

# 포화된 2상 지반의 동적해석을 위한 2차원 무한요소

## Two-Dimensional Infinite Element for Dynamic Analysis of Saturated Two-Phase Soil

김재민\*  
Kim, Jae-Min

### 국문요약

이 논문에서는 포화된 2상 지반의 동적해석에서 원역을 모형화하기 위한 새로운 무한요소를 제안하였다. 무한요소법은 무한영역 또는 반무한영역을 모형화해야 하는 공학문제에 효과적으로 적용되어 왔다. 그러나 현재까지 개발된 2상지반의 동적해석을 위한 무한요소는 형상함수에 사용될 수 있는 파동성분이 2개(P1파와 P2파)로 한정되어 있다. 이 논문에서는 이와 같은 제한을 없애고 임의 개수의 파동성분을 고려할 수 있도록 하는 정식화 과정을 제안하였다. 구조물을 포함하는 근역은 유한요소로 나타내며 원역은 평행층상 반무한 지반으로 가정하였다. 제안된 무한요소의 타당성은 1차원 및 2차원 파동전달문제를 해석하고 이를 이론해 및 정밀수치해석 해와 비교하여 검증하였다.

주요어 : 2상 지반, 무한요소, 유한요소, 동적해석, 파동전달

### ABSTRACT

This paper presents a new infinite element for modeling far-field region in dynamic analysis of a fluid-saturated two-phase medium. The infinite element method combined to the finite element method has been effectively applied to several engineering problems where the full space or half-space medium should be modeled. However, the currently available infinite element for dynamic analysis of two-phase porous medium has a limitation that P1 and P2 waves can only be included in shape function expressing behavior of the body. In this paper, the infinite element method is extended to simulate arbitrary number of multi-component waves. For this purpose, the far-field of the porous medium is assumed to be a layered half-space, while the near-field includes structures as well as irregular soil medium. The accuracy and effectiveness of the proposed element have demonstrated using 1-D and 2-D wave propagation problems.

Key words : two-phase soil, infinite element, finite element, dynamic analysis, wave propagation

## 1. 서론

그림 1과 같이 간극유체(pore fluid)와 고체골격(solid skeleton)으로 이루어진 포화된 2상 매질에 동적하중이 작용될 때의 거동을 이해하려는 연구는 50여년 전부터 다양하게 수행되어 왔다. 현재 가장 많이 사용되는 이론은 탄성거동을 하는 고체골격에 유체가 포화되어 있고 매질 내에서 유체의 흐름은 포아셀유동이라고 가정하는 Biot 이론<sup>(1)</sup>이다. 이 연구에서도 이 이론에 따라 정식화를 수행하였다.

지반공학분야에서는 오래 전부터 지반을 2상 또는 3상 매질로 근사하고 관성력 성분을 무시하여 압밀해석, 사면안정 해석 등에 위 이론을 적용하여 왔다. 그리고 구조공학분야에도 이론적인 연구와 더불어 유한요소법과 같은 수치해석 기법을 활용하여 동적하중 작용시 과잉간극수압 예측등에 활용되고 있다.<sup>(2)-(4)</sup> 아울러 포화지반에서 무한 원역으로 전달되는 파동전달특성을 효과적으로 묘사하기 위하여 유한요소법과 연계한 IEM(Infinite Element Method)<sup>(5),(6)</sup>, TLM(Thin Layer Method)<sup>(7),(8)</sup>, BEM<sup>(9)</sup>, ABC(Artificial Boundary Condition) 기법<sup>(10)</sup> 등이 개발되어 왔다.

이 연구에서는 IEM 기법을 사용하여 포화된 원역지반을

모델링할 때 효과적으로 사용될 수 있는 무한요소를 제안하고 이의 정확성과 효율성을 검증하였다. FE-IE 방법에 의한 포화지반-구조물 상호작용의 모델링 개요는 그림 2와 같다.

## 2. 유한요소-무한요소 해석법에 의한 운동방정식

### 2.1 지배방정식

고체-유체 2상 혼합체와 간극유체에서 모멘텀평형방정식은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

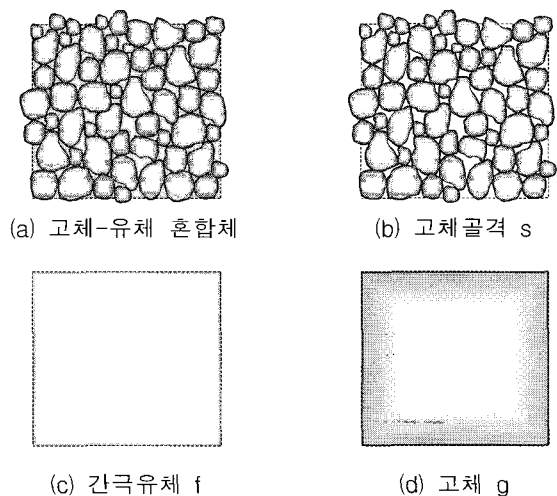


그림 1 2상 지반에서 각 상의 정의

\* 정회원·여수대학교 건설환경공학부, 부교수  
(대표전자: jm4kim@yosu.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2005년 10월 31일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.  
(논문접수일 : 2005. 6. 14 / 심사종료일 : 2005. 7. 18)

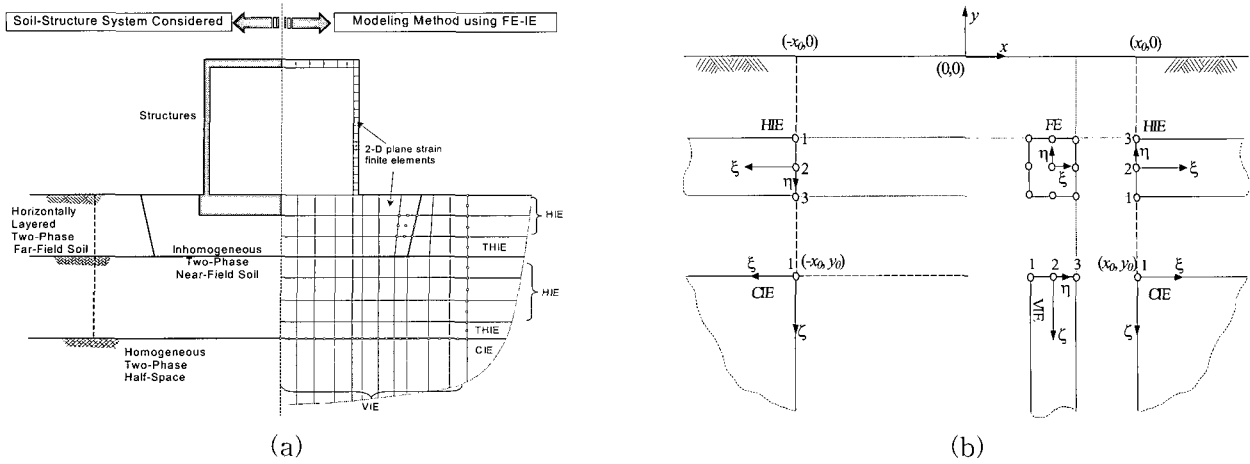


그림 2 무한영역이 포함된 2상 지반-구조물 상호작용문제의 FE-IE 모델링 방법

$$\begin{aligned} [\partial]^T \{\sigma\} &= \rho \{\ddot{u}\} + \rho_f \{\ddot{w}\} \quad (1) \\ -\{\nabla\} p &= \rho_f \{\ddot{u}\} + \frac{\rho_f}{n} \{\ddot{w}\} + \frac{1}{k} \{\dot{w}\} \quad (2) \end{aligned}$$

여기서  $[\partial]$ 는 다음과 같은 미분연산자로서 2D 문제에서 변위와 변형을 사이의 관계를 나타낸다.

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

즉, 고체골격의 변형도벡터는  $\{\epsilon''\} = [\partial]\{u\}$ 로 정의되며 간극유체 상대변위의 변형도벡터는  $\{\epsilon''\} = [\partial]\{w\}$ 이다. 그리고  $\{\sigma\}$  = 전응력벡터,  $\{u\}$  = 고체골격의 변위벡터,  $\{w\}$  = 간극유체의 상대변위벡터로서  $\{w\} = n\{U\} - \{u\}$ 이고,  $P$  = 간극유체의 압력,  $\{U\}$  = 간극유체의 절대변위,  $n$  = 간극비,  $\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_f$ 로서 혼합체의 질량밀도이며,  $\rho_s$  = 고체 자체의 질량밀도,  $\rho_f$  = 간극유체의 질량밀도,  $k = k'/(\rho_f g)$ ,  $k'$  = 투수계수,  $g$  = 중력가속도이다.

한편, 간극유체의 압력  $P$ 는 고체-유체 혼합체의 질량평형방정식으로부터 다음과 같은 구성관계를 얻을 수 있다.

$$p = -Q\zeta'' - \alpha Q\zeta'' \quad (4)$$

여기서

$$\zeta'' = \{\nabla\}^T \{u\} = \{m\}^T \{\epsilon''\}, \quad (5a)$$

$$\zeta'' = \{\nabla\}^T \{w\} = \{m\}^T \{\epsilon''\} \quad (5b)$$

$$Q = \frac{K_f}{n + (\alpha - n)K_f / K_s} \quad (6)$$

여기서  $\{m\} = \langle 1 \ 1 \ 0 \rangle^T$ 이고,  $Q$ 는 간극유체의 압축성을 나타내는 계수이며  $K_f$ 는 간극유체의 체적탄성계수이다.

전응력벡터를 다음과 같이 유효응력과 간극유체압으로 분

리하여 나타내면 고체골격에서 응력과 변형을 사이의 관계를 정의할 수 있다.

$$\{\sigma\} = \{\sigma''\} - \alpha \{m\} P \quad (7)$$

$$\{\sigma''\} = [D''] \{\epsilon''\} \quad (8)$$

여기서  $\{\alpha''\}$  = 유효응력벡터,  $[D'']$  = 고체골격의 탄성행렬,  $\alpha = 1 - K_s / K_g$  이고,  $K_s = \lambda_s = \frac{2}{3} G_s$ 로서 고체골격만의 체적탄성계수이며  $K_g$ 는 고체 자체의 체적탄성계수이다.

$$\lambda_s = \frac{\nu_s E_s}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)}, \quad G_s = \frac{E_s}{2(1 + 2\nu_s)} \quad (9)$$

## 2.2 포화된 2상 매질에서 파동전달 특성

### 2.2.1 물체파 (P-파 및 S-파)

식 (1)~(5)에서 압력함수를 소거하면 다음과 같이  $u-w$  변수에 대한 파동방정식이 된다.

$$\begin{aligned} (\lambda_c + 2G_s) \{\nabla\} \{\nabla\}^T \{u\} - \mu_s \{\nabla\} \times \{\nabla\} \times \{u\} \\ + \alpha Q \{\nabla\} \{\nabla\}^T \{w\} = \rho \{\ddot{u}\} + \rho_f \{\ddot{w}\} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\alpha Q \{\nabla\} \{\nabla\}^T \{u\} + Q \{\nabla\} \{\nabla\}^T \{w\} = \rho_f \{\ddot{u}\} + \frac{\rho_f}{n} \{\ddot{w}\} + \frac{1}{k} \{\dot{w}\} \quad (11)$$

여기서  $\{\nabla\}^T = [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}]$  이고,  $\lambda_c = \lambda_s + \alpha^2 Q$ 로서 비배수조건에 대한 혼합체의 Lamé 상수이다. 이제, 고체와 간극유체의 변위벡터는 Helmholtz 분해기법을 사용하여 식 (12)와 같이 스칼라 포텐셜함수로 나타낼 수 있다.

$$\{u\} = \{\nabla\} \phi_u + \{\nabla\} \times \psi_u \{e_y\} \quad (12a)$$

$$\{w\} = \{\nabla\} \phi_w + \{\nabla\} \times \psi_w \{e_y\} \quad (12b)$$

여기서  $\{e_y\}$ 는  $y$ -축 방향 단위벡터이다. 식 (12)를 식 (10)

과 (11)에 대입하면 주파수-파수영역(frequency-wave-number domain)에서 다음과 같이 각 포텐셜함수로 분해된 고유치문제를 얻게 된다.

$$[k_p^2[\mathbf{K}_p] + i\omega[\mathbf{C}] - \omega^2[\mathbf{M}]] \begin{Bmatrix} \Phi'' \\ \Phi'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (13a)$$

$$[k_s^2[\mathbf{K}_s] + i\omega[\mathbf{C}] - \omega^2[\mathbf{M}]] \begin{Bmatrix} \Psi'' \\ \Psi'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13b)$$

여기서  $i = \sqrt{-1}$ 이며 계수행렬은 다음과 같다.

$$[\mathbf{K}_p] = \begin{bmatrix} \lambda_c + 2G_s & \alpha Q \\ \alpha Q & Q \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{K}_s] = \begin{bmatrix} G_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & \rho_f/n \end{bmatrix} \quad (14)$$

식 (13)이 의미 있는 결과를 가지려면 각각 다음과 같은 관계가 성립하여야 한다.

$$\det[k_p^2[\mathbf{K}_p] + i\omega[\mathbf{C}] - \omega^2[\mathbf{M}]] = 0, \quad (15a)$$

$$\det[k_s^2[\mathbf{K}_s] + i\omega[\mathbf{C}] - \omega^2[\mathbf{M}]] = 0 \quad (15b)$$

식 (15a)의 해는 서로 다른 두 개가 존재하며 이를  $k_{p1}$  과  $k_{p2}$  로 표기하고 이에 해당하는 파동을 각각 P1-파와 P2-파 라고 한다. 그리고 (15b)의 해는  $k_s$  한 개가 존재하며 이에 해당하는 파동을 S-파라 한다. 따라서 식 (15)로부터 구한 고체-유체 혼합체의 압축파속도( $V_p$ )와 전단파속도( $V_s$ )는 다음과 같다.<sup>(10)</sup>

$$V_{p1}(\omega) = \frac{\omega}{k_{p1}} = \sqrt{\frac{\lambda_s + 2G_s}{\rho_1(\omega)}}, \quad (16a)$$

$$V_{p2}(\omega) = \frac{\omega}{k_{p2}} = \sqrt{\frac{\lambda_s + 2G_s}{\rho_2(\omega)}}, \quad (16b)$$

$$V_s(\omega) = \frac{\omega}{k_s} = \sqrt{\frac{G_s}{\rho_3(\omega)}} \quad (16c)$$

여기서  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  은 주파수중속 유효질량으로 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(\omega) &= \rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 + \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{Q} \left[ \rho_f^2 - \rho \left( \frac{\rho_f}{n} - i \frac{1}{k\omega} \right) \right]} \\ \rho_2(\omega) &= \rho_0 + \sqrt{\rho_0^2 + \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{Q} \left[ \rho_f^2 - \rho \left( \frac{\rho_f}{n} - i \frac{1}{k\omega} \right) \right]} \\ \rho_3(\omega) &= \rho - \frac{(k\omega\rho_f)^2}{(k\omega\rho_f)^2 + n^2} \left( \frac{\rho_f}{n} + i \frac{1}{k\omega} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \left[ \rho - 2\alpha\rho_f + \frac{\lambda_c + 2\mu_s}{Q} \left( \frac{\rho_f}{n} - i \frac{1}{k\omega} \right) \right] \quad (18)$$

위 혼합체에 대한 압축파속도와 전단파속도는 고체골격의 압축파속도  $C_p = \sqrt{(\lambda_s + 2G_s)/\rho}$  및 전단파속도  $C_s = \sqrt{G_s/\rho}$  와는 다른 값이다.

투수계수( $k'$ )가 작은 값일 경우에 식 (16)의 탄성과 전달속도는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$V_{p1} \cong \sqrt{\frac{\lambda_c + 2G_s}{\rho}}, \quad V_{p2} \cong \sqrt{i\omega k Q \frac{\lambda_s + 2G_s}{\lambda_c + 2G_s}}, \quad V_s \cong \sqrt{\frac{G_s}{\rho}} \quad (19)$$

따라서 P1-파의 전달속도와 전단파전달속도는 비배수 단상지반에 대한 값과 동일하다. 그러나 P2-파는 주파수중속성을 가지며 투수계수에 비례한다. 이 파는 간극유체의 확산(diffusion)을 통해 에너지를 소산시키므로 거리에 따라 진폭이 대단히 빨리 감소하는 특성이 있다. 결과적으로 투수계수가 매우 작을 경우 혼합체는 비배수 단상지반과 동일한 거동을 하게 된다.

### 2.2.2 표면파

균질 반무한 또는 평행층상 반무한 지반과 같이 자유면(즉, 지표면)을 가진 지층에서는 구조물의 고유진동모드와 같은 고유진동형상이 있고 이에 상응하는 수평방향 파동전달속도를 가지며 이를 표면파라고 부른다. 일반적으로 표면파의 전달속도는 단상지반인 경우에도 주파수중속성을 가지며 초월방정식<sup>(9),(11)</sup> 또는 대수방정식<sup>(7),(8)</sup>을 사용하여 구할 수 있다. 표면파에 의한 지반에서의 변위는 일반적으로 다음과 같이 나타난다.

$$\{u\}, \{w\} \in \left\{ e^{-i\kappa_n x} e^{\pm i\mu_{p1n} y}, e^{-i\kappa_n x} e^{\pm i\mu_{p2n} y}, e^{-i\kappa_n x} e^{\pm i\mu_m y} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (20)$$

여기서  $\kappa_n$  는 표면파의 파수로서 주파수중속성이 있으며  $\mu_{p1n}, \mu_{p2n}, \mu_{sn}, \mu_{p2n}, \mu_{sn}$  은 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_{p1n} = \sqrt{\kappa_n^2 - k_{p1}^2}, \quad \mu_{p2n} = \sqrt{\kappa_n^2 - k_{p2}^2}, \quad \mu_m = \sqrt{\kappa_n^2 - k_s^2} \quad (21)$$

### 2.3 유한요소 정식화

유한요소법에 의한 u-w 모델 2상지반의 운동방정식은 다음과 같다.<sup>(4)</sup>

$$\begin{bmatrix} [M_{uu}] & [M_{uw}] \\ [M_{uw}]^T & [M_{ww}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta^u\} \\ \{\delta^w\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [C_{ww}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta^u\} \\ \{\delta^w\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}'] + [K_{uu}] & [K_{uw}] \\ [K_{uw}]^T & [K_{ww}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta^u\} \\ \{\delta^w\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\bar{f}_u\} \\ \{\bar{f}_w\} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

여기서 계수행렬은 다음과 같다.

$$[M_{uu}] = \rho \int_{\Omega} [N_u]^T [N_u] d\Omega, \quad (23a)$$

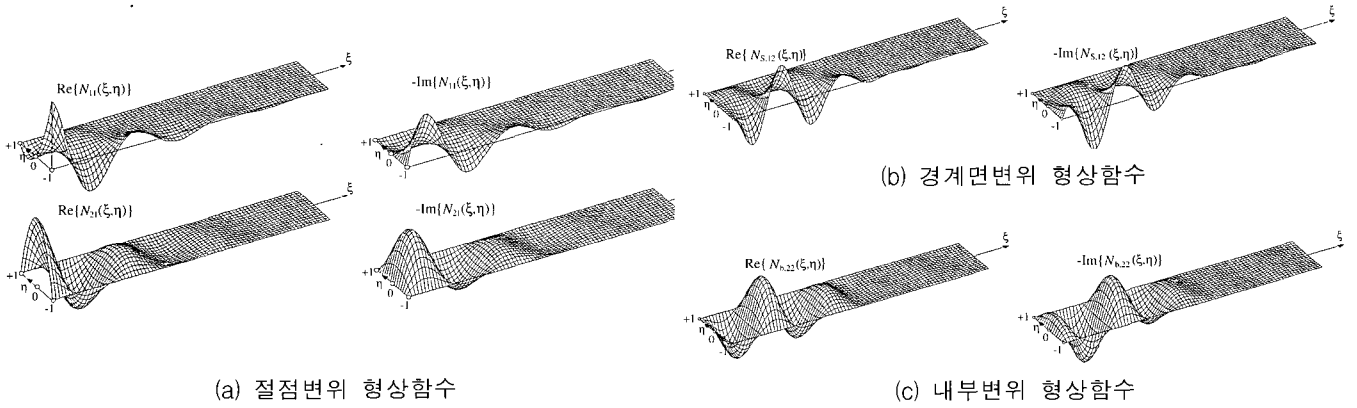


그림 3 무한요소의 변위성분별 형상함수 예

$$[M_{uw}] = \rho_f \int_{\Omega} [N_u]^T [N_w] d\Omega, \quad (23b)$$

$$[M_{ww}] = \frac{\rho_f}{n} \int_{\Omega} [N_w]^T [N_w] d\Omega \quad (23c)$$

$$[C_{uw}] = \frac{1}{k} \int_{\Omega} [N_u]^T [N_w] d\Omega \quad (24)$$

$$[K_{uu}^*] = \int_{\Omega} [B_u]^T [D^*] [B_u] d\Omega, \quad (25a)$$

$$[K_{uu}] = \alpha^2 Q \int_{\Omega} [B_u]^T \{m\} \{m\}^T [B_u] d\Omega, \quad (25b)$$

$$[K_{uw}] = \alpha Q \int_{\Omega} [B_u]^T \{m\} \{m\}^T [B_w] d\Omega, \quad (25c)$$

$$[K_{ww}] = Q \int_{\Omega} [B_w]^T \{m\} \{m\}^T [B_w] d\Omega \quad (25d)$$

$$\{\bar{f}_u\} = \int_{\Gamma_s} [N_u]^T \{\hat{t}\} d\Gamma, \quad (26a)$$

$$\{\bar{f}_w\} = -\hat{p} \int_{\Gamma_p} [N_w]^T \{n\} d\Gamma \quad (26b)$$

여기서  $[B_u] = [\partial][N_u]$ ,  $[B_w] = [\partial][N_w]$ ,  $[N_u]$ 와  $[N_w]$ 는 각각  $u$ 와  $w$ 에 대한 유한요소 형상함수이고,  $\{\hat{t}\}$ 와  $\hat{p}$ 는 각각 경계면에 작용하는 응력과 압력이며,  $\{n\}$ 은 경계면에서 단위법선벡터이다.

식 (23)~(26)에 나타난 계수행렬은 Gauss-Legendre 구적법과 같은 수치적분법을 적용하여 계산하게 된다. 그리고 간극유체 거동과 관련되는 강성행렬( $[K_{uu}]$ ,  $[K_{uw}]$ ,  $[K_{ww}]$ )에 대해서는 감차적분을 사용하는 것이 효과적이다.

### 2.4 무한요소 정식화

이 연구에서 제안하는 무한요소의 기하사상은 유한요소와 접하는 경계에서 유한요소와 동일하며 무한대 방향으로 사상은 다음과 같다.

$$x = x_0(1 + \xi), \quad y = y_0 - \zeta, \quad \xi \in [0, \infty), \quad \zeta \in [0, \infty) \quad (27)$$

여기서  $x_0$ 와  $y_0$ 는 내부 근역의 유한요소 모델의 크기를

나타내는 값으로 그림 2에 도시하였다. 그리고 주파수영역에서 변위는 다음과 같이 근사하였다.

$$u(x, y, \omega) = \sum_j \sum_m^{NM_j NM_m} N_{jm}(x, y) \{q_{jm}^u(\omega)\} \quad \text{또는}$$

$$u(x, y, \omega) = [N_q(x, y)] \{q^u(\omega)\} \quad (28a)$$

$$w(x, y, \omega) = \sum_j \sum_m^{NM_j NM_m} N_{jm}(x, y) \{q_{jm}^w(\omega)\} \quad \text{또는}$$

$$w(x, y, \omega) = [N_q(x, y)] \{q^w(\omega)\} \quad (28b)$$

여기서  $N_{jm}(x, y, \omega)$ 는 일반좌표계 형상함수로서 수평 무한요소(HIE), 수직무한요소(VIE), 모서리무한요소(CIE) 별로 다음과 같이 근사하였다.

$$N_{jm}^{HIE} = L_j(\eta) f_m(\xi, \omega), \quad N_{jm}^{CIE} = f_j(\xi, \omega) g_m(\zeta, \omega),$$

$$N_{jm}^{VIE} = L_j(\eta) g_m(\zeta, \omega) \quad (29)$$

여기서  $L_j(\eta)$ 는 Lagrange 보간함수이며  $f_m(\xi, \omega)$ 과  $g_m(\zeta, \omega)$ 은 각각 수평방향( $\pm x$  축)과 수직방향( $-y$  축)에 대한 주파수 종속 파동전달함수로서 다음과 같다.

$$f_m(\xi, \omega) \in \left\{ e^{-ik_{p1}x_0\xi}, e^{-ik_{p2}x_0\xi}, e^{-ik_s x_0\xi}, \left\{ e^{-ik_{n}x_0\xi} \right\}_{n=1}^{N_{surf}} \right\}, \quad (30a)$$

$$g_m(\zeta, \omega) \in \left\{ e^{-ik_{p1}\zeta}, e^{-ik_{p2}\zeta}, e^{-ik_s \zeta}, \left\{ e^{-\mu_{p1n}\zeta}, e^{-\mu_{p2n}\zeta}, e^{-\mu_{wn}\zeta} \right\}_{n=1}^{N_{surf}} \right\} \quad (30b)$$

여기서  $N_{surf}$ 는 변위 근사에 사용된 표면파의 개수로써 통상 5개 이내이다.

식 (28)과 같이 형상함수를 구성하면 식 (23)~(26)의 계수행렬을 계산하기 편리한 장점이 있는 반면, 미지벡터가 물리적인 의미가 없는 일반좌표계이므로 유한요소와 무한요소 또는 무한요소와 무한요소 사이의 적합조건을 적용할 수 없다. 따라서 이 연구에서는 적합조건을 적용할 수 있도록 식 (28)의 형상함수를 다음과 같이 다시 구성하였다.

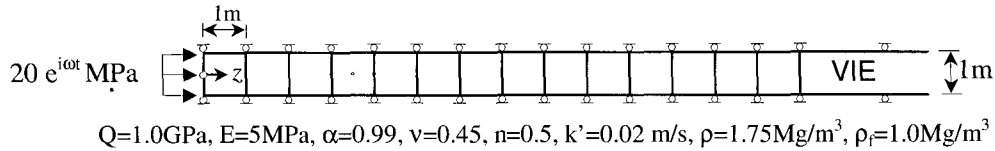


그림 4 일차원 검증 예제 및 FE-IE 해석모델

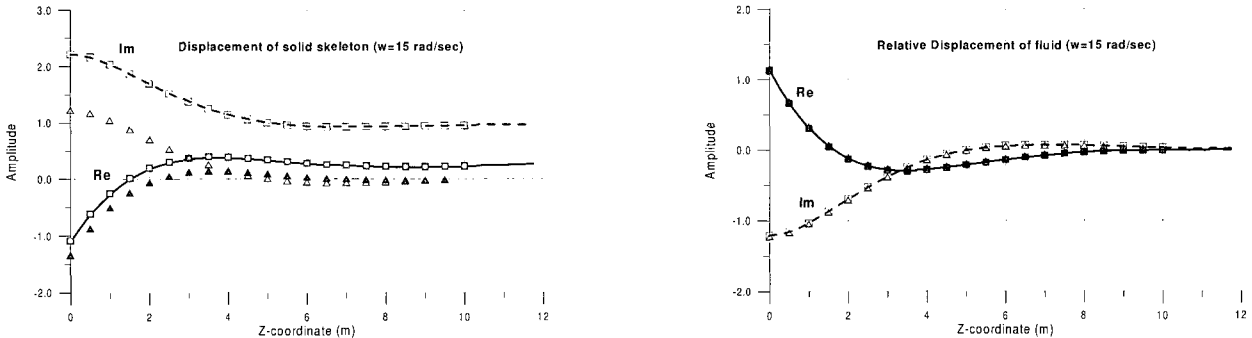


그림 5 일차원문제에서 고체골격과 유체의 변위응답 비교 ( $\omega=15$  rad/sec)

(이론해: —, ..... ) (FE 방법:  $\Delta$ ,  $\blacktriangle$ ) (FE-IE 방법:  $\blacksquare$ ,  $\square$  = P1 및 P2 과 사용)

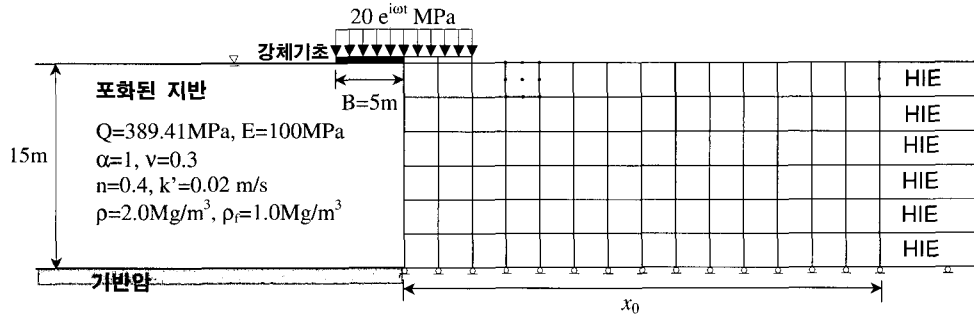


그림 6 이차원 검증 예제 및 FE-IE 해석모델

$$\begin{aligned} \{u(x, y, \omega)\} &= [N_\delta(x, y)]\{\delta''(\omega)\}, \\ \{w(x, y, \omega)\} &= [N_\delta(x, y)]\{\delta'''(\omega)\} \end{aligned} \quad (31)$$

여기서  $\{\delta''(\omega)\}$  와  $\{\delta'''(\omega)\}$  는 물리적인 의미를 가지는 미지벡터로서 그림 3과 같이 절점변위, 경계면변위, 내부 변위로 구분하였다. 식 (28)의 형상함수행렬과 식 (31)의 형상함수행렬 사이의 관계는  $[N_\delta(x, y)] = [N_q(x, y)][T]$  로 나타낼 수 있으며  $[T]$  는 상수행렬이다.<sup>(12)</sup>

이제, 전체 행렬식을 구성하기 위한 요소강성행렬  $[K_{\delta\delta}]$  는  $[K_{\delta\delta}] = [T]^T [K_{qq}] [T]$  와 같이 나타낼 수 있다. 다른 계수행렬도 동일한 형태의 변환으로 표현할 수 있다. 많은 개수의 파동을 포함할 경우  $[K_{\delta\delta}]$  를 직접 계산하는 것은 그 과정이 복잡할 뿐만 아니라 적분결과도 불안정한 반면,  $[K_{qq}]$  는 간단하면서도 정확한 적분을 수행할 수 있으므로, 위와 같은 형상함수 변환은 대단히 효과적이다.  $[K_{qq}]$  와 같은 일반좌표계에서 계수행렬을 계산하기 위해서는 무한 영역에 대한 적분이 필요하다. 이 연구에서는 무한영역이 포함된 적분식을 해석적인 적분 또는 Gauss-Laguerre 구적법<sup>(13)</sup>을 사용하여 수행하였다.

$$\int_0^\infty f(\xi) e^{-\xi} d\xi = \sum_{j=1}^{N_{int}} f(\xi_j) W_j \quad (32)$$

여기서  $N_{int}$  는 적분점의 개수이며  $\xi_j$  와  $W_j$  는 각각 Gauss-Laguerre 구적법의 적분점과 가중계수이다.

### 3. 검증 예제

#### 3.1 일차원 문제

제안된 무한요소의 검증을 위하여 그림 4와 같은 일차원 파동전달 문제를 해석하고, 해석결과를 이론해와 비교하여 그림 5에 도시하였다. 이론해의 유도과정은 부록에 수록하였다. 해석결과 제안된 무한요소에 의한 결과는 이론해와 잘 일치함을 알 수 있었다. 아울러 간극유체의 거동은 원역에서 경계조건에 영향을 받지 않음을 알 수 있었다.

#### 3.2 이차원 문제

이차원문제에서 제안된 무한요소의 특성을 분석하기 위하여 그림 6과 같은 문제를 해석하였다. 무한요소가 설치되는 위치  $x_0$  값과 무한요소에 사용된 파동의 수가 해에 어

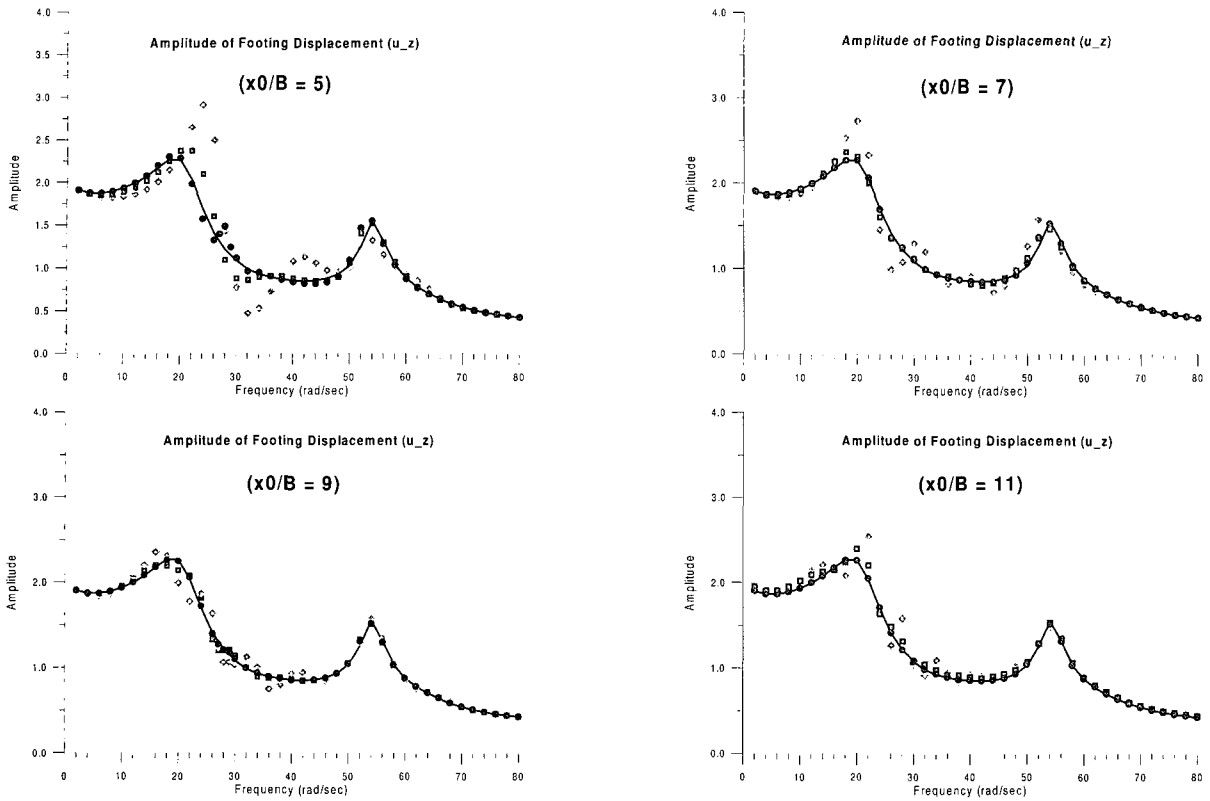


그림 7 무한요소 위치와 사용된 파의 개수에 따른 강체 기초 수직운동의 컴플라이언스  
(정해: —) (FE-IE : ◆ = 1개 파 사용, ■ = 2개 파 사용, ● = 3개 파 사용)

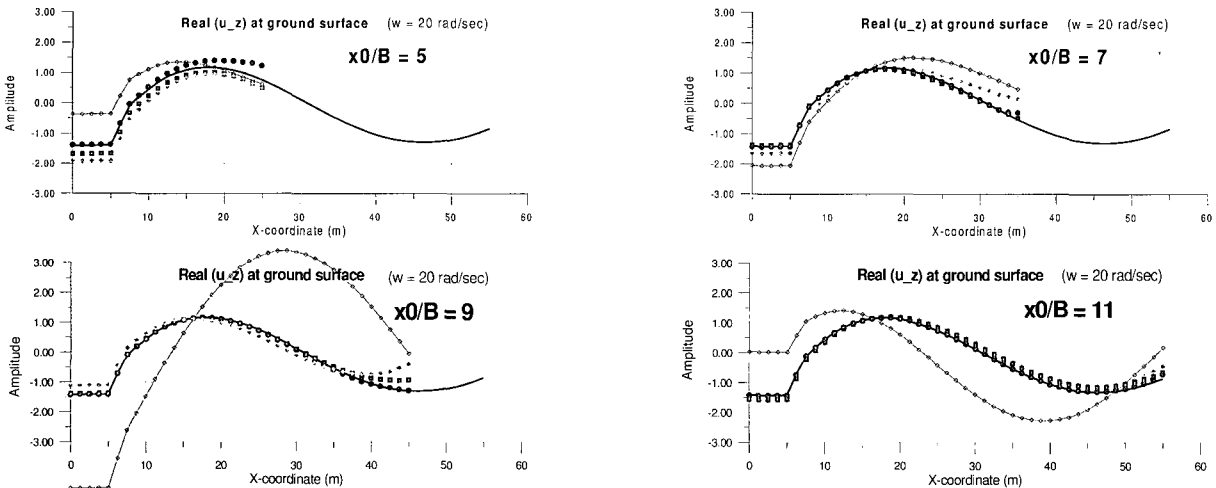


그림 8 무한요소 위치와 사용된 파의 개수에 따른 지표면 고체골격 수직변위의 공간적 분포  
(정해: —) (FE only : ◇) (FE-IE : ◆ = 1개 파 사용, ■ = 2개 파 사용, ● = 3개 파 사용)

면 영향을 미치는지 분석하여 그림 7과 그림 8에 정리하였다. 이 논문에서는 무한요소의 형상함수로 물체파 만을 사용하였다. 이때 정해는  $x_0/B = 500$ 인 유한요소 해이다.

분석결과, 파동함수를 많이 사용할수록 해의 정확성이 향상되며 근역 유한요소모델의 크기도 줄일 수 있었다.

#### 4. 결 론

이 연구에서는 포화된 2상 매질에서 파동전달을 묘사할 수 있는 새로운 주파수영역 동적무한요소를 제안하였다.

제안된 무한요소는 임의 개수의 파동함수를 범위근사 형상함수에 포함시킬 수 있는 장점이 있다. 일차원문제와 이차원문제에 대한 해석을 수행하고 이를 이론해 및 유한요소법에 의한 정해와 비교한 결과, 이 논문에서 제안한 무한요소가 정확하고 효과적임을 알 수 있었다.

#### 감사의 글

이 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호: R01-2003-000-10635-0)지원으로 수행되었습니다.

부 록. 일차원 파동전달문제의 이론해

주파수영역에서 일차원 파동방정식은 다음과 같다.<sup>(5)</sup>

$$a \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + b \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} = c \hat{u} + d \hat{w}, \quad b \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + Q \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} = d \hat{u} + f \hat{w} \quad (A1)$$

여기서

$$a = \lambda_c + 2G_s, \quad b = \alpha Q, \quad c = -\rho \omega^2, \\ d = -\rho_f \omega^2, \quad f = -\frac{\rho_f \omega^2}{n} + i \frac{\omega}{k} \quad (A2)$$

그리고 주파수영역에서 응력과 간극수압은 각각 다음과 같이 나타난다.

$$\hat{\sigma}_x = a \frac{d \hat{u}}{dx} + b \frac{d \hat{w}}{dx}, \quad \hat{p} = b \frac{d \hat{u}}{dx} + Q \frac{d \hat{w}}{dx} \quad (A3)$$

여기서  $\hat{u} = \hat{u}(x, \omega)$ ,  $\hat{w} = \hat{w}(x, \omega)$ ,  $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_x(x, \omega)$ ,  $\hat{p} = \hat{p}(x, \omega)$ 로서 각각 주파수영역에서 고체골격의 변위, 간극유체 상대변위, 연직응력, 간극수압을 의미한다.

식 (A1)과 같은 일차원 파동전달문제에 대한 고유치 ( $\beta_1, \beta_2$ )와 고유벡터( $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}$ )는 각각 다음과 같이 구할 수 있다.<sup>(5)</sup>

$$\beta_{1,2} = \left\{ \frac{(k_1 + k_4) \pm \sqrt{(k_1 + k_4)^2 - 4(k_1 k_4 - k_2 k_3)}}{2} \right\}^{1/2} \quad (A4)$$

$$\{\phi_1\} = \left\{ \frac{1}{\beta_1^2 - k_1} \right\}, \quad \{\phi_2\} = \left\{ \frac{1}{\beta_2^2 - k_1} \right\} \quad (A5)$$

여기서

$$k_1 = \frac{bd - cQ}{b^2 - aQ}, \quad k_2 = \frac{bf - dQ}{b^2 - aQ}, \quad k_3 = \frac{bc - ad}{b^2 - aQ}, \quad k_4 = \frac{bd - af}{b^2 - aQ} \quad (A6)$$

따라서 변위함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} = c_1 \{\phi_1\} e^{-\beta_1 x} + c_2 \{\phi_2\} e^{-\beta_2 x} \quad (A7)$$

여기서  $c_1$ 과  $c_2$ 는 경계조건에 의해 정해지는 계수이다.

그림 4와 같은 일차원 반무한 문제에서 경계조건은  $x=0$ 에서 응력과 간극수압이다. 이들을 각각  $\hat{\sigma}_{x0}$ 와  $\hat{p}_0$ 로 나타낼 때 식 (A7)에서 미지계수  $c_1$ 과  $c_2$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \frac{-1}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}} \begin{bmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{x0} \\ \hat{p}_0 \end{Bmatrix} \quad (A8)$$

여기서

$$\alpha_{11} = \beta_1 (a \phi_{11} + b \phi_{21}), \quad \alpha_{12} = \beta_2 (a \phi_{12} + b \phi_{22}), \quad (A9a)$$

$$\alpha_{21} = \beta_1 (b \phi_{11} + Q \phi_{21}), \quad \alpha_{22} = \beta_2 (b \phi_{12} + Q \phi_{22}) \quad (A9b)$$

참고로 그림 4의 문제에서 경계조건은  $\hat{\sigma}_{x0} = 20 \text{ MPa}$ ,  $\hat{p}_0 = 0$ 이다.

참 고 문 헌

1. Biot, M.A., "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: II. Higher frequency range," *J. Acous. Soc. Am.*, Vol. 28, No. 2, 1956, pp. 179-191.
2. Kim, S-H., Kim, K-J. and Blouin, S.E. "Analysis of wave propagation in saturated porous media. I. Theoretical solutions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, pp. 4061-4073.
3. 이진호, 박정준, 김재관, 진병무, "지하수로 포화된 가로 등방성 층상지반에 설치된 강체 원형 기초의 동적 거동", 2005년도 한국지진공학회 학술발표회 논문집, 2005, pp. 47-51.
4. Zienkiewicz, O.C. and Shiomi, T., "Dynamic behaviour of saturated porous media; The generalized Biot formulation and its numerical solution," *Int. J. Num. and Anal. Meth. Eng.*, Vol. 8, 1984, pp. 71-96.
5. Khalili, N, Valliappan, S., Yazdi, J.T. and Yazdchi, M., "1D infinite element for dynamic problems in saturated porous media," *Comm. Num. Meth. Eng.*, Vol. 13, 1997, pp. 727-738.
6. Khalili, N, Yazdchi, M. and Valliappan, S., "Wave propagation analysis of two-phase saturated media using coupled finite-infinite element method," *Soil Dyn. Earth. Eng.*, Vol. 18, 1999, pp. 533-553.
7. Nogami, T. and Kazama, M., "Dynamic response analysis of submerged soil by thin layer element method," *Soil Dyn. Earth. Eng.*, Vol. 11, 1992, pp. 17-26.
8. Bougacha, S., Tassoulas, J.L. and Roesset, J.M., "Analysis of foundations on fluid-filled poroelastic stratum," *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 119, No. 8, 1993, pp. 1632-1648.
9. Senjuntichai, T., "Green's function for multi-layered poroelastic medium and an indirect

- boundary element method," Ph.D. Dissertation, Dept. of Civil & Geological Eng., U. of Manitoba, Canada, 1994.
10. Akiyoshi, T., Sun, X. and Fuchida, K., "General absorbing boundary conditions for dynamic analysis of fluid-saturated porous media," *Soil Dyn. Earth. Eng.*, Vol. 17, 1996, pp. 397-406.
  11. Sharma, M.D., "Dispersion in oceanic crust during earthquake preparation," *Int. J. Solids Str.*, 1999, Vol. 36, pp. 3469-3482.
  12. Yun, C-B., Kim, J-M. and Hyun, C-H., "Axisymmetric elastodynamic infinite elements for multi-layered half-space," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.38, 1995, pp. 3723-3743.
  13. Davis, P.J. and Rabinowitz, P., *Methods of Numerical Integration*, Second Edition, Academic Press, Inc., 1984.