문제점을 분석한 결과 아래 <표 Ⅲ-8>과 같다.

<표 Ⅲ-7> 3차 교수 · 학습 자료 수정 내용

구 분	수정 내용	비고
활동 1	• 약수를 구하는 과정에서 약수의 개수와 자신을 제외한 약수들의 합을 함께 제시 • 가장 작은 홀수 과잉수 찾기	• 내용 전개를 매끄럽게 함. • 추가
활동 3	• 수학 귀신 이기기에서 수학 귀신보다 점수 차이를 많이 내서 이기기 • 자신이 원하는 수를 선택하여 게임하기	• 게임 규칙 변경 • 추가

<표 Ⅲ-8> 3차 적용 분석 결과

구 분	문제점
활동 1	• 활동 1이 너무 많다. • 과잉수들의 공통점을 알아보는 과정에서 완전수의 배수는 모두 과잉수가 됨을 알 수 있었다. 공부의 선후가 바뀐 느낌이 들었다. • 과잉수, 완전수, 부족수에 대한 명확한 정의가 없었기 때문에 '1'이라는 수가 분류하는 데 문제가 되었다.
활동 2	• 목표를 달성하기 위해 <활동 1>과 <활동 3>사이에 연계성이 없다.
활동 3	• 게임 방법에 대한 이해를 하지 못하였다.

라. 4차 적용 분석

3차 적용 분석 결과 교수·학습 원형에서 약간의 문제점이 발견되었다. 따라서 교수·학습 원형을 수정하였다. 그리고 이 내용을 토대로 3차 교수·학습 자료를 <표 Ⅲ-9>와 같이 수정하였다.

4차 적용을 한 결과 앞의 적용 때와 큰 차이를 보이지 않았다. 위의 내용을 통해 수정해야 할 문제점은 아래 <표 Ⅲ-10>과 같다.

마. 최종 수정된 교수·학습 자료

4차에 걸친 수업 적용을 통한 분석으로 아래 <표 Ⅲ-11>과 같이 활동을 제시하였다.

<표 Ⅲ-9> 3차 교수·학습 자료 수정 내용

구 분	수정 내용	비고
활동 1	• 1부터 40까지의 수의 약수를 구하고, 그 개수와 자기 자신을 제외한 약수들의 합 구하기	• 내용의 세분화
활동 2	• 약수의 개수에 따라서 자연수 분류하기	
활동 3	• 약수의 합에 의해서 자연수 분류하기 - 1을 어디로 분류할 것인가에 대해 생각하기 - 완전수 → 과잉수 → 부족수의 순으로 전개 • 1을 어떻게 분류할 것인가? • 완전수, 과잉수, 부족수 중에 어느 것이 가장 많을까? • 새로운 기준에 따라 자연수 분류하기	• 추가 • 내용 순서 조정 • 추가 • 추가 • 추가
활동 4	• 게임에 대한 하나의 예 제시	• 추가
활동 5	• 심화활동 제시	• 추가

<표 Ⅲ-10> 4차 적용 분석 결과

구 분	문제점
활동 3	• 과잉수, 완전수, 부족수를 분류한 후 1을 어디에 두어야 할지에 대한 고민이 먼저 이루어져야 함. • 자연수를 새로운 기준으로 분류해 보는 것은 학생들이 이 활동을 통하여 자기 스스로 연구 주제로 설정하는 것이 적절함.
활동 4	• 활동 1, 2, 3을 바탕으로 활동 4의 게임을 위한 전략을 찾아야 하는 데 전략에 큰 도움이 되지 못함.
활동 5	• 학생들이 문제를 설정하고 해결해 가는 과정이 너무 막연하다는 느낌을 줌.

<표 Ⅲ-11> 최종 교수·학습 자료 수정 내용

구 분	최종 수정 내용	비고
활동 1	• 수학 귀신을 이겨라!	관심영역 발견
활동 2	• 너의 약수를 알려다오!	자료 발견
활동 3	• 약수의 개수에 따른 자연수 분류하기	
활동 4	• 약수들의 합에 따라 자연수 분류하기	
활동 5	• 심화활동 제시	문제발견 아이디어 발견 해결발견 수용발견

활동 1에서는 '수학 귀신을 이겨라!'라는 게임을 통해 학생들의 흥미와 호기심을 유발하고 약수에 대한 관심을 갖도록 하는데 활동의 주안점을 둔다. 활동 2에서는 교육과정과 관련하여 자연수의 약수와 개수, 자기 자신을 제외한 약수들의 합을 구해 본다. 활동 3에서는 약수의 개수에 따라 자연수가 어떻게 분류되고 그 속에 어떤 성질이 있는지를 탐구하며, 활동 4에서는 약수들의 합에 따라 완전수, 과잉수, 부족수로 구분하고 그 속에 성질을 분석하고 일반화시켜 봄으로써 자신이 연구하고자 싶은 연구의 주제 설정을 위한 자료를 발견한다. 활동 2, 3, 4를 통하여 자신이 연구하고자 하는 연구 주제를 설정할 자료들을 모은다. 활동 5에서는 심화활동으로 활동 2, 3, 4에서 배운 내용을 바탕으로 자신이 해결하고 싶은 연구 주제를 설정하고 그 주제를 해결하기 위한 아이디어를 통한 연구 계획을 세우고 이를 바탕으로 해결하고 그 내용을 일반화시켜 본다. 앞에서도 언급하였듯이 지역교육청 부설 영재교육원이나, 지역 단위 영재학급에서는 활동 4까지를 통해 주제를 학습하는 데 주안점을 두고 대학부설 영재교육원에서는 활동 5까지를 제시함으로써 창의적인 문제 해결 능력을 확인하고 자기 주도적 학습이 이루어지도록 한다.

이렇게 수정된 내용을 바탕으로 개발된 자료는 <부록 1>에 제시하였다.

IV. 결론 및 제언

1. 결론

본 논문은 수학영재교육의 효율성을 신장시킬 수 있는 주제탐구형 교수·학습 자료 개발을 위한 준거 설정 및 교수·학습 자료 개발의 절차 모형을 제안하고 있다. 이 모형에 따라 수학 내용을 구현하는 교수·학습 자료의 원형을 개발하여 수업에 적용·분석함으로써 그 원형과 자료 개발 절차를 확인해 보려고 했다.

본 연구는 수학 영재 교수·학습 자료 개발 준거와 교수·학습 모형에 따라 '약수를 통한 자연수 탐구'라는 주제로 4차시 분량의 주제탐구형 수학 영재 교수·학습 자료를 개발하였다. 이 자료를 이용하여 A대학부설 영재교육원 초등 수학 심화/사사반, A교육청 부설 영재교육원 초등 수학반, I대학부설 영재교육원 사사반 영재아들을 대상으로 4차에 걸쳐 현장에 적용하여 아래와 같은 사실을 확인하였다.

첫째, 수학 영재 교수·학습 자료 개발의 절차 모형을 기반으로 하여 자료를 개발함으로써 활동 간의 유기적인 연관성을 유지하고 전체적인 윤곽을 확인할 수 있었다.

둘째, 학생들의 수준별 특색을 살린 교재 구성과 수업 활동을 전개함으로써 학생들의 능력이 최대한으로 발휘시킬 수 있었다.

셋째, 개발된 자료는 적용과 관찰·분석을 통하여 계속적으로 수정·보완되었다.

넷째, 교사용 자료에는 기대하는 학습 목표에 부합하는 학생들의 풀이에 대한 예시, 학생들이 탐구할 수 있는 주제에 대한, 예시, 수업에 활용할 수 있는 교사의 안내와 지도시 유의점 등이 자세히 소개할 필요가 있었고, 그러한 기술이 수업을 진행하는 데 유익한 가이드가 되었다.

본 연구의 분석 결과를 바탕으로 주제 탐구형 수학 영재 교수·학습 자료를 개발하는 데 있어 아래와 같은 결론을 얻었다.

첫째, 주제 탐구형 교수·학습 자료를 개발하기 위해서는 탐구하고자하는 주제의 내용을 구현하기에 가장 적절한 교수·학습 모형을 선택하거나 필요에 따라서는 재구성할 필요가 있

다. 본 연구에서는 최근 우리나라에서 그동안 가장 많이 활용하고 있는 Renzulli의 심화학습 3단계 모형보다는 Parnes의 창의적 문제해결모형을 선택하였다. 이는 본 자료가 단일 주제를 이용한 단기간의 학습 요소를 수준이 다른 학생들의 특성을 고려하여 학생들이 창의적으로 문제를 해결해 가는 과정을 산출해내는 데 목적이 있기 때문이다.

둘째, 이미 개발된 주제 탐구형 교수·학습 자료는 탐구하고자하는 목표와 참여하는 학습자들의 수준에 따라 재구성할 필요가 있다. 예를 들어 Parnes의 창의적 문제해결 모형은 동일한 교수·학습 자료를 재구성하여 수준이 다른 학생들에게 모두 사용할 수 있다. 지역 단위 영재학급이나, 교육청 부설 영재교육원에서는 관심영역 발견과 자료 발견의 주제 학습으로, 대학부설 영재교육원의 심화반 학생에게는 아이디어 발견의 단계까지, 대학부설 영재교육원의 사사반 학생에게는 수용 발견까지의 주제탐구로 활용이 가능하다

셋째, 주제 탐구형 수학 영재 교수·학습 자료를 개발하기 위해서는 탐구할 주제의 내용과 그 내용을 탐구해 가는 방법과 형식을 포함하는 원형을 고안할 필요가 있다. 이 원형의 내용적인 면에서는 탐구할 주제의 필수적인 요소와 보다 심화된 형태의 내용을 포함하여야 하고, 방법과 형식적인 면에서는 학생들에게 자기 주도적으로 탐구해 갈 수 있도록 유도하고 교사에게는 학생들을 구체적으로 안내할 수 있도록 예시하는 교수·학습 자료의 형식을 갖추고 있어야 한다. 그리고 이 원형은 교육의 목표를 달성하기에 충분하다고 판단될 때까지 지속적으로 수정 및 보완할 필요가 있다. 원형은 교수·학습 자료를 구성하기 위한 기초가 되는 자료로 교수·학습 자료의 개발자나 지도교사가 교육의 목표를 달성하기 위한 여러 가지 요소들이 유기적으로 연관되고 있는지 확인하면서 교수·학습 자료의 적용을 통한 분석으로 재구성하여 교수·학습 자료의 완성도를 높여가는 지침서로 활용할 수 있다.

넷째, 주제를 깊이 탐구하는 데는 많은 시간이 필요하므로 탐구과제를 원활히 수행하기 위해 교사는 학습자에게 사전에 충분히 숙지하도록 시간적 여유를 줄 필요가 있다. 예를 들어, 사전 탐구과제를 제시하면 학생들이 활동에 대한 충분한 이해를 바탕으로 창의적인 문제 해결 및 탐구를 할 수 있게 된다. 자신이 설정한 연구 주제에 대하여 충분한 자료 수집 및 분석이 가능하여 자기 주도적인 연구를 경험해 볼 수 있는 기회이며 이를 통해 교사는 수업 중에 학생들이 생각해 온 주제를 토론하는 데 보다 집중할 수 있다.

따라서 자료의 개발자는 이러한 점을 충분히 고려하여 지도 교사가 이를 명심할 수 있도록 교사용 자료에 안내해 주어야 한다.

2. 제언

이상의 연구를 바탕으로 초등학교 주제 탐구형 수학 영재 교수·학습 자료 개발에 관하여 다음의 몇 가지를 제언하고자 한다.

첫째, 아직 지역단위 영재학급, 지역교육청 부설 영재교육원, 대학부설 영재교육원의 학생들 사이에 어떤 차이가 있는지에 대한 구체적인 연구가 이루어지지 않았다. 그러나 이런 연구는 교사가 교수·학습 자료를 구성하는 데 큰 기초가 되는 내용이므로 이에 대한 구체적인 연구가 필요하다.

둘째, 본 연구는 특정 영역의 한 가지 주제만을 중심으로 분석하였으므로 추후로 다른 영역의 여러 주제에 대한 연구를 함으로써 원형을 이용해 학생들의 능력을 고려한 교수·학습

자료가 어떤 차이로 구성되어야 하는가에 대한 연구가 계속되어야겠다.

셋째, 본 연구에서 개발된 교수·학습 자료를 적용한 후 나온 주제 탐구 보고서에 대한 분석이 이루어지지 않았다. 학생들이 설정한 연구 주제에 대한 계획 및 해결 과정을 분석하는 방법에 대한 연구가 계속되어야겠다.

참고문헌

강숙희 외(2000). **영재 교수·학습 자료 개발 연구- 초·중 영재학교/영재학급용-**. 한국교육개발원 수탁연구 CR2000-15. 한국교육개발원.

구자억 외(1999). **수학과 영재 교육과정 시안 - 초·중학교 수학과 영재 교육과정 시안 개발을 위한 기초연구**. 한국 교육개발원.

김공예(2003). **수학 영재학급 운영을 위한 프로그램 개발연구**. 부산교육대학교 대학원 석사학위논문.

김영채(1999). **창의적 문제해결: 창의력의 이론, 개발과 수업**. 교육과학사

김지영(2002). **창의성 신장을 위한 초등학교 수학 영재 학급용 프로그램 개발에 관한 연구**. 인천교육대학교 대학원 석사학위논문.

김지원(2003). **한 수학 영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례 연구**. 인천교육대학교 대학원 석사학위논문.

김홍원, 서혜애, 정현철, 이혜주(2002). **영재 심화 교수·학습 자료 개발 연구 - 초등학교 저학년 영재학급용 -**. 한국교육개발원 수탁연구 CR2002-45. 한국교육개발원.

남승인(1998). 초등학교 수학 영재 지도 방안에 관한 고찰. **한국초등수학교육학회지, 2.**

남승인(2000). 초등학교 저학년 영재지도 방안. **한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지> 5,** 21-37.

박성익(1999). 영재교육과정의 모형과 운영방식에 관한 고찰. **영재교육연구, 9**(1), 1-36.

송상헌(1998). **수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

송상헌(2000). 수학 영재아들을 위한 행동특성 검사지의 개발과 활용에 관한 연구. **학교수학, 2**(2), 427-457.

송상헌(2004). **수학 영재교육과정 및 프로그램 개발의 실제**. 영재교육 담당교원 직무연수 교재 TM 2004-1-2. 90-117. 한국교육개발원.

이경화(2003). 수학 영재교육 자료의 개발과 적용 사례 연구. **수학교육학연구, 13**(3), 365-381.

이종욱(2000). **초등학교 수학 영재의 확산적 사고 발달을 위한 학습 자료 개발 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

전병일(2002). **초등수학과 영재교육의 운영방안 탐색**. 부산교육대학교 대학원 석사학위논문.

조연순(2001). **창의성 계발을 위한 교수·학습 및 평가방법, 창의성 계발을 위한 교육전략 연구 세미나 연구자료 RM 2001-32**. 한국교육개발원.

조완영(2001). **일반학교의 수학과 영재교육 자료 개발의 이론과 실제**. 수학영재 지도교사를 위한 연수교재, 251-263. 대구교육대학부설 초등교육연수원.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* The Univ. of Chicago Press.

NCTM (1987). *Providing opportunities for the mathematically gifed.* K-12. Reston. Virginia. NCTM.

Renzulli, J. S. (1977). *The enrichment triad model: A guide for developing defensible programs for the gifted and talented.* Wethersfield, CT:Creative Learning Press.

Renzulli, J. S. (1978). *What makes giftedness?* Phi Delta Kappan, 180-184.

Samara, J., & Curry, J. (1990). *Writing units that challenge gifted students: A guidebook for & by educators.* MA: Maine Educators of the Gifted and Talented.

A Study on the Development of Project Based Teaching · Learning Materials for the Mathematically gifted

Choi, Jong Hyeon (Janggok Elementary School)
Song, Sang Hun (Gyeong-in National University of Education)

The purpose of this study is to provide the conformity for developing project-based teaching · learning materials for the mathematically gifted students. And this study presents development procedural model in order to improve the effectiveness , analyze its practical usage and examine the verification of the developed materials.

It made the following results regarding the development of project-based teaching · learning materials for gifted children in mathematics. First, it is necessary to provide appropriate teaching · learning model to develop the materials, and the materials should be restructured to be available to other level students. Second, it is suggested to develop a prototype in order to develop teaching · learning materials for gifted children in mathematics, further the prototype needs to be restructured until it satisfies theoretical frame. Third, an introduction should be made before the activity to perform the projects effectively. Fourth, a teacher's guidance should introduce children's examples corresponding to the objectives of learning, the examples of topics examined by students, and teacher's manual and attention for teaching.

This study has a point of presenting the detailed guidelines with regards to development of teaching · learning materials for gifted students in mathematics. This study has a point of presenting the detailed guidees with regards to development of teaching · learning materials for gifted students in mathematics.

* key words : mathematically gifted(수학영재), project-based(주제탐구형), teaching · learning materials for the gifted(영재 교수 · 학습자료), prototype(원형), Parnes's creative problem solving model(파네스의 창의적 문제해결 모형)

논문접수 : 2005. 4. 15.
심사완료 : 2005. 6. 8.

<부록 1> 교수 · 학습 자료(교사용)

수업을 위한 준비활동

1. 주제 : 약수를 활용한 자연수 탐구

2. 주제 설정의 취지

이 단원에서는 학생들이 5학년 가단계에서 공부한 약수와 배수를 이용하여 자연수의 약수를 구해보고 약수의 개수와 자기 자신을 제외한 약수들의 합을 기준으로 자연수를 분류해 보고 그 수 사이에 어떤 특징들이 있는지를 탐구해 보려고 한다.

약수와 배수를 활용한 많은 문제들(예를 들어, 분수의 통분, 기차 시간 문제, 톱니바퀴 문제, 직사각형 모양의 타일을 붙여서 정사각형 만들기 등)의 공통점은 주어진 문제를 해결하기 위한 수단으로 약수와 배수를 활용해서(특히, 최대공약수나 최소공배수) 문제를 해결해야 하는 것이 대부분이었다. 본 활동에서는 지금까지 배운 약수를 이용하여 연구 주제를 선정하고 그 주제에 대한 연구 계획 및 실행을 통하여 연구 보고서를 작성함으로써 약수에 대한 기본 지식뿐만 아니라 여러 가지 사실을 분석하여 일반화해 보고 자신이 탐구하고자 하는 문제 설정과 해결을 통하여 창의적 문제 해결 능력을 향상시키고자 한다.

3. 관련 교육과정

- 약수와 배수(5-가)

4. 학습 목표

(1) 약수를 구할 수 있고, 그 과정 속에서 소수의 개념을 스스로 터득할 수 있다.

(2) 자연수를 여러 기준으로 분류하고 그 분류된 수 사이의 공통점을 분석할 수 있다.

(3) 분류된 수 사이의 공통점이 수를 확장하였을 때에도 항상 성립하는 지를 인터넷 검색을 통하여 확인할 수 있다.

(4) 여러 게임의 규칙을 이해하여 체계적으로 분석하여 이길 수 있는 전략을 발견하려는 자세를 갖는다.

(5) 자신이 쓴 답에 대해 그 이유를 논리적으로 설명하여 쓸 수 있어야 할 뿐 아니라, 여러 사람과 의논하는 과정에서 자신의 생각과 논리의 타당함을 설득할 수 있어야 하므로 수학적 의사 소통 능력을 가늠한다.

5. 주요 학습 개념

가) 약수와 공약수

약수란 자연수 a가 두 개의 자연수의 곱으로 나타날 때 그 두 자연수를 a의 약수라고 하며, 두 자연수 사이의 공통의 약수를 공약수라 한다.

나) 소수와 합성수

소수란 1과 자기 자신을 제외하고는 약수를 가지지 않는 수를 말한다. 합성수란, 1과 소수를 제외한 수를 합성수라 한다. 단, 1은 소수도 합성수도 아니다.

다) 과잉수, 완전수, 부족수

과잉수란 자기를 제외한 약수들의 합이 자신의 수보다 클 때를 이야기하고, 완전수는 자신과 같은 수, 부족수는 자신보다 작은 수를 이야기한다.

6. 주요 기능

1) 약수를 구하는 과정에서 두 수 사이의 곱을 이용하여 그 수를 구한다.
2) 분류된 수를 분석하여 귀납적 사고를 통해 수 사이의 공통점을 찾는다.
3) 단순화하기의 문제 해결 전략을 사용하여 주어진 수 사이의 규칙을 찾는다.
4) 게임에 승리하기 위한 전략을 세운다.
5) 친구들과 서로 새로운 규칙을 정하여 자신의 생각과 논리의 타당함을 설명해야 하므로 수학적 의사소통 능력을 키운다.

7. 준비물

1) 학생 : 계산기
2) 교사 : 학습지

8. 활동 전개 계획

<table>
<tr><td>주제명</td><td colspan="4">약수를 활용한 자연수 탐구</td></tr>
<tr><td rowspan="2">학습 내용</td><td>주활동</td><td colspan="3">• '수학 귀신 이겨라' 게임을 통한 전략 탐구하기
• 약수, 약수의 개수, 약수들의 합 구하기
• 약수의 개수에 따라 자연수 분류하기
• 약수들의 합에 따라 자연수 분류하기</td></tr>
<tr><td>심화활동</td><td colspan="3">• 활동을 통한 문제 발견 및 아이디어 생성을 통한 문제 해결하기 및 보고서 작성하기</td></tr>
<tr><td>학습 단계</td><td colspan="2">교수-학습 활동</td><td>시간 (160분)</td><td>유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td colspan="2">• '수학 귀신을 이겨라' 게임에 승리하기 위한 전략을 세우도록 한다.
• 활동 내용에 따른 학습 목표를 안내한다.</td><td>20</td><td>• 처음에는 게임에 이기는데 초점을 두고 나중에는 게임에 이기기 위한 전략을 세워보는 데 초점을 둔다.</td></tr>
<tr><td>본활동</td><td colspan="2">• 1부터 40까지의 약수를 구하고 개수와 자기 자신을 제외한 약수들의 합을 구한다.
• 약수의 개수가 1개인 것과, 홀수개 짝수개로 분류하고 그 특징을 알아본다.
• 자기 자신을 제외한 약수들의 합에 의해서 완전수, 과잉수, 부족수로 분류한다.
• 완전수의 성질을 알아본다.
• 과잉수의 성질을 알아본다.
• 부족수의 성질을 알아본다.</td><td>60</td><td>• 약수를 구할 때 어떻게 하면 쉽고 간단하게 구할 수 있는지 생각해 본다.
• 소수나 제곱수 등은 현교육과정에 없으므로 용어에 치우치지 말고 성질에 중점을 두고 학습한다.
• 교사 위주의 수업이 아닌 학생들이 발표한 사실에 중심을 두고 진행한다.</td></tr>
<tr><td>심화활동</td><td colspan="2">• 지금까지 배운 내용을 바탕으로 자신이 해결하고 싶은 문제를 설정한다.
• 자신이 설정한 문제를 해결하기에 적합한 방법을 알아본다.
• 자신이 세운 방법으로 문제를 해결한다.</td><td>60</td><td>• 지금까지 배운 내용 속에서 학생들이 연구하고 싶은 과제를 스스로 선택하여 수행하도록 한다.</td></tr>
<tr><td>정리</td><td colspan="2">• 소수, 제곱수, 완전수, 과잉수, 부족수를 이해하였는지 확인한다.
• 자연수를 다른 기준에 따라서 분류해 본다.
• (심화)자신이 문제 해결과정 속에서 알게된 사실이나 새로 발견된 궁금증을 알아본다.</td><td>20</td><td>• 자연수를 분류하기 위한 기준에 대한 타당한 이유를 제시할 수 있도록 한다.</td></tr>
</table>

9. 활동 과정안

약수를 활용한 자연수 탐구

Ⅰ. 활동 안내

여러분은 아마 "자연수 a가 자연수 b로 나누어 떨어질 때 곧 a = b × (자연수)의 꼴로 나타낼 수 있을 때, b를 a의 **약수**, a를 b의 **배수**라고 한다."와 같은 **약속하기(정의)**를 알고 있을 것입니다. 그리고 이러한 약수와 배수를 활용한 많은 문제들(예를 들어, 분수의 통분, 기차 시간 문제, 톱니바퀴 문제, 직사각형 모양의 타일을 붙여서 정사각형 만들기 등)을 풀어 보았을 것입니다. 이제는 여러분들이 지금까지 배운 약수를 이용하여 연구 주제를 선정하고 그 주제에 대한 연구 계획 및 실행을 통하여 연구 보고서를 작성하려고 합니다.

본 활동에서는 약수의 정의와 성질을 활용하여 자연수 전체를 몇 가지 기준에 따라 새롭게 분류하고 그 속에서 공통적인 사실을 찾아보면서 수학의 새로운 세계를 탐구해 봅시다. 그리고 이를 바탕으로 하여 새로운 것을 만들어 내는 재발명의 시간이 되기를 바랍니다.

Ⅱ. 학습 목표

이 활동을 마치고 나면 여러분은

(1) 약수를 구하는 과정을 통하여 소수의 개념을 알게 됩니다.

(2) 자연수를 여러 가지 기준으로 재분류해 봄으로써 수에 대한 감각을 가질 수 있습니다.

(3) 분류된 수를 통하여 그 속에서 여러 가지 사실과 규칙들을 분석할 수 있게 됩니다.

(4) 주어진 게임을 이해하고 그것을 체계적으로 분석하여 게임에 승리하기 위한 전략을 찾아보고, 새로운 게임을 만들어 보려는 태도를 갖게 됩니다.

(5) 자신의 생각을 논리적으로 설명하고 다른 사람과 의논하는 과정에서 수학적으로 의사소통하는 능력을 기를 수 있게 됩니다.

Ⅲ. 준비물

- 학생 : 계산기
- 교사 : 학습지

Ⅳ. 학습 활동 (본활동)

(관심 영역 발견)

▶ 이 단계의 기본 목적은 좀 더 포괄적인 목표 또는 출발지점을 확인하고 선택하는 데 있다. 먼저 약수의 정의를 통해 무엇인지를 알고 "우리가 배우려고 하는 약수를 활용한 것에는 어떤 것들이 있는가?"를 물어 봄으로써 학생들이 약수에 대해서 한 번 생각해 볼 수 있는 기회를 제공한다.[1]

▶ 이 단계에서는 학생들이 게임을 통하여 수를 선택할 때 어떤 수를 선택할 지를 학습하게 된다. 이는 뒤에 약수의 개수를 알아보는 활동과 약수의 합을 이용한 완전수, 과잉수, 부족수와 연계된 활동이다. 따라서 학생들이 이 단계의 학습을 통하여 뒤에 배우게 되는 내용의 중요성을 알 수 있도록 한다.

활동 1. 수학귀신을 이겨라!

▶ 먼저 게임 방법을 학생들이 이해할 수 있도록 한다. 아래 제시된 하나의 예를 통해 학생들이 무엇을 해야 하는지를 알게 한다.

<게임 방법>

① 두 자리 수를 생각합니다.

② 1부터 생각한 수까지 연속해서 씁니다.

③ 위 수에서 하나를 선택하여 '내가 고른 수' 칸에 적고 자기 자신을 제외한 약수 모두를 '수학귀신이 가져간 수' 칸에 적습니다. (가져간 수는 다시 선택할 수 없습니다.)

④ 자신을 제외한 약수가 존재하지 않는 수는 가져갈 수 없습니다.

⑤ 더 이상 고를 수가 없을 때까지 위 ③번의 과정을 반복합니다.

⑥ 자신을 제외한 약수가 더 이상 존재하지 않을 때 남은 수는 모두 '수학귀신이 가져간 수'에 적습니다.

⑥ '내가 고른 수'의 합과 '수학귀신이 가져간 수'의 합을 비교하여 그 합이 많은 사람이 이깁니다.

▶ ③번에서 내가 선택한 수와 수학 귀신이 가져간 수는 다시 선택할 수 없음과 ⑥번에서 더 이상 수를 선택할 수 없을 때 남은 수는 모두 수학 귀신이 가져감을 상기시킨다. 짝이 서로 자신이 얻은 수의 합을 비교하여 누가 더 많이 이겼는지 확인해 볼 수 있다.

---

1 ▶은 지도시의 유의점을 나타내며, ☞은 답을 나타낸다.

<활동지>

수학귀신을 이겨라!

1. 다음에 주어진 수로 여러 번 게임을 해 보아라. (최종 점수만 쓰지 말고 순서에 따라 내가 선택한 수에 따라 수학 귀신이 가져간 수들을 모두 정확히 기록하여라. (게임을 여러 번 해 볼 수도 있다.)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

순서	1차 게임		2차 게임		3차 게임	
	내가 고른 수	수학귀신이 가져간 수	내가 고른 수	수학귀신이 가져간 수	내가 고른 수	수학귀신이 가져간 수
1	10	1, 2, 5	12	1, 2, 3, 4, 6	11	1
2	8	4	10	5	9	3
3	9	3		7, 8, 9, 11	10	2, 5
4	12	6			8	4
5		7, 11			12	6
6						7
합계	39	39	22	56	50	28

2. 내가 처음 선택한 수는 (　　)이다. 그 수를 처음 선택한 이유는 무엇인지 자세히 쓰시오.

☞ 11, 1은 모든 수의 약수이므로 어떤 수를 선택하든지 수학 귀신에게 주게 된다. 또한 소수는 1과 자기 자신만을 약수로 갖고 있기 때문에 처음에 선택하지 않으면 모두 수학 귀신에게 주게 된다. 따라서 처음에 가장 큰 소수를 선택한다.

▶ 11이라는 수를 찾는 것보다 왜 그것을 선택해야 하는지를 아는 것이 더 중요하다. 따라서 학생들에게 이유를 명확히 제시할 수 있도록 한다.

3. 내가 얻을 수 있는 가장 큰 점수는 몇 점입니까?

☞ 50점

▶ 자신이 얻은 점수를 이야기하여 비교하도록 한다. 가장 높은 점수를 얻은 학생을 선정하여 자신이

▶ 자신이 적당한 수를 선택하여 수학 귀신을 이기기 위한 방법을 찾아보도록 한다. 쉽게 게임에 승리하는 학생들에게는 가급적 점수 차이를 많이 나도록 이길 수 있는 방법을 찾아보게 한다.

▶ 학생들이 한 결과를 비교하여 게임에 승리하기 위한 전략을 세워볼 수 있도록 한다.

6. 이 게임에서 수를 선택할 때 고려해야 할 것에는 어떤 것들이 있을까요? 그 수 사이에서 발견할 수 있는 특징들을 적어보시오.

▶ 지금까지 게임을 하면서 자신이 생각한 전략들을 이야기 해 보며 그것의 타당성을 함께 검토해 보도록 한다. 단 이 단계는 학생들의 출발점을 진단하고 학생들에게 학습에 대한 흥미를 유발하기 위한 단계이므로 너무 전략을 알아보는 데 치중하지 않고 학생들이 생각한 것들을 들어보는 것만으로도 충분한 전개가 될 수 있다. 따라서 학생들의 특성을 고려한 수업의 전개가 필요하다.

☞ 가장 먼저 가장 큰 소수를 선택합니다.

☞ 다음에 가장 큰 소수의 제곱을 선택합니다. 왜냐하면 가장 큰 소수를 제외한 나머지 소수는 수학 귀신이 가져가기 때문에 이것을 이용합니다. 이 때 선택하지 않으면 소수의 제곱수는 수학 귀신이 가져가게 됩니다.

(자료 발견)

▶ 이 단계는 학생들이 심화활동에서 자신이 연구하여야 할 연구 주제를 설정하기 위한 기초 자료가 되는 것이다. 이 활동을 전개해 가면서 여러 가지 정보를 수집하여 연구 주제를 선정하는 데 도움이 될 수 있도록 한다. 자신이 이 활동을 하면서 여러 가지 궁금점 등을 가질 수 있도록 한다.

활동 2. 너의 약수를 알려다오!

▶ 1부터 40까지 약수를 구해보고 약수의 개수와 자기 자신을 제외한 약수들의 합을 구해 보도록 한다. 그러나 약수를 구할 때 학생들이 어떻게 구하는 지를 확인해 본다. 작은 수부터 약수를 써 가는 것은 약수를 빠 먹을 수 있으며, 특히 큰 수의 약수를 구할 때는 어려움이 있음을 알고 C=A×B일 때 A, B가 C의 약수가 됨을 알고 같이 써 나갈 수 있도록 한다.

▶ 자신이 적당한 수를 선택하여 수학 귀신을 이기기 위한 방법을 찾아보도록 한다. 쉽게 게임에 승리하는 학생들에게는 가급적 점수 차이를 많이 나도록 이길 수 있는 방법을 찾아보게 한다.

▶ 학생들이 한 결과를 비교하여 게임에 승리하기 위한 전략을 세워볼 수 있도록 한다.

6. 이 게임에서 수를 선택할 때 고려해야 할 것에는 어떤 것들이 있을까요? 그 수 사이에서 발견할 수 있는 특징들을 적어보시오.

▶ 지금까지 게임을 하면서 자신이 생각한 전략들을 이야기 해 보며 그것의 타당성을 함께 검토해 보도록 한다. 단 이 단계는 학생들의 출발점을 진단하고 학생들에게 학습에 대한 흥미를 유발하기 위한 단계이므로 너무 전략을 알아보는 데 치중하지 않고 학생들이 생각한 것들을 들어보는 것만으로도 충분한 전개가 될 수 있다. 따라서 학생들의 특성을 고려한 수업의 전개가 필요하다.

☞ 가장 먼저 가장 큰 소수를 선택합니다.

☞ 다음에 가장 큰 소수의 제곱을 선택합니다. 왜냐하면 가장 큰 소수를 제외한 나머지 소수는 수학 귀신이 가져가기 때문에 이것을 이용합니다. 이 때 선택하지 않으면 소수의 제곱수는 수학 귀신이 가져가게 됩니다.

(자료 발견)

▶ 이 단계는 학생들이 심화활동에서 자신이 연구하여야 할 연구 주제를 설정하기 위한 기초 자료가 되는 것이다. 이 활동을 전개해 가면서 여러 가지 정보를 수집하여 연구 주제를 선정하는 데 도움이 될 수 있도록 한다. 자신이 이 활동을 하면서 여러 가지 궁금점 등을 가질 수 있도록 한다.

활동 2. 너의 약수를 알려다오!

▶ 1부터 40까지 약수를 구해보고 약수의 개수와 자기 자신을 제외한 약수들의 합을 구해 보도록 한다. 그러나 약수를 구할 때 학생들이 어떻게 구하는 지를 확인해 본다. 작은 수부터 약수를 써 가는 것은 약수를 빠 먹을 수 있으며, 특히 큰 수의 약수를 구할 때는 어려움이 있음을 알고 C=A×B일 때 A, B가 C의 약수가 됨을 알고 같이 써 나갈 수 있도록 한다.

▶ 자신이 적당한 수를 선택하여 수학 귀신을 이기기 위한 방법을 찾아보도록 한다. 쉽게 게임에 승리하는 학생들에게는 가급적 점수 차이를 많이 나도록 이길 수 있는 방법을 찾아보게 한다.

▶ 학생들이 한 결과를 비교하여 게임에 승리하기 위한 전략을 세워볼 수 있도록 한다.

6. 이 게임에서 수를 선택할 때 고려해야 할 것에는 어떤 것들이 있을까요? 그 수 사이에서 발견할 수 있는 특징들을 적어보시오.

▶ 지금까지 게임을 하면서 자신이 생각한 전략들을 이야기 해 보며 그것의 타당성을 함께 검토해 보도록 한다. 단 이 단계는 학생들의 출발점을 진단하고 학생들에게 학습에 대한 흥미를 유발하기 위한 단계이므로 너무 전략을 알아보는 데 치중하지 않고 학생들이 생각한 것들을 들어보는 것만으로도 충분한 전개가 될 수 있다. 따라서 학생들의 특성을 고려한 수업의 전개가 필요하다.

☞ 가장 먼저 가장 큰 소수를 선택합니다.

☞ 다음에 가장 큰 소수의 제곱을 선택합니다. 왜냐하면 가장 큰 소수를 제외한 나머지 소수는 수학 귀신이 가져가기 때문에 이것을 이용합니다. 이 때 선택하지 않으면 소수의 제곱수는 수학 귀신이 가져가게 됩니다.

(자료 발견)

▶ 이 단계는 학생들이 심화활동에서 자신이 연구하여야 할 연구 주제를 설정하기 위한 기초 자료가 되는 것이다. 이 활동을 전개해 가면서 여러 가지 정보를 수집하여 연구 주제를 진술하는 데 도움이 될 수 있도록 한다. 자신이 이 활동을 하면서 여러 가지 궁금점 등을 가질 수 있도록 한다.

활동 2. 너의 약수를 알려다오!

▶ 1부터 40까지 약수를 구해보고 약수의 개수와 자기 자신을 제외한 약수들의 합을 구해 보도록 한다. 그러나 약수를 구할 때 학생들이 어떻게 구하는 지를 확인해 본다. 작은 수부터 약수를 써 가는 것은 약수를 빼 먹을 수 있으며, 특히 큰 수의 약수를 구할 때는 어려움이 있음을 알고 C=A×B일 때 A, B가 C의 약수가 됨을 알고 같이 써 나갈 수 있도록 한다.

☞ 1과 자기 자신만을 약수로 가지고 있다.

▶ 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수를 '소수'라고 하나 학생들이 다른 이름을 붙이면 그 이름으로 약속하고 부르도록 한다. 여기서는 '소수'라는 용어의 중요성보다 그 성질의 중요성에 포인트가 있다고 할 수 있다.

약속하기 :
1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수를 **'소수(素數, prime number)'**라고 합니다.

(3) 약수의 개수가 홀수인 수들의 공통점은 무엇입니까? 이러한 수들을 무엇이라고 이름을 붙이면 좋을까요?

☞ 어떤 수를 제곱한 수이다. 어떤 수를 두 번 곱한 수이다. 등

▶ '제곱'이라는 용어나 '제곱수'라는 용어에 너무 치중하지 않는다. 초등학교 수준의 용어를 사용하여도 무방하다. 대학 부설 영재교육원 등의 학생들은 이미 이 용어를 알고 있으나 영재학급이나 지역교육청 부설 영재교육원에 다니는 몇 몇 학생들은 이 용어를 알지 못한다. 전체적인 수준을 분석하여 사용하는 것이 좋다.

▶ 여기까지는 약수의 개수에 따라 수를 분류하여 그 특징을 살펴보았다. 약수의 개수에 따라서 다른 특징이 있는지 알아볼 수 있다. 예를 들어, 어떤 수들이 약수의 개수가 4개이고, 어떤 수들이 6개인지 등을 분석하여 그 특징을 알아볼 수 있다. 그러나 이 내용은 본 주제와는 맞지 않기에 여기서는 언급하지 않는다.

▶ 자신이 적당한 수를 선택하여 수학 귀신을 이기기 위한 방법을 찾아보도록 한다. 쉽게 게임에 승리하는 학생들에게는 가급적 점수 차이를 많이 나도록 이길 수 있는 방법을 찾아보게 한다.

▶ 학생들이 한 결과를 비교하여 게임에 승리하기 위한 전략을 세워볼 수 있도록 한다.

6. 이 게임에서 수를 선택할 때 고려해야 할 것에는 어떤 것들이 있을까요? 그 수 사이에서 발견할 수 있는 특징들을 적어보시오.

▶ 지금까지 게임을 하면서 자신이 생각한 전략들을 이야기 해 보며 그것의 타당성을 함께 검토해 보도록 한다. 단 이 단계는 학생들의 출발점을 진단하고 학생들에게 학습에 대한 흥미를 유발하기 위한 단계이므로 너무 전략을 알아보는 데 치중하지 않고 학생들이 생각한 것들을 들어보는 것만으로도 충분한 전개가 될 수 있다. 따라서 학생들의 특성을 고려한 수업의 전개가 필요하다.

☞ 가장 먼저 가장 큰 소수를 선택합니다.

☞ 다음에 가장 큰 소수의 제곱을 선택합니다. 왜냐하면 가장 큰 소수를 제외한 나머지 소수는 수학 귀신이 가져가기 때문에 이것을 이용합니다. 이 때 선택하지 않으면 소수의 제곱수는 수학 귀신이 가져가게 됩니다.

(자료 발견)

▶ 이 단계는 학생들이 심화활동에서 자신이 연구하여야 할 연구 주제를 설정하기 위한 기초 자료가 되는 것이다. 이 활동을 전개해 가면서 여러 가지 정보를 수집하여 연구 주제를 진술하는 데 도움이 될 수 있도록 한다. 자신이 이 활동을 하면서 여러 가지 궁금점 등을 가질 수 있도록 한다.

활동 2. 너의 약수를 알려다오!

▶ 1부터 40까지 약수를 구해보고 약수의 개수와 자기 자신을 제외한 약수들의 합을 구해 보도록 한다. 그러나 약수를 구할 때 학생들이 어떻게 구하는 지를 확인해 본다. 작은 수부터 약수를 써 가는 것은 약수를 빼 먹을 수 있으며, 특히 큰 수의 약수를 구할 때는 어려움이 있음을 알고 C=A×B일 때 A, B가 C의 약수가 됨을 알고 같이 써 나갈 수 있도록 한다.

활동 4. 약수들의 합에 따라 자연수 분류하기

▶ 전차시 활동에서는 약수들의 개수에 따라서 분류를 하여 보았다. 여기서는 약수들의 합을 이용하여 자연수를 분류하려고 한다. 활동 1에서 약수를 구하면서 자신을 제외한 약수들의 합을 구한 것을 이용하여 수업을 진행한다.

※ 피타고라스학파는 자연수를 아래의 예와 같이 3가지 종류로 구분하였습니다.

▶ 피타고라스학파가 누구인지에 대해서 학생들에게 너무 강조할 필요가 없다. 여기서는 피타고라스학파보다 자연수를 완전수, 과잉수, 부족수를 구분하였다는 것이 중요하다. 그러나 학생들에게 수학사를 통하여 흥미를 가질 수 있도록 하기 위해서 간단히 언급해 주는 것도 괜찮다.

• 완전수 : 자기 자신을 제외한 약수들의 합이 자기 자신과 같은 수
• 과잉수 : 자기 자신을 제외한 약수들의 합이 자기 자신보다 큰 수
• 부족수 : 자기 자신을 제외한 약수들의 합이 자기 자신보다 작은 수

(예) 8의 약수는 1, 2, 4, 8인데 $1 + 2 + 4 < 8$이므로 8은 **부족수**이다.
6의 약수는 1, 2, 3, 6인데 $1 + 2 + 3 = 6$이므로 6은 **완전수**이다.
24의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24인데 $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 > 24$ 이므로 24는 **과잉수**이다.

▶ 예를 통하여 학생들이 부족수, 완전수, 과잉수에 대한 충분한 이해를 바탕으로 다음 활동이 진행되어야 한다. 이것을 이해하지 못하면 뒤에서 이루어지는 모든 활동의 진행이 어렵게 된다. 몇 개의 예를 통하여 이해를 확실히 할 수 있도록 한다.

- 모든 자연수는 위 기준에 따라서 분류할 수 있습니까?

☞ 없다

▶ 다른 수는 문제가 되지 않는데 '1'이라는 수를 어떻게 처리하느냐가 가장 큰 문제이다. 우리가 흔히 1도 부족수라고 생각하기 쉽다. 그러나 부족수의 정의는 자기 자신을 제외한 약수들의 합이 자

가 자신보다 작은 수이다. 그러나 1의 약수는 자기 자신을 제외하고는 없다. 이것을 '0'과 혼동할 수 있다. 그러나 '없다'라는 의미와 '0'이라는 의미를 같이 생각하는 것이 오류이다. 따라서 '1'은 어느 곳에도 넣을 수 없는 수이다. 그러나 이 의미가 학생들에게 혼란을 준다면 처음부터 부족수의 정의를 완전수와 과잉수가 아닌 수 등으로 정의를 내려 1을 부족수에 넣는 방법도 생각할 수 있다.

- 왜 그렇게 생각합니까?

☞ *1은 완전수, 과잉수, 부족수도 아니다. 왜냐하면 1의 약수는 자기 자신 밖에 없으므로 위 정의에 모두 해당이 되지 않는다.*

1. 아래 기준에 따라 자연수를 분류해 보시오.

모임을 만드는 기준		기준에 맞는 수들	특징
자기 자신을 제외한 약수들의 합	과잉수	*12, 18, 20, 24, 30, 36, 40*	
	완전수	*6, 28*	
	부족수	*2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39*	

▶ 학생들이 분류한 것을 확인한다.

▶ 분류된 수의 특징을 파악하여 그 수들 사이의 특징을 파악하여 본다.

(1) 완전수

피타고라스는 어떤 정수가 자기와는 다른 약수 전체의 합과 같아질 때 그 정수를 완전하다고 보았다. 최초의 완전수는 6 이다. 이 수는 1, 2, 3 에 의해서 나누어지고 또 이 숫자들의 합 1+2+3=6 이기도 하다. 두 번째 완전수는 28 이다. 약수는 1, 2, 4, 7, 14 인데 이들 약수의 합이 곧 1+2+4+7+14=28 이다.

6과 28의 완전성을 인정한 사람은 피타고라스학파의 회원들만이 아니었다. 이와는 다른 시대, 다른 문화권에 살던 사람들, 중세의 종교 학자들은 6 과 28 의 완전수가 보여주는 완전함이 곧 우주를 구성하는 조직의 기본질서라고 주장했다. 신은 이 세상을 6일 만에 창조했고 달은 28일마다 한 번씩 지구의 주위를 도는 것이다. 성 아우구스티누스(St. Augustine)는 자신의 저서 <신의 도성 The City of God>에서, 자연계와의 관계 때문이 아니라, 수의 속성 그 자체가 수를 완전하게 만든다고 믿었다. 성인은 이렇게 말했다.

> 신은 이 세상을 한순간에 창조할 수도 있었지만 우리의 완전함을 계시하기 위해 일부러 6일이나 시간을 끌었다. 6은 신이 6일 동안에 세상을 창조했기 때문에 완전한 것이 아니라, 그 자체가 완전한 수이다. 그래서 하나님도 이 완전수를 모델로 하여 세상을 6일 만에 창조한 것이다. 따라서 그 6일 동안의 창조 작업이 설혹 없었다고 하더라도 6은 완전수로 남아 있을 것이다.

고대 그리스인들은 단지 4개의 완전수를 알고 있었다. 니코마쿠스는 그의 Introducio Arithmeticae (circa 100.A.D)에서,

$$P_1=6,\quad P_2=28,\quad P_3=496,\quad P_4=8,128$$

를 소개하였다.

① 니코마쿠스가 찾은 4개의 완전수 사이에서 예상할 수 있는 규칙에는 어떤 것들이 있습니까?

▶ 여기서는 학생들의 예상이 반드시 참일 필요는 없다. 단지, 여기서는 니코마코스가 찾은 수를 통하여 앞으로 나올 수들을 예상함으로써 학생들이 수학자로서의 경험을 가질 수 있도록 한다. 모든 이론들이 처음부터 참일 수는 없다. 여러 가지 가설을 통하여 그 중에 아주 작은 몇 개만이 참으로 인정될 뿐이다. 학생들은 뒤에 오는 수는 어떤 것인지를 알고 있을 수 있다. 그러면 아무 예상도 할 수 없다. 따라서 여기서는 뒤에 수를 모른다고 가정하고 조그마한 가능성이라도 찾을 수 있도록 한다.

☞ *한 자리 수 한 개, 두 자리수 한 개, 세 자리 수 한 개, 네 자리수 한 개이므로 다음 수는 다섯 자리 수이다.*

☞ *일의 자리 수가 6, 8, 6, 8이 반복되므로 다음 수의 일의 자리 수는 6이 될 것이다.*

☞ *일의 자리 수는 6이나 8만 나온다.*

☞ *가장 큰 자리 수가 짝수이다.*

☞ *모두 짝수이다.*

- 이 규칙은 항상 성립합니까? 자신이 생각한 결과가 맞는지를 인터넷에 있는 자료를 이용하여 확인하여 보시오.(인터넷 주소를 정확히 적을 것)

▶ 컴퓨터가 쉽게 준비될 수 있으면 컴퓨터를 이용하여 찾아볼 수 있다. 그러나 컴퓨터가 준비되기 어려우면 교사가 다음 수를 이야기하여 예상한 것이 맞는지 확인할 수 있다.

☞ *P5 = 33550336, P6= 8589869056이다.*

☞ *P5는 다섯 자리 수라고 예상하였으나 여덟 자리 수이고 P6도 십의 자리 수이므로 예상이 틀렸다.*

☞ *P5는 일의 자리 수가 6이었으나 P6의 일의 자리 수가 8이 아니고 6이므로 다음 수가 8이라는 예상은 틀렸다.*

☞ *일의 자리 수가 6과 8만 나온다는 것은 아직까지는 참 일 가능성이 있다. 그래서 P7을 조사하였더니 137,438,691,328이고 P8은 2,305,843,008,139,952,128이므로 '참이다' 예상할 수 있다. 그러나 홀수인 완전수*

$2^{2^4}+1$ http://puzzle.math.net/math/essay/odd_perfect.html 가 발견됨으로써 거짓임을 알 수 있다. (단, 여기서 이것이 거짓임을 바로 이야기할 필요는 없다. 참일 가능성이 있지만 아직 확실한 것은 아니다 라고 넘어가는 것도 가능하다.

☞ *P5 = 33550336이므로 가장 큰 자리 수가 홀수이므로 거짓이다.*

▶ 앞에서도 언급하였지만 여기서는 참인 가설을 세우는 것이 아니라 참일 가능성이 있는 것을 찾아내는 것에 초점이 있으므로 학생들이 실망하지 않도록 한다.

③ $P_1=1+2+3=6$, $P_2=1+2+3+4+5+6+7=28$ 로 나타낼 수 있습니다. 그렇다면, P_3, P_4를 이와 같은 방법으로 나타내어 보시오.

☞ *P4 = 1 + 2 + 3 + ⋯ + 30 + 31 = 496*

☞ *P5 = 1 + 2 + 3 + ⋯ + 126 + 127 = 8128*

▶ 이 문제를 해결하기 위해 몇 몇 학생들은 자연수의 합 구하는 공식인 $\frac{n(n+1)}{2}$을 이용하여 문제를 해결할 수 있으나 여기서는 예상과 확인의 문제 해결 전략을 통하여 찾을 수 있도록 한다.

- 이 사실을 통하여 알 수 있는 사실은 무엇입니까?

☞ *완전수는 1부터 시작하는 연속된 자연수의 합으로 나타낼 수 있다.*

☞ *완전수는 삼각수이다.*

☞ *완전수는 1 + 2 + 3 + ⋯ + (2n-1)로 표현한다. 이 때 (2n-1)은 메르센 소수이다.*

▶ 완전수가 이런 특징을 통하여 신기한 수임을 학생들이 느낄 수 있도록 한다.

④ $P_1=6=2\times3=2^1\times(2^2-1)$, $P_2=28=4\times7=2^2\times(2^3-1)$로 나타낼 수 있습니다. 그렇다면, P_3, P_4를 이와 같은 방법으로 나타내어 보시오.

☞ *P3 = 24 × (25 - 1), P4 = 26 × (27 - 1)*

- 이 사실을 통하여 알 수 있는 사실은 무엇입니까?

☞ *완전수는 2n × (2n+1-1)의 형태로 나타낼 수 있다.*

- $2^n\times(2^{n+1}-1)$의 형태로 만들어지는 수는 모두 완전수입니까?

☞ *아니다.*

▶ 모든 완전수는 $2^n\times(2^{n+1}-1)$의 형태로 제시될 수 있다고 예상할 수 있다. 그러나 120은 $2^3\times(2^4-1)$의 형태로 제시될 수 있지만 완전수가 아니라 과잉수이다. 따라서 거짓이다.

- 위와 같은 방법으로 제시되는 수 중 완전수가 되는 것과 되지 않는 수를 나누어 보시오.

▶ 위에 '아니다'라는 것을 증명하기 위해서 아래 활동을 한다.

▶ $2^n\times(2^{n+1}-1)$에서 n에 수를 넣어서 완전수가 되는지 되지 않는지를 구분하여 표 안에 넣는다. 완전수는 앞에서 P_6까지 구했으므로 그것을 이용한다.

완전수가 되는 수	완전수가 되지 않는 수
$2^1 \times (2^2 - 1)$	$2^3 \times (2^4 - 1)$
$2^2 \times (2^3 - 1)$	25 × (26 − 1)
24 × (25 − 1)	27 × (28 − 1)
26 × (27 − 1)	28 × (29 − 1)
212 × (213 − 1)	29 × (210 − 1)

- 완전수가 되는 수 사이에는 어떤 공통점이 있습니까?

☞ 괄호 안에 있는 수가 소수이다.

☞ 괄호 안에 있는 수는 메스넨 소수이다.

▶ 위 표를 보고서 공통점을 찾는 것은 쉽지 않다. 왜냐면 $(2^7 - 1) = 127$과 $(2^{13} - 1) = 8191$이 소수임을 알기 어렵고, $(2^9 - 1) = 511$, $(2^{10} - 1) = 1023$등이 소수가 아님을 찾는 것이 어렵다. 따라서 위 공통점을 너무 강조할 필요는 없다. 교사가 적당한 발문을 통하여 학생들이 알아갈 수 있도록 할 수 있고, 아니면 교사가 답을 제시할 수도 있다.
(511 = 7 × 73, 1023 = 11 × 93)

▶ '메르센 수'란 $2^n - 1$ (단, n은 자연수)로 표현되는 수를 말한다. 예를 들어 1, 3, 7, 15 … 등이다. 이 수 중에서 소수인 수를 메르센 소수라고 한다. 그러나 이 용어에 대하여 학생들에게 언급할 필요는 없다. 그러나 몇 몇 영재아들 중에서 이 수를 알고 있으므로 교사가 숙지해 두는 것이 좋다.

(2) 과잉수

① 과잉수들 사이에는 어떤 공통점이 있습니까?

☞ 6을 제외한 6의 배수와 20의 배수이다

☞ 약수가 6개이상이다.

☞ 완전수의 배수는 과잉수이다. (단, 완전수 제외)

☞ 모두 짝수이다.

☞ 과잉수가 되기 위해서는 약수의 개수가 6개 이상이어야 한다.

▶ 여기서도 과잉수 사이에 발견되는 공통점들이 모든 경우에 일반화시킬 수 있는 것일 필요는 없다. 단지 40까지의 수 중에서 발견할 수 있는 사실이면 된다. 이 사실을 바탕으로 해서 다음에 수를 확장하여 그것을 일반화 시킬 수 있는 지를 확인하면 된다.

② 위 공통점을 이용하여 40보다 큰 두 자리 수 중에서 과잉수를 예상하여 보고, 그것이 맞는지 확인하여 보시오.

☞ 42, 48, 54, 56, 60, 66, 72, 78, 80, 84, 90, 96

▶ 위에서 예상한 것을 이용하여 과잉수를 찾기는 쉽지 않다. 여기서는 학생들이 두 자리 과잉수 모두를 찾아보는 것이 아니라 위에서 언급한 공통점을 이용하여 과잉수를 예상하여 보고 그것이 과잉수가 맞는지에 초점이 맞추어져 있다.

③ 여러분이 찾은 수 외에 다른 과잉수는 없습니까? 없다면 그 이유는 무엇입니까?

▶ 학생들의 다양한 이유를 들어본다.

④ 위에서 찾은 과잉수들은 모두 짝수입니다. 그렇다면 모든 과잉수는 짝수입니까? 맞다면 그 사실을 증명해 보세요. 그렇지 않다면 홀수 중에서 과잉수를 찾아보세요. (있다면 가장 작은 수는 얼마일까요?

☞ 945

▶ 과잉수 A가 홀수가 되기 위해서는 A는 홀수들의 곱의 형태로 나타나야 한다.이 수가 과잉수가 되기 위해서는 3의 배수, 5의 배수, 7의 배수 등 홀수들의 배수이며 반드시 3, 5, 7 등의 배수이어야 한다. 왜냐하면 이 수들의 배수가 아니면 나머지 홀수의 배수로 과잉수가 되는 것은 불가능하기 때문이다. 따라서, 홀수인 과잉수를 찾아보면 아래와 같다.

A = 3 × 5 = 15일 때, 15는 부족수 A = 3 × 5 × 7 = 105일 때, 105는 부족수 A = 3 × 5 × 7 × 9 = 945일 때, 945는 과잉수이다. 따라서 945가 가장 작은 과잉수이다.

▶ 홀수인 과잉수를 찾는 과정속에서 945보다 큰 수를 찾을 수도 있다. 그 때 그 수가 과잉수가 되는지를 알아보고 '그 수보다 더 작은 수는 없을까?'라는 발문을 통하여 더 작은 과잉수를 찾아보고, 945가 가장 작은 홀수 과잉수임을 증명해 보는 활동을 제시할 수 있다.

(3) 부족수

① 부족수 사이에서 발견할 수 있는 공통점은 무엇입니까?

▶ 부족수에서 공통점을 찾기는 너무 힘들다. 그러나 이 활동 속에서 학생들의 다양한 창의성을 확인할 수 있는 기회이다. 작은 단서들을 모아서 사소한 공통점이라도 찾아볼 수 있도록 한다.

② 위에서 찾은 부족수중에서 완전수가 되기 위해서 1이 부족한 수가 있습니다. 어떤 것들이 있습니까?

(예) 4 > 1 + 2

☞ 2, 4, 8, 16, 32

▶ 앞에 표를 보고 확인한다.

- 이 수들의 공통점은 무엇입니까?

☞ 2의 거듭제곱의 수이다.

☞ 처음 수가 2이고 여기에 2씩 곱해진 수이다.

▶ 용어에 너무 치중하지 않도록 한다.

2. 자연수를 완전수, 과잉수, 부족수로 분류하였을 때, 어느 수가 가장 많겠습니까?

☞ 부족수가 가장 많다.

☞ 모두 같다.

- 왜 그렇게 생각합니까?

▶ 유한개의 범위에서는 부족수가 당연히 가장 많다. 우리가 과잉수나 완전수를 찾기는 어렵지만 부족수를 찾기는 가장 쉽기 때문이다.

▶ '모두 같다'는 답이 어리둥절하게 할 수 있다. 그러나 완전수, 과잉수, 부족수는 유한개 있는 것이 아니라 무한이 많이 있다. 완전수도 계속해서 찾아가는 과정이다. 따라서 모두 무한개이므로 어떤 면에서는 서로 같다고 할 수 있다. 그러나 이 내용을 학생들에게 주지시킬 필요는 없다. 학생들을 더 혼란스럽게 할 수 있기 때문이다. 그러나 무한급수 등을 공부한 학생들에게서 나올 수 있는 답이다.

▶ 지금까지의 활동들은 앞으로 할 활동을 하기 위한 준비 단계이다. 자신이 약수와 관련된 주제 설정을 통해 연구하고 싶은 과제를 위 활동들을 참고하여 설정하는 것이다. 이 활동 속에서 궁금했던 사항이나 앞으로 연구하고 싶은 활동에 어떤 것들이 있었는지 생각해 보도록 한다.

▶ 따라 학습의 형태는 여기까지의 활동으로 제한할 수 있다. 이것은 교사가 목표를 어디에 설정을 하고 있는지에 좌우해야 한다. 학생들의 창의적 사고를 육성하기 위한 활동에 목표를 두었다면 다음 활동으로 제시하고 단순히 주제를 학습하는 데 목표를 두었다면 여기까지 활동으로 제한할 수 있다.

Ⅴ. 후속활동(심화활동)

▶ 이 단계는 앞의 활동을 통하여 자료 수집을 하고 그 수집된 내용을 분석하여 자신이 하고자 하는 문제를 발견하는 활동이다.

(문제 발견)

1. 지금까지 약수를 활용하여 자연수를 여러 가지 기준에 따라서 분류해 보고 그 수들의 특징을 살펴보았습니다. 이 활동을 하면서 생긴 의문점에는 어떤 것들이 있습니까?

☞ 모든 과잉수는 짝수인가?

☞ 6을 제외한 6의 배수는 모두 과잉수인가?

☞ 모든 완전수는 짝수인가?

☞ 자연수를 다른 방법으로 분류할 수 없는가?

☞ 완전수의 일의 자리는 항상 6, 8만 있는가?

☞ 과잉수 중에 약수의 개수가 5개 이하인 수는 없을까?

☞ $2^n \times (2^{n+1}-1)$에서 $(2^{n+1}-1)$이 소수이면 모두 완전수이다. 그렇다면 모든 완전수는 $2^n \times (2^{n+1}-1)$의 형태로 제시할 수 있는가?
☞ '수학 귀신을 이겨라'에서 선택한 수에 대한 최대 정수 차이 사이에서 발견할 수 있는 규칙은 없는가?
☞ 수학 귀신을 이기기 위한 학습 전략은?
▶ 학생들의 다양한 생각들을 들어본다. 위에 제시된 것만으로 한정할 필요는 없다. 이것은 단순히 몇 몇 수업을 통해서 학생들이 가졌던 생각들을 나열한 것이다. 따라서 더 창의적인 문제 제기가 가능할 수 있다.

2. 이 중에서 자신이 해결하고 싶은 것이나 연구하고 싶은 문제는 무엇입니까?
▶ 자신이 연구 하고 싶은 다양한 연구 주제 속에서 하나의 문제를 설정한다.

(아이디어 발견)

자신이 설정한 문제를 해결하기 위해서 알아야 하는 사실이나 적합한 방법에는 어떤 것들이 있습니까?
▶ 자신이 설정한 문제를 해결하기 위해서 앞에서 알았던 사실이나, 여러 가지 전략들을 생각해 본다.

(해결 발견)

문제를 해결하기 위해 가장 적합한 방법을 선택하여 문제를 해결하여 보시오.
▶ 위에 생각한 아이디어를 통해 문제를 해결해 본다.
☞ 모든 과잉수는 짝수인가? → 아니다. 앞에서도 언급하였듯이 홀수인 과잉수가 존재한다.
☞ 6을 제외한 6의 배수는 모두 과잉수인가? → 과잉수이다. 그 이유는 아래와 같다.

- 6의 배수를 $6A$라 할 때, $6A$의 약수는 최소한 1, A, $2A$, $3A$를 가지고 있다.
  따라서, $6A \rightarrow 1 + A + 2A + 3A = 6A + 1$이므로 과잉수이다. (단, A는 1보다 커야한다. A가 1일 때 $6A$는 6이 된다.
- 위 증명을 통해 모든 완전수의 배수는 과잉수임을 알 수 있다.
  $28K \rightarrow 1 + K + 2K + 4K + 7K + 14K = 28K + 1$이므로 과잉수

☞ 모든 완전수는 짝수인가? → 아니다. 이유는 홀수인 과잉수가 발견되었기 때문이다.

$2^{2^n} + 1$ http://puzzle.jmath.net/math/essay/odd_perfect.html)

☞ 자연수를 다른 방법으로 분류할 수 없는가? → 분류할 수 있다.
▶ 다양한 학생들의 창의적인 생각을 유도할 수 있다. 아래 하나의 예를 제시한다.

모든 자연 수는을 소인수 분해하여 아래와 같이 나타낼 수 있다.
$a1^p \times a2^q \times a3^r \cdots an^s$
이 때 $p + q + r + \cdots + s$ 가 그 수의 5분의 1보다 큰 수, 작은 수, 같은 수로 분리하여 이를 많은 수, 적은 수, 같은 수로 분류할 수 있다. (여기서 많은 수, 적은 수, 같은 수는 임의의 용어이다. 또한 5분의 1의 특정한 기준을 잡은 이유는 많은 수와 적은 수의 개수를 비슷하게 맞추기 위해서이다.
- 많은 수 : 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16 등
- 적은 수 : 1, 7, 11, 13, 14, 17, 18, 20 등
- 같은 수 : 5, 10, 15 등

☞ 완전수의 일의 자리는 항상 6, 8만 있는가? → 아니다. 홀수인 완전수가 발견되었기 때문에
☞ 과잉수 중에 약수의 개수가 5개 이하인 수는 없을까? → 없다. 그 이유는 아래와 같다.

만약 5개 이하라면 소인수는 2개 이하이어야 한다. 세 개 이상이면 $a1^p \times a2^q \times a3^r$ 이므로 p, q, r이 1보다 크므로 약수의 개수가 8개 이상이어야 한다. 즉, 소수이거나 두 소수의 곱이 되는 것이다. 소수인 경우 확실히 과잉수가 될 수 없기 때문에 두 소수의 곱의 형태가 되어야 한다.
$n = p \times q$ (p, q는 서로 다른 소수)
따라서, 약수는 1, p, q, $p \times q$ 이므로 자신을 제외한 약수들의 합은 $p + q + 1$이다. $p \times q < (1 + p + q)$인 p, q가 존재해야 한다. 그러나 $p \times q = 6$이상에서는 이를 만족하는 수가 존재하지 않는다. 따라서 과잉수가 되기 위해서는 약수의 개수가 6개 이상이어야 한다.

☞ $2^n \times (2^{n+1}-1)$에서 $(2^{n+1}-1)$이 소수이면 모두 완전수이다. 그렇다면 모든 완전수는 $2^n \times (2^{n+1}-1)$의 형태로 제시할 수 있는가? → 아니다. 홀수인 완전수가 발견되었기 때문에
☞ '수학 귀신을 이겨라'에서 선택한 수에 대한 최대 정수 차이 사이에서 발견할 수 있는 규칙은 없는가?
☞ 수학 귀신을 이기기 위한 학습 전략은?

(수용 발견)

▶ 위에서 자신이 연구한 과제에 대하여 더 연구하고 싶은 과제나 이것이 다른 곳에서 어떻게 사용될 수 있을지를 생각해 보게 한다.
자신이 문제를 해결하면서 알게 된 새로운 사실이나 새롭게 발견된 궁금점에는 어떤 것들이 있습니까? 또한 이 문제를 적용하여 해결할 수 있는 문제나 상황을 이야기해 보시오.
▶ 학생들의 다양한 생각을 들어 본다.

10. 보충 지도 자료

① http://www.ahamath.net/theme/theme_20.htm 완전수의 성질
② http://petit.new21.org/math/math16.htm 메르센 소수
③ http://puzzle.jmath.net/math/essay/odd_perfect.html 홀수 완전수