응용통계연구 제 18권 2호, 2005년, pp. 445-452

14면 주사위에 대한 재고찰

장대흥[1)]

요 약

본 논문을 통하여 경주 안압지에서 출토된 통일신라시대의 14면 주사위인 '목제주령구'의 모사품(8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위)을 굴리는 경우와 던지는 경우로 나누어 시행한 후 구한 빈도적 확률의 결과를 8개의 삼각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위에 대한 연구인 허명회(1994)와 채경철과 이충석(1995)의 연구 결과와 비교하고자 한다.

주요용어: 14면 주사위, 논리적 확률, 빈도적 확률, 고전적 확률

1. 서론

14면 주사위는 정육면체의 8개 꼭지점을 잘라내어 만든다. 자를 때 한 꼭지점에 모이는 세 개의 각 변에 대하여 변의 중심점까지 자르면 8개의 삼각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위가 된다. 허명회(1994a)는 14면 주사위에서 빈도적 확률을 구하는 문제를 얻는 데 기하적 단순 대칭성을 위하여 8개의 삼각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위로 가정하여 14면 주사위에 외접하는 구 겉 표면에서의 구삼각형의 면적을 구하여 삼각면이 나오는 논리적 확률로서 Pr[삼각면이 나오는 사건]= 0.35096으로 계산하였다. 또한, 허명회(1994a)는 실제로 모형을 제작하여 14면 주사위를 2000번 굴려 삼각면이 481번 나와 빈도적 확률로서 Pr[굴렸을 때 삼각면이 나오는 사건]= 0.2405로 제시하였다. 한편, 허명회(1994b)는 14면 주사위를 1000번 던져 삼각면이 343번 나와 빈도적 확률로서 Pr[던졌을 때 삼각면이 나오는 사건]= 0.3430으로 제시하였다. 채경철과 이충석(1995)은 역학 에너지에 대한 가정을 통하여 베이즈 정리를 이용한 논리적 확률로서 Pr[굴렸을 때 삼각면이 나오는 사건]= 0.2376으로 계산하였다.

8개의 삼각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위에서 우리는 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

사실 1. 허명회(1994)가 제시한 논리적 확률은 14면 주사위를 던졌을 때의 빈도적 확률과 매우 유사하다.

사실 2. 채경철과 이충석(1995)이 제시한 논리적 확률은 14면 주사위를 굴렸을 때의 빈도적 확률과 매우 유사하다.

그런데, 고등학교 수학 수학 I 교과서 1종(이강섭외 6인 공저, 2004)의 본문 중에 다음과 같은 구절이 나온다.

1) (608-737)부산광역시 남구 대연3동 599-1 부경대학교 수리과학부 통계학전공, 교수
E-mail: dhjang@pknu.ac.kr

"경주 안압지에서 출토된 '목제주령구'라는 주사위는 보통 우리가 보아 온 6면체가 아니라 특이하게 14면체로 되어 있다. 이 주사위는 6개의 정사각면과 8개의 육각면으로 이루어져 있다. ...(중략)...목제주령구의 각 면의 넓이를 계산하면, 정사각면의 넓이는 6.25 cm^2 이고 육각면의 넓이는 6.265 cm^2 이다. 그러므로 주사위를 굴렸을 때 각 면이 나오는 확률이 거의 같을 것으로 기대된다. 실제로 실험을 해 본 결과 각 면이 나타날 확률은 1/14로 볼 수 있다고 한다."

위의 저자들은 육각면이나 사각면이 나오는 고전적 확률로서 육각면이나 사각면의 넓이를 이용하여 Pr[굴렸을 때 육각면이 나오는 사건]=(6.265×8)/(6.265×8+6.25×6)=0.5720 ≈8/14=0.5714 , Pr[굴렸을 때 사각면이 나오는 사건]=6/14=0.4286 으로 계산할 수 있다고 주장하고 있다. 이러한 14면 주사위는 정육면체의 8개 꼭지점을 자를 때 한 꼭지점에 모이는 세 개의 각 변에 대하여 변의 중심점보다 더 깊이 자르면 8개의 육각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위가 된다. 다음 절에서는 14면 주사위의 확률을 굴렸을 때와 던졌을 때로 나누어 시행하여 빈도적 확률을 각각 구하여 보고, 위의 주장에 대한 타당성을 검토하여 보고, 논리적 확률을 구하여 본다.

2. 14면 주사위의 확률

8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위인 '목제주령구'의 모사품(국립박물관 판매품)을 이용하여 1400번 굴렸을 때의 결과는 다음 표 2.1과 같았다. 굴릴 때 주의를 기울여 여러 차례 구를 만큼 세게 굴렸다.

표 2.1: 14면 주사위를 1400번 굴렸을 때의 결과

면의 모양	각 면에 부여한 번호	각 면이 나온 횟수	합계		전체에 대한 각 면이 나온 비율(%)	전체에 대한 모양 별 비율(%)
육각면	1	107	801	1400	7.64	57.21
	2	102			7.29	
	3	98			7.00	
	4	101			7.21	
	5	87			6.21	
	6	119			8.50	
	7	103			7.36	
	8	84			6.00	
사각면	9	108	599		7.71	42.79
	10	104			7.43	
	11	74			5.29	
	12	130			9.29	
	13	94			6.71	
	14	89			6.36	

표 2.1을 보면 Pr[굴렸을 때 육각면이 나오는 사건]=0.5721이어서 1절에서 이강섭과 6인(2004)

이 제안한 고전적 확률(육각면과 사각면의 면적을 이용한 확률) 8/14와 매우 유사하다. 이 14면 주사위를 1400번 굴렸을 때 각 면이 나온 횟수를 그림으로 그리니 그림 2.1과 같았다. 100번을 중심으로 흩어져 나타나고 있다. 평균적으로 육각면이 101.1번, 사각면이 99.8번 나왔다. 거의 차이가 없고 각 면이 나타날 확률은 1/14로 볼 수 있다.

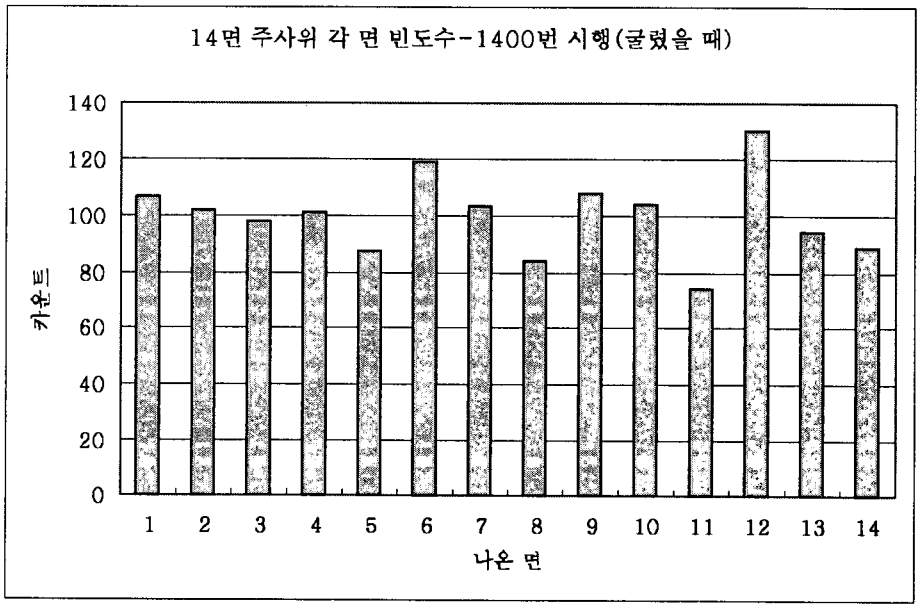

그림 2.1: 14면 주사위를 1400번 굴렸을 때 각 면이 나온 횟수

8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위인 '목제주령구'의 모사품을 이용하여 1400번 던졌을 때의 결과는 다음 표 2.2와 같았다.
표 2.2를 보면 Pr[던졌을 때 육각면이 나오는 사건]=0.4693이었다. 이 14면 주사위를 1400번 던졌을 때 각 면이 나온 횟수를 그림으로 그리니 그림 2.2와 같았다. 그림 2.1과는 다른 패턴을 보이고 있다. 평균적으로 육각면이 82.1번, 사각면이 123.8번 나왔다. 굴렸을 때와 달리 육각면이 사각면보다 오히려 더 적게 나오고 평균이 무려 약 40번 차이가 났다.

두 종류의 14면 주사위에서 삼각면 또는 육각면이 나타나는 빈도적 확률을 비교하면 다음 표 2.3과 같다.

1절에서 이강섭외 6인(2004)이 제안한 고전적 확률의 아이디어(육각면과 사각면의 면적을 이용한 확률 계산)를 8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위인 '목제주령구'의 모사품에 적용하여 보기 위하여 사각면의 넓이와 육각면의 넓이를 구하여 보니 사각면의 넓이는 5.76 cm^2 이고 육각면의 넓이는 5.684 cm^2 이었다. 이 14면 주사위는 다른 6면 주사위처럼 잘 구르게 하기 위하여 모서리를 약간 둥그스름하게 깍아 놓았다. 그래서 육각면과 사각면의 변의 길이를 잴 때 둥그스름한 부분의 한 가운데를 기준으로 하여 재었다. 이강섭외 6인(2004)의 계산으로는 사각면의 넓이는 6.25 cm^2 이고 육각면의

표 2.2: 14면 주사위를 1400번 던졌을 때의 결과

면의 모양	각 면에 부여한 번호	각 면이 나온 횟수	합계		전체에 대한 각 면이 나온 비율(%)	전체에 대한 모양 별 비율(%)
육각면	1	65	657	1400	4.64	46.93
	2	87			6.21	
	3	73			5.21	
	4	89			6.36	
	5	73			5.21	
	6	105			7.50	
	7	83			5.93	
	8	82			5.86	
사각면	9	126	743		9.00	53.07
	10	137			9.79	
	11	130			9.29	
	12	124			8.86	
	13	111			7.93	
	14	115			8.21	

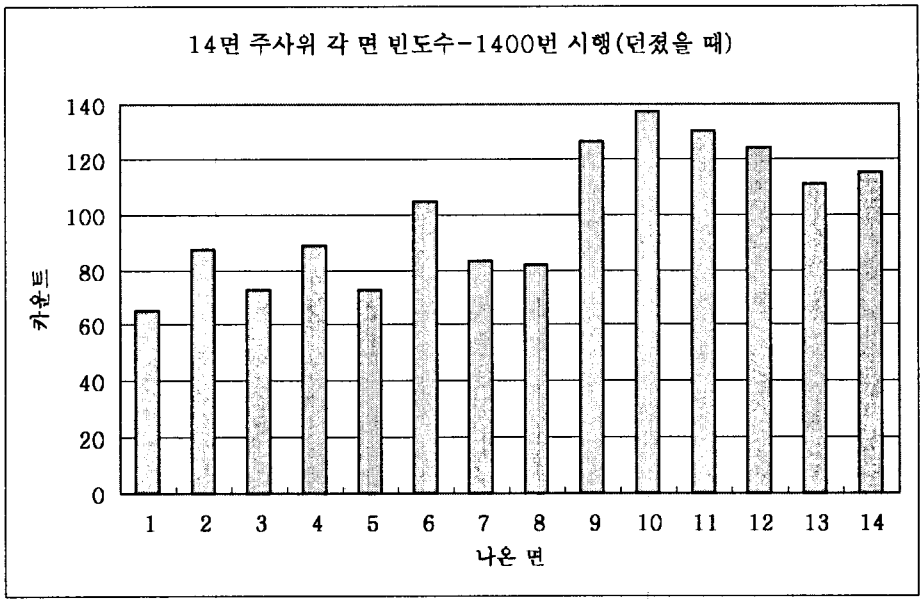

그림 2.2: 14면 주사위를 1400번 던졌을 때 각 면이 나온 횟수

넓이는 6.265 cm^2 이어서 저자가 계산한 넓이와 다른 데 이는 육각면과 사각면의 변의 길이를 잴 때 이 둥그스름한 부분을 어떻게 고려하고 재었는가에 따른 차이라 생각된다. 저자

표 2.3: 두 종류의 14면 주사위에서 삼각면 또는 육각면이 나타나는 빈도적 확률

종류	굴렸을 때	던졌을 때
8개의 삼각면과 6개의 사각면	0.2405	0.3430
8개의 육각면과 6개의 사각면	0.5721	0.4693

의 계산에서는 사각면의 넓이가 약간 크나 이강섭외 6인(2004)의 계산에서는 육각면의 넓이가 약간 큰 것을 봐서 측량의 차이를 고려한다면 사각면의 넓이와 육각면의 넓이는 거의 같다고 볼 수 있다. 모조품이 아닌 진품의 경우 의도적으로 육각면과 사각면의 넓이가 같도록 제작되었을 가능성이 크다. 그러므로 저자의 계산을 이용한다면 Pr[육각면이 나오는 사건]=(5.684×8)/(5.684×8+5.76×6)=0.5682≈8/14=0.5714가 나온다. 이 고전적 확률은 표 2.1에서 보는 것과 같이 이 14면 주사위를 굴렸을 때의 빈도적 확률과 매우 유사하다. 이강섭과 6인(2004)이 제안한 고전적 확률의 아이디어가 타당함을 알 수 있다. 그러나 이러한 아이디어가 물리적 이론이 뒷받침되지 않은 단순한 주장이어서 이러한 주장이 모든 14면 주사위에 적용될 수 있는 지, 8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위인 '목제주령구'의 모사품에만 우연히 적용되었는지 따져 볼 필요가 있다.

1절에서 이강섭과 6인(2004)이 제안한 고전적 확률의 아이디어(육각면과 사각면의 면적을 이용한 확률 계산)를 8개의 삼각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위에 적용하여 보자. 삼각면의 한 변의 길이를 r이라 하면 삼각면의 넓이는 $(\sqrt{3}/4)r^2$이 되고 사각면의 넓이는 r^2이 된다. 그래서 삼각면의 넓이과 사각면의 넓이의 비는 $\sqrt{3}/4 : 1 = 0.4330 : 1$이 된다. 그러므로 Pr[삼각면이 나오는 사건]=(0.4330×8)/(0.4330×8+1×6)=0.3660이 나온다. 이 고전적 확률은 1절에서 제시한 8개의 삼각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위를 던졌을 때의 빈도적 확률과 비교적 유사하다.

8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위인 '목제주령구'의 모사품을 굴렸을 때와 던졌을 때를 합하여 살펴보면 육각면이 나오는 빈도적 확률은 Pr[육각면이 나오는 사건]=(801+657)/2800=0.5207로서 육각면과 사각면이 비슷하게 나타남을 알 수 있다. 반면, 8개의 삼각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위를 굴렸을 때와 던졌을 때를 합하여 살펴보면 삼각면이 나오는 빈도적 확률은 Pr[삼각면이 나오는 사건]=(481+343)/3000=0.2747로서 사각면이 삼각면보다 약 2.6배 많이 나옴을 알 수 있다.

8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위에서의 논리적 확률로서 채경철과 이충석(1995)이 제안한 역학 에너지에 대한 가정과 베이즈 정리를 이용한 논리적 확률을 이용하여 보자. 이 때, 우리가 주의할 사항이 있다. 8개의 삼각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위에서는 삼각면의 각 변이 사각면과 인접하여 있으나, 8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위에서는 육각면의 짧은 변은 다른 육각면과 인접하여 있고 육각면의 긴 변은 사각면과 인접하여 있다는 사실이다. 따라서, 8개의 삼각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위가 구를 때는 삼각면과 사각면이 교대로 출현하여 삼각면(사각면) 다음에는 반드시 사각면(삼각면)이 나타난다. 그

러나 8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위가 구를 때는 사각면 다음에는 육각면이 나타나나 육각면 다음에는 또 다른 육각면 또는 사각면이 나타나게 된다. 그러므로, 8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위에서 육각면이 나올 논리적 확률을 구하기 위하여서는 두 가지 경우, 즉 육각면에서 다른 육각면으로 회전하는 경우와 육각면에서 사각면(또는 반대로)으로 회전하는 경우를 생각하여야 한다. 8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위에서 육각면의 긴 변의 길이를 l이라 하고 짧은 변의 길이를 s라 하자. 육각면의 넓이와 사각면의 넓이가 같다고 가정하고 모서리의 둥그스름한 부분이 없다고 가정하면 $s = ((-6+\sqrt{27+12\sqrt{3}})/3)l$의 관계가 성립한다. 그러면 육각면이 출현하였을 때(즉, 육각면이 바닥에 접하였을 때) 주사위의 중심에서 바닥까지의 길이는 $a = (\sqrt{6}/6)(2l+s)$가 되고 사각면이 출현하였을 때(즉, 사각면이 바닥에 접하였을 때) 주사위의 중심에서 바닥까지의 길이는 $b = (\sqrt{2}/2)(l+s)$이 된다. 육각면에서 인접한 다른 육각면으로 회전하는 과정에서의 중심의 최고 위치는 $c = (2l+s)/2$이고 육각면에서 사각면으로 회전하는 과정에서의 중심의 최고 위치는 $d = (\sqrt{3}/2)(l+s)$이다. 그러므로 육각면이 나오는 사후확률은

$$\Pr[hexagon|S] = \frac{(c-a)+(d-a)}{(c-a)+(d-a)+(d-b)} = 0.6588$$

이 된다. 여기서, S는 정지(stop)를 나타낸다. 실제 8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위인 '목제주령구'의 모사품에서 육각면이 출현하였을 때(즉, 육각면이 바닥에 접하였을 때) 주사위의 중심에서 바닥까지의 길이는 $1.8cm$ 이었고 사각면의 경우는 $1.7cm$ 이었다. 육각면에서 인접한 다른 육각면으로 회전하는 과정에서의 중심의 최고 위치는 $2.2cm$ 이고 육각면에서 사각면으로 회전하는 과정에서의 중심의 최고 위치는 $2.0cm$ 이었다. 그러므로 육각면이 나오는 사후확률은

$$\Pr[hexagon|S] = \frac{(2.2-1.8)+(2.0-1.8)}{(2.2-1.8)+(2.0-1.8)+(2.0-1.7)} = 0.6667$$

이었다. 여기서, S는 정지(stop)를 나타낸다. 위의 두 가지 논리적 확률은 표 2.1에서의 Pr[굴렸을 때 육각면이 나오는 사건]=0.5721과 다소 차이가 난다.

8개의 육각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위에서 우리는 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

사실 3. 육각면과 사각면의 면적이 비슷하다.
사실 4. 이강섭과 6인(2004)이 제안한 고전적 확률은 14면 주사위를 굴렸을 때의 빈도적 확률과 같다.
사실 5. 굴렸을 때와 던졌을 때를 합하여 살펴보면 육각면과 사각면이 비슷하게 나타난다.

위의 사실로 보건대 우리 선조들이 14면 주사위를 만들 때 6면 주사위와 같은 성질을 갖도록 절묘하게 만들었음을 알 수 있다.

3. 결론

우리는 8개의 육각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위를 8개의 삼각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위와 비교하여 보았다. 8개의 육각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위에서 나타나는 빈도 패턴은 8개의 삼각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위에서 나타나는 빈도 패턴과는 다른 양상을 나타나게 됨을 알 수 있었고, 또한 8개의 육각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위에서의 논리적 확률은 8개의 삼각면과 6개의 사각면으로 구성된 14면 주사위와는 다르게 계산되어져야 함을 보였다. 추후 과제로서 1절에서 이강섭과 6인(2004)이 제안한 고전적 확률의 아이디어(육각면과 사각면의 면적을 이용한 확률 계산)가 물리적 이론이 뒷받침되지 않은 단순한 주장이어서 이러한 주장이 모든 14면 주사위에 적용될 수 있는 지, 8개의 육각면과 6개의 정사각면으로 이루어져 있는 14면 주사위인 '목제주령구'의 모사품에만 우연히 적용되었는지 좀 더 자세히 따지는 작업이 있을 것이다.

감사의 글

이 논문을 작성하는 데 큰 도움을 준 이효정(부경대학교 교육대학원 수학전공 석사과정)양에게 감사를 표하며, 이 논문의 오류를 지적하시고 수정의 방향을 제시하여 주신 두 분의 심사위원들과 편집위원께 감사를 드립니다.

참고문헌

이강섭, 허민, 김수환, 이정례, 임영훈, 왕규채, 송교식(2004). <수학 I >, 지학사, 서울.
채경철, 이충석(1995). 14면 주사위 확률에 대한 역학적 고찰, <응용통계연구>, **8**, 179-185.
허명회(1994a). 14면 주사위의 확률, <응용통계연구>, **7**, 113-119.
Huh, M. H.(1994b). Essays on probability from billiards and 14-face dice, *Proceedings of the 8th Japan and Korea Conference of Statistics*, 225-230.

[2004년 11월 접수, 2004년 12월 채택]

Re-consideration of Cuboctahedral Die

Dae-Heung Jang[1)]

ABSTRACT

We considered the frequency and classical probabilities under cuboctahedral die with 8 hexagons and 6 regular squares and compared with the frequency and logical probabilities under cuboctahedral die with 8 triangles and 6 regular squares.

Keywords: Cuboctahedral die, Logical probability, Frequency probability, Classical probability

1) Professor, Division of Mathematical Sciences, Pukyong National University, 599-1, Daeyeon-dong, Nam-gu, Busan 608-737, KOREA
E-mail : dhjang@pknu.ac.kr