

Influence of an Observation on the t -statistic¹⁾

Honggie Kim²⁾ and Kyung Hee Kim³⁾

Abstract

We derive the influence function on t statistic and find its feature; the influence function on t statistic has two forms depending on the value of μ_0 . Sample influence functions are used to verify the validity of the derived influence function. We use random samples from normal distribution to show the validity of the function. The simulation study proves that the obtained influence function is very accurate to in estimating changes in t statistic when an observation is added or deleted.

Keywords : influence function, t statistic

1. 서론

우리는 자료집단에서 다른 관찰값에 비해 유난히 작거나 큰 값으로 보통의 관찰값과는 다른 관찰값을 이상치(Outlier)라 정의한다. 자료분석시 이상치의 발견이 중요한 것은 이상치가 평균과 분산과 같은 통계량들에 많은 영향을 미치고, 자칫하면 이러한 통계량의 오용을 가져오기 때문이다. 이러한 이유로 이상치를 구분하고 판별하는 데 많은 연구가 진행되고 있다.

영향함수(Influence function)는 이상치 발견과 선택에 쓰이는 방법중 하나로 Hampel(1974)에 의해 처음으로 소개되었다. Hampel에 의하여 제안된 영향함수는 모수 및 거의 모든 통계량에 적용 가능함을 보였고, Campbell(1978)은 판별분석(Discriminant analysis)에서 이상치(Outlier) 탐지에 영향함수를 이용하였고, Radhakrishnan and Kshirsagar(1981)은 다변량 분석에서 여러 가지 모수에 대한 이론적인 영향함수들을 유도했다. 또한 Cook(1977), Cook and Weisberg(1980, 1982)는 회귀 분석에서 회귀진단방법으로, Critchley(1985)는 주성분 분석에서 영향력 있는 관찰값을 찾아내기 위해 이 방법을 적용하였다. Kim(1992)은 이차원 분할표의 대응분석에서 얻어진 고유치들에 대한 영향함수를 유도하였으며 이를 다차원 분할표의 대응 분석으로 확장하였고, Kim and Lee(1996), Kim(1998) 등은 χ^2 통계량에 대한 영향함수들을 다루고 있다.

t 통계량이란 모평균 μ 에 대한 통계적 추론에 있어 모표준편차 σ 가 미지인 경우에 σ 를 S 로 대

1) 이 논문은 2004년도 충남대학교 자체 연구비 지원에 의하여 연구되었음

2) Professor, Department of Statistics, Chungnam National University, Daejeon, 360-764 Korea,
E-mail: hgkim@stat.cnu.ac.kr

3) Quality Management Team, National Statistical Office, Daejeon, 302-701, Korea.

제한 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ 를 말하며, 이 통계량이 갖는 확률분포를 t 분포라고 하며, 현실적으로 모표준편차를 알 수 없는 경우의 자료분석시 많이 쓰이는 분포이다.

본 논문에서는 이렇게 많이 활용되는 t 통계량에 대해 각 관찰값이 갖는 영향력을 측정하는 영향함수를 유도하고, 이렇게 구한 함수식의 타당성을 검증하여 영향함수의 활용을 제고하고자 한다. 2절에서는 영향함수의 정의를 통하여 t 통계량에 대한 영향함수를 직접 유도하고 3절에서는 2절에서 구한 수식의 타당성 검증을 위하여 $N(0, 3^2)$ 에서 표본을 추출한 다음 이 표본에 속하는 관찰값에 따라 변하는 t 통계량의 모양을 확인한다.

2. t 통계량과 영향함수

2.1 영향함수의 정의

T 는 분포함수에 대해 실수값을 갖는 범함수(real-valued functional), 즉 일련의 모수이고, $F(t)$ 는 분포함수라고 하자. 그리고 $\delta_x(t)$ 는 실수 공간의 한 점인 x 에서 확률이 1인 분포함수이다. 즉,

$$\delta_x(t) = \begin{cases} 0, & t < x \\ 1, & t \geq x \end{cases}$$

이다. 편의상 $F(t)$ 와 $\delta_x(t)$ 를 F 와 δ_x 로 쓰기로 한다.

분포함수 F 에 임의의 관찰값 x 를 추가함으로써 생기는 F 와 δ_x 의 혼합분포함수 F_ϵ 는

$$F_\epsilon = (1 - \epsilon)F + \epsilon\delta_x, \quad 0 < \epsilon < 1$$

이고, 이때 F_ϵ 를 F 의 섭동(perturbation)이라 한다.

Hampel(1974)은 범함수 $T(F)$ 에 대한 x 의 영향함수(influence function)를 다음과 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned} IF(T, x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(F_\epsilon) - T(F)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T[(1 - \epsilon)F + \epsilon\delta_x] - T(F)}{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.1)$$

식(2.1)에서 영향함수는 범함수 T 에 일차미분계수(first order differential coefficient)를 의미한다. 즉, 추가된 x 에 의해 섭동된 범함수 $T(F_\epsilon)$ 는 원래의 범함수 $T(F)$ 에 비해 어느 정도 차이가 있는지를 나타내므로, 이 크기는 $T(F)$ 에 대한 x 의 고유한 영향을 나타낸다. 식(2.1)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$IF(T, x) = \left(\frac{\partial T(F_\epsilon)}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} \quad (2.2)$$

모집단의 평균과 분산은 범함수 $T(F)$ 의 일종이므로 각각을 범함수

$$\mu(F) = \mu = \int t dF$$

$$\sigma^2(F) = \sigma^2 = \int (t - \mu)^2 dF$$

로 표현하면, 평균과 분산에 대한 영향함수는 식(2.1) 또는 (2.2)를 이용하여 각각 식(2.3)와 식(2.4)을 유도할 수 있다.

$$IF(\mu, x) = x - \mu \tag{2.3}$$

$$IF(\sigma^2, x) = (x - \mu)^2 - \sigma^2 \tag{2.4}$$

식(2.3)을 통하여 x 가 평균에 미치는 영향은 평균과의 거리로 구할 수 있음을 알 수 있다. 즉, x 가 평균보다 적은 값이면 평균을 낮추는 음의 방향으로, 평균보다 큰 값이면 평균을 높이는 양의 방향으로 평균에 영향을 준다는 것을 알 수가 있다. 또한 식(2.4)을 통하여 분산에 대한 영향함수도 x 의 편차 제곱 $(x - \mu)^2$ 과 원래 분산 σ^2 의 차이가 클수록 그 관찰값이 분산에 주는 영향이 크다는 것을 알 수 있다. 이를 이용하여 표준편차 σ 에 대한 영향함수를 구할 수 있다. $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ 이므로 표준편차를 분포함수 F 의 범함수 형태로 표현하면 $\sigma(F) = \sqrt{\sigma^2(F)}$ 로 쓸 수 있으며, 식(2.4)를 이용하여 표준편차의 영향함수는 아래와 같이 유도하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} IF(\sigma, x) &= \left(\frac{\partial \sqrt{\sigma^2(F_\epsilon)}}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2(F_\epsilon)}} \frac{\partial \sigma^2(F_\epsilon)}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} \\ &= \frac{1}{2\sigma(F)} IF(\sigma^2, x) \end{aligned}$$

따라서 $IF(\sigma, x) = \frac{1}{2\sigma} \{(x - \mu)^2 - \sigma^2\}$ 임을 알 수 있다.

2.2 t 통계량에 대한 영향함수

t 분포를 따르는 확률변수인 t 통계량은 표본집단의 평균(\bar{x})을 사용하여 모집단의 평균(μ)이 특정값(μ_0)인지를 판단할 때 쓰이는 것이다. 모분포함수 F 의 범함수 $T(F) = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 를 정의하면 $T(\hat{F}) = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ 는 t 통계량이 된다. 여기서 \hat{F} 은 표본으로부터 얻어지는 경험적 분포(Empirical distribution)이다. 따라서 t 통계량에 대한 영향함수를 유도하기 위해 $T(F) = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 에 대한 영향함수

$IF(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, x)$ 를 우선 구한다.

영향함수는 일차미분계수이므로 상수에 대해 불변(Invariant)이므로,

$$\begin{aligned} IF(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, x) &= \sqrt{n}IF(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}, x) \\ &= \sqrt{n}IF(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu_0}{\sigma}, x) \end{aligned}$$

로 쓸 수 있으며, 일차미분계수의 합(차)에 대한 불변성으로부터 위 식이

$$\sqrt{n} [IF(\frac{\mu}{\sigma}, x) - IF(\frac{\mu_0}{\sigma}, x)] \tag{2.5}$$

이 됨을 알 수 있다.

이제 구해진 $IF(\mu, x)$ 와 $IF(\sigma, x)$ 를 이용하여 우선 $IF(\frac{\mu}{\sigma}, x)$ 를 구해 보면,

$$\begin{aligned} IF(\frac{\mu}{\sigma}, x) &= \frac{(x - \mu)\sigma - \mu IF(\sigma, x)}{\sigma^2} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} [(x - \mu)\sigma - \mu \frac{1}{2\sigma} \{ (x - \mu)^2 - \sigma^2 \}] \\ &= \frac{(x - \mu)}{\sigma} - \frac{\mu}{2\sigma^3} \{ (x - \mu)^2 - \sigma^2 \} \end{aligned}$$

이 된다. 다음은 $IF(\frac{\mu_0}{\sigma}, x)$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} IF(\frac{\mu_0}{\sigma}, x) &= \mu_0 IF(\frac{1}{\sigma}, x) \\ &= \mu_0 \left\{ \frac{-IF(\sigma, x)}{\sigma^2} \right\} \\ &= -\mu_0 \frac{(x - \mu)^2 - \sigma^2}{2\sigma^3} \end{aligned}$$

위 두 결과를 식(2.5)에 대입하면

$$IF(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, x) = \sqrt{n} \cdot \left[\frac{(x - \mu)}{\sigma} - \frac{\mu}{2\sigma^3} \{ (x - \mu)^2 - \sigma^2 \} + \mu_0 \frac{(x - \mu)^2 - \sigma^2}{2\sigma^3} \right]$$

이 되며, 이 식을 정리하면 식(2.6)를 구할 수 있다.

$$IF(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, x) = \sqrt{n} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} - (\mu - \mu_0) \frac{(x - \mu)^2 - \sigma^2}{2\sigma^3} \right) \tag{2.6}$$

식(2.6)에서 μ, σ, μ_0 는 상수에 해당되므로, 식(2.6)는 x 에 대한 이차식이고, μ 및 μ_0 의 관계에 의하여 두 가지 모양을 가진다.

첫 번째 경우인 $\mu \simeq \mu_0$ 에 대해서는 $IF(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, x) = \sqrt{n}(\frac{x - \mu}{\sigma})$ 로 정리할 수 있으며, 이는 x 에 대한 일차식이고, 이 식의 특징은 x 의 절편이 μ 가 된다는 것이다. 다시 말하면 이 식이 나타내는

직선이 x 축과 만날 때의 값이 μ 가 된다는 것이다.

두 번째 경우인 $\mu \neq \mu_0$ 에 대해서는 x 에 대한 2차식 모양이며, μ_0 에 따라 최대(소)값을 가진다. 어떠한 x 값에서 최대(소)값을 갖는지를 알기 위하여 x 에 대해 미분을 해 보면, x 가 다음 값을 가질 때 최대(소)값을 가진다.

$$x = \frac{\sigma^2 + \mu^2 - \mu_0\mu}{\mu - \mu_0} \quad (2.7)$$

2.3 표본으로부터 얻어지는 영향함수

범함수 $T(F)$ 는 모집단 분포함수 F 에서 정의되는 모수 또는 모수의 함수로 정의된다. 이러한 모수 또는 모수의 함수를 표본으로부터 추정하는 경험적 분포함수 \hat{F} 에 의하여 정의된 $T(\hat{F})$ 을 써서 구할 수 있는데 이를 추정량이라 부르며 넓은 의미의 통계량이 된다. 한편 이 경험적 분포함수를 이용하여 두 가지 형태의 영향함수를 구할 수 있다. 그 하나는 경험적 영향함수(Empirical Influence Function, EIF)로 분포함수 F 대신 \hat{F} 을 이용하여 구한 영향함수식으로 범함수의 영향함수식에서 모수대신 모수의 추정량으로 구하게 되며, t 에 대한 경험적 영향함수의 x_i 에서의 함수값들은 아래와 같이 구해진다.

$$EIF\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{s}, x_i\right) = \sqrt{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} - (\bar{x} - \mu_0) \frac{(x_i - \bar{x})^2 - s^2}{2s^3} \right) \quad (2.8)$$

영향함수 유도에서 분포함수 F 대신 \hat{F} 을 이용하고 섭동인 ϵ 대신 $\epsilon = -1/(n-1)$ 을 사용하여 얻어지는 영향함수를 표본영향함수(Sample Influence Function, SIF)라 하며 관찰값 x_i 에서의 함수값은 다음과 같이 주어지게 된다.

$$\begin{aligned} SIF(t, x_i) &= (n-1)(T(\hat{F}_{(i)}) - T(\hat{F})) \\ &= (n-1)(t_{(i)} - t) \end{aligned}$$

여기서 $\hat{F}_{(i)}$ 는 x_i 를 뺀 경험적 분포함수이고 $t_{(i)}$ 는 x_i 를 뺀 후의 t 통계량의 값이다.

한편 영향함수의 타당성은 EIF의 타당성으로부터 얻어지고, EIF의 타당성은 SIF와 비교함으로써 얻어 질수 있다.

3. 모의실험

제 2절에서 구한 t 통계량에 대한 영향함수의 타당성을 검증하기 위하여 모의실험을 실시하였다. 모의실험은 정규분포 $N(0, 3^2)$ 에서 30개의 표본을 추출하고 $\bar{x}_{(i)}$, $s_{(i)}$ 를 구하였다. 표본에서 x_i 가 제외된 것을 (i) 로 표시한다. 즉, $\bar{x}_{(i)}$ 는 i 번째 관찰값 x_i 가 제외된 표본의 평균을 의미한다. 또한 이렇게 구한 평균 및 표준편차를 이용하여 $t_{(i)}$ 를 아래와 같이 계산하였다.

$$t_{(i)} = \frac{\bar{x}_{(i)} - \mu_0}{s_{(i)}/\sqrt{n-1}} \tag{3.1}$$

식 (2.8)에서 \bar{x} 와 μ_0 의 관계에 따라 변하는 $EIF(\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}, x)$ 를 검증하기 위해 i) H_0 가 사실인 경우($\mu_0 = 0$), ii) H_0 가 사실이 아닌 경우($\mu_0 \neq 0$)별로 t 통계량을 구하였으며, 구한 t 통계량인 식(3.2)의 표본영향함수와 경험적 영향함수의 근사적 동일성을 만족하는지 알아보았다.

$$t_{(i)} - t \approx -\frac{EIF(t, x_i)}{n-1} \tag{3.2}$$

3.1 H_0 가 사실인 경우($\mu_0 = 0$)

<그림 1>에서 보면 표본평균이 0.213으로 0보다는 다소 커서 이차함수의 값이 남아 있어 완전한 일직선은 아니지만 거의 일직선으로 나타났으며, <표 1>에서 $\mu_0 = 0$ 일 때 $EIF(t, x_i)$ 에서 가장 작은 값을 보인 것은 $\bar{x} = 0.213$ 와 가장 가까운 거리에 있는 $x_i = 0.251$ 로 구해졌다. <그림 2>로부터 식(3.2)가 만족스러움을 볼 수 있다.

3.2 H_0 가 사실이 아닌 경우($\mu_0 \neq 0$)

두 번째는 H_0 가 사실이 아닌 경우로 μ 가 실제로는 0이지만 σ 또는 2σ 라고 가정한 경우이며, 이 때 t 통계량의 변화를 알아보았다. H_0 가 사실일 때 구한 30개 표본에서 μ_0 의 값을 3 또는 6으로 하여 t 통계량을 구하였다. <그림 3>은 2장에서 구한 $\mu_0 \neq 0$ 일 때 t 통계량의 경험적 영향함수는 이차식임을 보여주고 있다. 최소값을 찾기 위하여 역시 2장에서 유도한 식(2.7)에 표본에서 구한 값을 대입하여 $\mu_0 = 3$ 일 때는 $\frac{2.687^2 + 0.213^2 - 0.213 \cdot 3}{(0.213 - 3)} = -2.378$, $\mu_0 = 6$ 일 때 $\frac{2.687^2 + 0.213^2 - 0.213 \cdot 6}{(0.213 - 6)} = -1.035$ 를 각각 구하였고, <그림 3>과 <표 1>에서 이를 역시 증명해 주고 있다. <그림 4>는 $\mu_0 = 3$ 일 때 $t_{(i)} - t$ 와 $-\frac{EIF(t, x_i)}{29}$ 에 대한 것으로, 식(3.2)가 만족됨을 보여주고 있다. $\mu_0 = 6$ 일때도 역시 마찬가지로의 결과를 얻을 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 실제로 모수값을 알지 못하는 경우에 널리 활용되는 검정통계량인 t 통계량에 대한 영향함수 $IF(t, x)$ 를 다음과 같이 유도하였다.

즉,

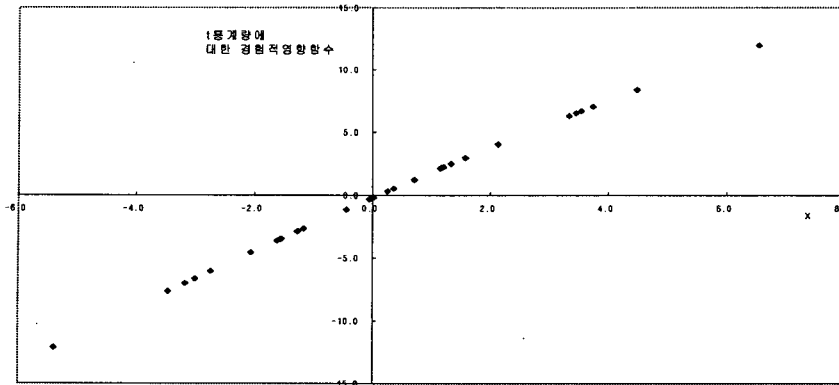
$$IF\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, x\right) = \sqrt{n} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} - (\mu - \mu_0) \frac{(x - \mu)^2 - \sigma^2}{2\sigma^3} \right)$$

으로 구하였다.

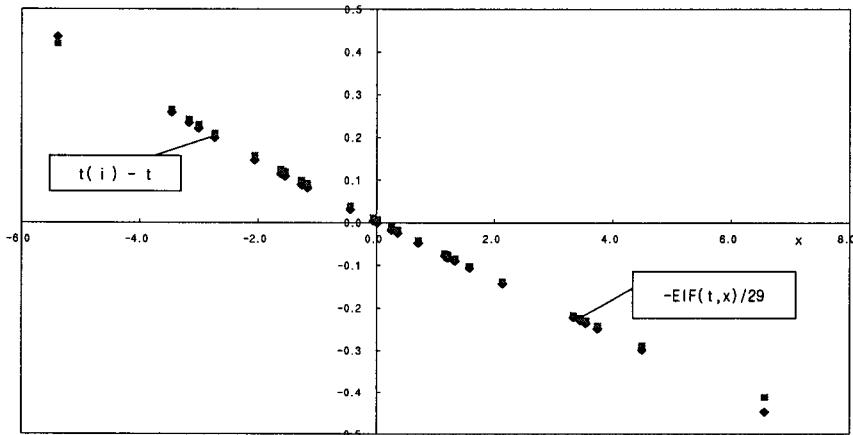
이 식에서 μ 와 μ_0 의 관계에 따라 $IF(t, x)$ 가 x 에 대한 일차식과 이차식의 두 가지 모양을 가진다는 것을 발견하였다. 즉, $\mu = \mu_0$ 일 때는 일차식으로 x 의 절편이 μ 인 일직선이고, $\mu \neq \mu_0$ 일 때는 이차식으로 $x = \frac{\sigma^2 + \mu^2 - \mu_0\mu}{(\mu - \mu_0)}$ 에서 최대(소) 값을 가진다. 모의실험을 통하여 유도된 t 통계량에 대한 영향함수가 타당함을 보였으며, 또한 일차식 또는 이차식 모두 경험적 영향함수의 성질인 $t_{(i)} - t \approx -\frac{EIF(t, x_i)}{n-1}$ 를 만족시킴을 보였다.

<표 1> μ_0 에 따른 t 통계량에 대한 경험적 영향함수

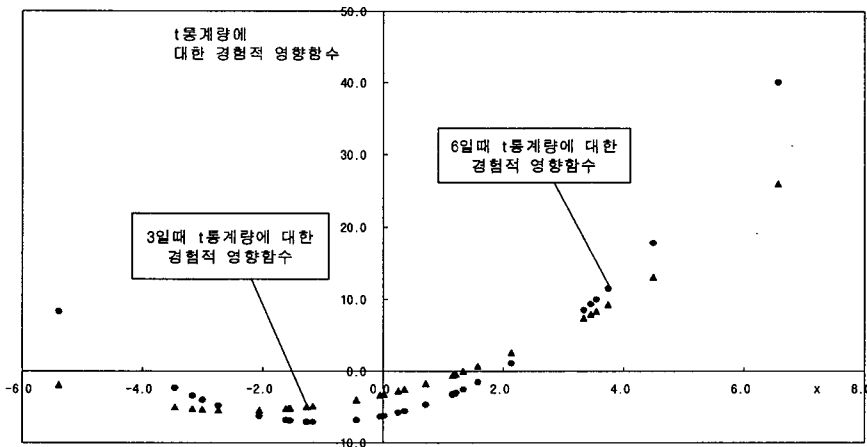
ID	x_i	$\mu_0 = 0$ 일 때 t 통계량의 영향함수		$\mu_0 = 3$ 일 때 t 통계량의 영향함수		$\mu_0 = 6$ 일 때 t 통계량의 영향함수	
		$t_{(i)}$	$EIF(t, x_i)$	$t_{(i)}$	$EIF(t, x_i)$	$t_{(i)}$	$EIF(t, x_i)$
1	-5.388	0.869	-12.140	-5.557	-1.919	-11.983	8.303
2	-3.460	0.692	-7.674	-5.423	-5.021	-11.537	-2.367
3	-3.168	0.668	-7.017	-5.414	-5.236	-11.495	-3.455
4	-3.004	0.654	-6.650	-5.410	-5.327	-11.474	-4.004
5	-2.735	0.633	-6.053	-5.405	-5.431	-11.444	-4.809
6	-2.055	0.580	-4.561	-5.403	-5.440	-11.387	-6.319
7	-1.614	0.548	-3.607	-5.409	-5.251	-11.366	-6.895
8	-1.564	0.544	-3.500	-5.410	-5.220	-11.364	-6.941
9	-1.539	0.542	-3.446	-5.411	-5.204	-11.363	-6.962
10	-1.269	0.522	-2.870	-5.417	-4.997	-11.357	-7.125
11	-1.262	0.522	-2.855	-5.417	-4.991	-11.357	-7.127
12	-1.165	0.515	-2.648	-5.420	-4.902	-11.355	-7.156
13	-0.441	0.464	-1.128	-5.450	-4.004	-11.363	-6.881
14	-0.050	0.437	-0.321	-5.471	-3.349	-11.380	-6.377
15	0.015	0.432	-0.187	-5.475	-3.228	-11.383	-6.269
16	0.251	0.416	0.295	-5.491	-2.762	-11.398	-5.819
17	0.356	0.409	0.509	-5.498	-2.539	-11.406	-5.588
18	0.707	0.386	1.217	-5.525	-1.737	-11.436	-4.691
19	1.154	0.356	2.109	-5.564	-0.573	-11.485	-3.255
20	1.182	0.354	2.165	-5.567	-0.494	-11.488	-3.153
21	1.215	0.352	2.230	-5.570	-0.402	-11.492	-3.033
22	1.339	0.344	2.473	-5.582	-0.047	-11.508	-2.568
23	1.583	0.327	2.954	-5.607	0.692	-11.542	-1.570
24	2.140	0.291	4.034	-5.671	2.549	-11.634	1.065
25	3.342	0.212	6.300	-5.844	7.388	-11.899	8.475
26	3.458	0.204	6.515	-5.863	7.916	-11.930	9.318
27	3.548	0.198	6.681	-5.879	8.333	-11.955	9.985
28	3.746	0.185	7.044	-5.913	9.271	-12.012	11.499
29	4.493	0.135	8.391	-6.060	13.092	-12.254	17.792
30	6.567	-0.014	11.956	-6.616	25.992	-13.218	40.029



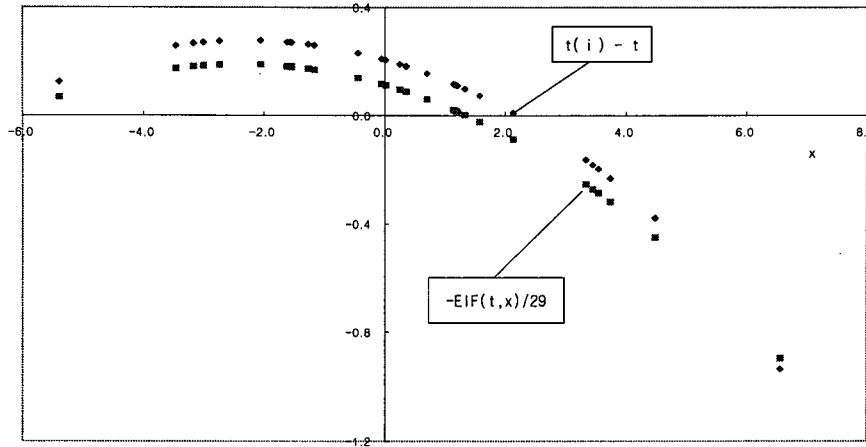
< 그림 1 > t통계량에 대한 경험적 영향함수($\mu_0 = 0$)



< 그림 2 > t통계량과 경험적 영향함수관계($\mu_0 = 0$)



< 그림 3 > t통계량에 대한 경험적 영향함수 ($\mu_0 = 3$ & $\mu_0 = 6$)



< 그림 4 > t 통계량과 경험적 영향함수관계($\mu_0 = 3$)

참고문헌

[1] Campbell, N.A.(1978). The influence function as an aid in outlier detection in discrimination analysis, *Applied Statistics*, Vol. 27, 251-258

[2] Cook, R.D.(1977). Detection of influential observation in linear regression, *Technometrics*, Vol 19, 15-18

[3] Cook, R.D. and Weisberg, S.(1980). Characterization of an empirical influence function for detecting influential cases in regression, *Technometrics*, Vol 22, 495-508

[4] Cook, R.D. and Weisberg, S.(1982). *Residual and Influence in Regression*, Chapman and Hall, New York

[5] Critchley, F.(1985). Influence in principal components analysis, *Biometrika*, Vol. 72, 627-626

[6] Hampel, F.(1974). The influence curve and its role in robust estimation, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 69, 383-393

[7] Kim, H.(1992). Measures of influence in correspondence analysis, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 40, 201-217

[8] Kim, H.(1994). Influence functions in multiple correspondence analysis, *The Korean Journal of Applied Statistics*, Vol. 7, 69-74

[9] Kim, H.(1998). A study on cell influences to χ^2 statistics in contingency tables, *The Korean Communications in Statistics*, Vol. 5, 35-42

[10] Kim, H. and Lee, H.(1996). Influence function on χ^2 statistics in contingency tables, *The Korean Communications in Statistics*, Vol. 7, 69-76

[11] Kim, H., Lee, Y., Shin., and Lee, S.(2003). Influence function on tolerance limit, *The Korean Communications in Statistics*, Vol. 10, 497-505

[12] Lee, H. and Kim, H.(2003). The changes in χ^2 statistic when a row is deleted from a

contingency table, *The Korean Communications in Statistics*, Vol. 10, 305-317

- [13] Radhakrishnan, R and Kshirsagar, A.M.(1981). Influence functions for certain parameters in multi-variate analysis, *Communications in Statistics A*, Vol. 10, 515-529

[2005년 2월 접수, 2005년 6월 채택]