

## 미분변환법에 의한 비균질 감쇠보의 진동 해석

신 영 재\* · 전 수 주 · 윤 종 학

안동대학교 기계공학부

### Vibration Analysis of Non-homogeneous Damped Beam Using the Differential Transformation Method

Youngjae Shin\* · Suju Jaun · Jonghak Yun

Department of Mechanical Engineering, Andong National University, Gyeongbuk 760-749, Korea

(Received 21 February 2004 / Accepted 30 June 2005)

**Abstract** : In this paper, the natural frequencies of non-homogeneous damped beam are determined by using the differential transformation. The beam considered has different stiffness, damping and mass properties in each of two parts. The various boundary conditions are assumed at each end. The results obtained by the present method agree very well with those reported in the previous works. The present analysis shows the usefulness and validity of differential transformation in solving a non-homogeneous damped beam problem.

**Key words** : Differential transformation(미분변환법), Non-homogeneous damped beam(비균질 감쇠 보)

#### 1. 서 론

보는 교량, 건축, 선박, 자동차등 다양한 구조물에 적용되고 있으며, 특히 비균질 보는 무게나 강도를 최적화 하거나 공학적 및 기능적인 요구를 충족하기 위해 많은 구조물에 사용되고 있다. 이와 같은 비균질 보를 포함한 구조물을 설계할 경우, 비균질 보의 진동에 대한 연구는 중요한 설계요소 중의 하나이며, 진동연구에서도 고유진동수 해석은 가장 먼저 선행되어야 할 연구 과제이다.

비균질 보에 대한 진동해석은 유한요소법, 유한차분법, Rayleigh-Ritz 방법등 다양한 수치해석법을 이용하여 많은 연구자들에 의해 연구되고 있다.

Klein은 FEM과 Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 가변단면 보의 진동을 해석하였고,<sup>1)</sup> Elishakoff 등은

여러 가지 형태의 경계조건에서 경계조건을 만족하는 모드 형상식을 가정하여 밀도와 강성의 관계에 따른 비균질 보의 닫힌 해(closed form solution)를 구하였으며,<sup>2)</sup> EroI등은 비균질 감쇠 보를 두 부분으로 나누어 유한요소법을 사용하여 고유진동수를 해석하였다.<sup>3)</sup> 그러나 이와 같은 비균질 보에 대한 진동 해석 시 사용되는 수치해석법들은 정확한 해를 얻기 위해 많은 격자수와 계산 시간 및 기억 용량을 필요로 하기 때문에 해석적인 해를 얻기가 어렵다. 이와 같은 문제를 해결하기 위해 비균질 보에 대한 진동을 해석 할 경우, 높은 정확성 및 유효성 갖는 수치해석법이 요구되며, 미분변환법(differential transformation)은 이와 같은 요구조건을 충족하는 수치해석법 중의 하나이다. 이 수치해석법은 1986년 Zhou가 전기회로 문제를 해결하기 위해 처음 제시하였으며,<sup>4)</sup> Chen과 Ho에 의해 진동문제에 적용되었다.<sup>5)</sup> 또한 Malik등은 연속시스템에서 진동을 해

\*To whom correspondence should be addressed.  
yjshin@andong.ac.kr

석하여 미분변환법의 타당성과 빠른 수렴성을 검증하였다.<sup>6)</sup> 이와 같이 미분변환법은 많은 공학자들에 의해 다양한 공학분야에 적용되고 있는 수치해석 방법이다.<sup>7)</sup>

본 논문은 감쇠를 가지는 비균질 보의 지배방정식과 경계조건에 미분변환법을 이용한 수치해석을 통하여 고유진동수를 구하였다. 연구를 수행하기 위해 비균질 감쇠보에 연속조건을 적용하여, 두 부분으로 나누어 고려하였으며, 기존의 해석결과<sup>8)</sup>와 비교하여 미분변환법의 정확성 및 유효성을 고찰하였다.

## 2. 지배방정식

### 2.1 비균질 Euler-Bernoulli 감쇠 보

Fig. 1은 감쇠를 가지는 비균질 Euler-Bernoulli 보를 나타낸다. 위의 보를 길이  $L_1$ 과 강성계수  $k_1$  그리고 감쇠 계수  $c_1$ 과 단위 길이 당 질량  $m_1$ 을 가지는 변위함수  $w_1(x, t)$ 부분과 길이  $L_2$ , 강성계수  $k_2$  그리고 감쇠 계수  $c_2$ 와 단위 길이 당 질량  $m_2$ 을 가지는 변위함수  $w_2(x, t)$ 부분으로 나누어 해석하였다.

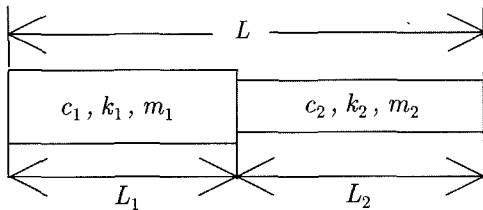


Fig. 1 Non-homogeneous damped beam of two parts

감쇠를 가지는 Euler-Bernoulli 보의 지배방정식은 아래와 같다.<sup>8)</sup>

$$k_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + m_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + c_i \frac{\partial w_i}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1, 2$$

$$(x_0 = 0, x_1 = L_1, x_2 = L)$$

과도감쇠(overdamped)일 경우  $w_i$ 는 다음과 같이 나타낸다.

$$w_i = W_i(x)e^{-\lambda t}, i = 1, 2 \quad (2)$$

부족감쇠(underdamped)일 때  $w_i$ 는 식 (3)과 같이 가정한다.

$$w_i = W_i(x)e^{\lambda t}, i = 1, 2 \quad (3)$$

위의 식 (2)와 식 (3)에서  $\lambda$ 는 각각 positive real eigenvalue와 complex eigenvalue를 나타낸다.

식 (2)와 식 (3)을 각각 식 (1)에 대입하여 정리하면, 식 (4)와 식 (5)를 이끌어낼 수 있다.

$$\frac{d^4 W_i}{dx_i^4} + \frac{1}{k_i} (m_i \lambda^2 - c_i \lambda) W_i = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^4 W_i}{dx_i^4} + \frac{1}{k_i} (m_i \lambda^2 + c_i \lambda) W_i = 0 \quad (5)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1, 2$$

$$(x_0 = 0, x_2 = L)$$

무차원 변수  $\xi_i = \frac{x_i}{L_i}$  ( $i = 1, 2$ )를 식 (4)와 식 (5)

에 대입하여 정리하면, 비균질 감쇠 보의 자유진동에 대한 지배방정식은 각각 아래와 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4 W_i}{d\xi_i^4} + \frac{L_i^4}{k_i} (m_i \lambda^2 - c_i \lambda) W_i = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d^4 W_i}{d\xi_i^4} + \frac{L_i^4}{k_i} (m_i \lambda^2 + c_i \lambda) W_i = 0 \quad (7)$$

$$(i = 1, 2)$$

### 2.2 경계조건 및 연속조건

양 끝단에서의 경계조건은 고정일 경우  $w = w' = 0$ 이며, 핀일 경우  $w = w'' = 0$ , 이고, 자유일 경우  $w'' = w''' = 0$ 이다. 그리고 비균질 감쇠 보를 두 부분으로 나누어 고려할 경우 경계면에서 보의 변위, 기울기, 모멘트 그리고 전단력은 연속적이어야 하며 그 연속조건은 아래와 같다.

$$w_1(L_1) = w_2(L_1) \quad (8)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}(L_1) = \frac{\partial w_2}{\partial x}(L_1) \quad (9)$$

$$k_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(L_1) = k_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(L_1) \quad (10)$$

$$k_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}(L_1) = k_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}(L_1) \quad (11)$$

### 3. 미분 변환법

미분변환법은 Zhou가 전기 회로에 관한 연구에서 선형과 비선형 초기값 문제의 해를 구하기 위해 제시한 것으로, 테일러 급수(Taylor series expansion)에 기본을 두었다. 이 방법은 선형과 비선형의 공학 문제에 적용할 수 있고, 간단한 순환 관계에 의해서 해를 구할 수 있으며 해의 정확도가 대단히 높다.

임의의 원함수(original function)  $y(x)$ 에 대한 미분 변환은

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (12)$$

와 같이 정의되고, 여기서  $Y(k)$ 를 T-function이라 한다.

$Y(k)$ 의 미분 역변환(differential inverse transformation)은

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (13)$$

로 정의되므로, 원함수  $y(x)$ 는 다음 식으로 유도된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (14)$$

위 정의로부터 다음과 같은 미분 변환에 관한 기본적인 연산은 Table 1과 같다.

Table 1 Examples of the differential transformation of the original function

Original function	T-function
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$z(x) = \lambda y(x)$	$Z(k) = \lambda Y(k)$
$z(x) = \frac{dy(x)}{dx}$	$Z(k) = (k+1) Y(k+1)$
$z(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$	$Z(k) = (k+1)(k+2) Y(k+2)$
$w(x) = y(x)z(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Y(l)Z(k-l)$

실제의 적용에 있어서는  $y(x)$ 는 근사적으로  $n$ 개의 유한한 항으로 식(15)와 같이 나타내며,  $n$ 은 수렴도에 의해 결정되어진다.

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^n x^k Y(k) \quad (15)$$

### 4. 미분변환법의 적용

#### 4.1 비균질 Euler-Bernoulli 감쇠 보의 미분 변환법 적용

비균질 감쇠보의 변위함수  $W(x)$ 에 대한 미분방정식 식(6)과 식(7)에 미분변환법을 적용하면 아래와 같다.

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \overline{W}_i(k+4) + \frac{L_i^4}{k_i} (m_i w^2 - c_i w) \overline{W}_i(k) = 0 \quad (16)$$

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \overline{W}_i(k+4) + \frac{L_i^4}{k_i} (m_i w^2 + c_i w) \overline{W}_i(k) = 0, \quad (17)$$

( $i = 1, 2$ )

여기서  $\overline{W}_i$ 는  $W$ 의 T-function이다.

#### 4.2 경계 및 연속조건의 미분 변환법 적용

비균질 감쇠보의 다양한 경계조건에 대해 미분변환법을 적용하면 다음과 같다.

i) 고정단(clamped end)

- $x = 0 (\xi = 0)$  일 경우

$$w(0) = \overline{W}_1(0) = 0 \quad (18)$$

$$w'(0) = \overline{W}_1(1) = 0 \quad (19)$$

- $x = L (\xi = 1)$  일 경우

$$w(L) = \sum_{k=0}^n \overline{W}_2(k) = 0 \quad (20)$$

$$w'(L) = \sum_{k=1}^n k \overline{W}_2(k) = 0 \quad (21)$$

ii) 핀단(pinned end)

- $x=0(\xi=0)$  일 경우

$$w(0) = \overline{W}_1(0) = 0 \tag{22}$$

$$w''(0) = \overline{W}_1(2) = 0 \tag{23}$$

- $x=L(\xi=1)$  일 경우

$$w(L) = \sum_{k=0}^n \overline{W}_2(k) = 0 \tag{24}$$

$$w''(L) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \overline{W}_2(k) = 0 \tag{25}$$

iii) 자유단(free end)

- $x=0(\xi=0)$  일 경우

$$w''(0) = \overline{W}_1(2) = 0 \tag{26}$$

$$w'''(0) = \overline{W}_1(3) = 0 \tag{27}$$

- $x=L(\xi=1)$  일 경우

$$w''(L) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \overline{W}_2(k) = 0 \tag{28}$$

$$w'''(L) = \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) \overline{W}_2(k) = 0 \tag{29}$$

두 부분으로 나누어 고려한 비균질 감쇠 보의 연속조건식 식(8)~식(11)에 미분변환법을 적용하면 식(30)~식(33) 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{k=1}^n \overline{W}_1(k) - \overline{W}_2(0) = 0 \tag{30}$$

$$\frac{1}{L_1} \sum_{k=1}^n k \overline{W}_1(k) - \frac{1}{L_2} \overline{W}_2(1) = 0 \tag{31}$$

$$\frac{k_1}{L_1^2} \sum_{k=1}^n k(k-1) \overline{W}_1(k) - 2 \frac{k_2}{L_2^2} \overline{W}_2(2) = 0 \tag{32}$$

$$\frac{k_1}{L_1^3} \sum_{k=1}^n k(k-1)(k-2) \overline{W}_1(k) - 6 \frac{k_2}{L_2^3} \overline{W}_2(3) = 0 \tag{33}$$

5. 수치해석 및 결과

본 연구를 수행하기 위해, 지배방정식과 연속조건 및 경계조건식에 미분변환법을 적용하여 다음과 같은 매트릭스 방정식을 구성한다.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{a,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{W}(0) \\ \overline{W}(1) \\ \vdots \\ \overline{W}(n) \end{Bmatrix} = 0 \tag{34}$$

상기 방정식이  $[\overline{W}(0), \overline{W}(1), \dots, \overline{W}(n)]^T \neq 0$ 이기 위해 식(35)의 행렬식이 0이 되어야 한다.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{a,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = 0 \tag{35}$$

고유진동수 방정식(natural frequency equation)인 상기의 식으로 부터 비균질 감쇠보에 대한 무차원 고유진동수를 구할 수 있다.

미분변환법을 이용한 본 연구의 수치해석결과와 기존의 수치해석결과를 비교하기 위하여, Table 2와 같은 참고문헌<sup>8)</sup>의 물성치를 적용하였다. 여기서 case 1은 비균질 감쇠보에서 부족감쇠일 경우이며, case 2는 과도감쇠일 때의 물성치를 나타낸다. 본 연구에서의 계산은 Matlab 6.1에 의하여 계산되었으며, 사용된 n 값은 30 이하이다.

Table 3과 4는 각각 case 1과 case 2의 물성치를 갖는 비균질 감쇠보에서 양 끝단의 경계조건이 핀일 경우 미분변환법을 적용하여 처음 다섯 번째  $\lambda$  값을 나타낸다. Table 3에서 본 연구의 수치해석 결과와 연속모델(continuous model)과 유한요소법에 의한 기존의 수치해석 결과<sup>8)</sup>가 네번째까지  $\lambda$  값이 정확하게 일치함을 알 수 있으며, 다섯번째  $\lambda$  값에서는 작은 오차를 보인다. 또한 모든  $\lambda$  값은 허수를 가지는 특성을 보인다. 그리고 Table 4에서 본 연구결과는 첫 번째  $\lambda$  값은 기존의 연구결과와 일치하지만, 다른  $\lambda$  값은 작은 오차를 가진다.

Table 2 The physical parameters for the numerical example

	Beam 1	Beam 2	
		Case 1	Case 2
$L_i$	1m	2m	2m
$m_i$	10kg/m	20kg/m	40kg/m
$c_i$	0	100Ns/m <sup>2</sup>	10kNs/m <sup>2</sup>
$k_i$	100N/m <sup>2</sup>	100N/m <sup>2</sup>	100N/m <sup>2</sup>

Table 3 The lower eigenvalues for the numerical example

Continuous model	Case 1	
	FEM	D T
-2.2552 ± 1.2711j	-2.2552 ± 1.2711j	-2.2552 ± 1.2711j
-1.7936 ± 10.903j	-1.7936 ± 10.903j	-1.7936 ± 10.903j
-1.5741 ± 24.863j	-1.5741 ± 24.863j	-1.5741 ± 24.863j
-1.7876 ± 43.165j	-1.7876 ± 43.165j	-1.7876 ± 43.165j
-1.8781 ± 68.118j	-1.8781 ± 68.118j	-1.8788 ± 68.114j

Table 4 The lower eigenvalues for the numerical example

Continuous model	Case 2	
	FEM	D T
-0.01482	-0.01482	-0.01482
-0.3364	-0.3364	-0.33642
-2.2122	-2.2123	-2.2122
-8.5798	-8.5808	-8.5798
-26.524	-26.535	-26.648

Table 5는 양 끝단의 경계조건이 각각 고정-고정과 자유-자유이고, 물성치는 case 1일 경우 비균질 감쇠 보에 미분변환법을 적용하여, 처음 다섯 번째까지의  $\lambda$ 값을 수치해석한 결과이다. 경계조건이 고정-고정인 경우  $\lambda$ 값은 제 5차까지 허수를 나타낸다. 그리고 자유-자유인 경계조건을 가질 때  $\lambda$ 값은 두 번째까지 실수를 가지며, 그 이후  $\lambda$ 값은 허수를 가진다.

Table 6은 Table 5와 물성치가 같은 경우, 양 끝단의 경계조건을 각각 고정-자유와 고정-핀으로 변화를 주었을 때, 미분변환법에 의한 비균질 감쇠 보의 처음 다섯 번째  $\lambda$ 값을 해석하였다. 경계조건이 고정-자유일 경우에는 두 번째까지  $\lambda$ 값은 실수를 나타내며, 세 번째부터 다섯 번째까지는 허수를 가진다. 그리고 경계조건이 고정-핀일 때,  $\lambda$ 값의 변화는 Table 5의 고정-고정의 경계조건인 경우와 같은 특

Table 5 The lower eigenvalues of non-homogeneous damped beam for case 1

Clamped-Clamped	Free-Free
-2.3302 ± 5.2694j	-1.8877
-1.9741 ± 16.7852j	-4.9643
-1.6485 ± 19.7416j	-1.5316 ± 5.6607j
-1.6824 ± 55.1142j	-1.8410 ± 16.9852j
-1.8747 ± 82.0511j	-1.6352 ± 33.9597j

Table 6 The lower eigenvalues of non-homogeneous damped beam for case 1

Clamped-Free	Clamped-Pinned
-0.1589	-2.4026 ± 3.0868j
-4.8231	-2.0693 ± 13.3379j
-2.3409 ± 5.1532j	-1.7105 ± 29.2511j
-1.9722 ± 16.8008j	-1.6317 ± 49.4451j
-1.6486 ± 33.9714j	-1.8505 ± 74.5805j

Table 7 The lower eigenvalues of non-homogeneous damped beam for case 2

Clamped-Clamped	Free-Free
-0.0710	-0.3135
-0.7060	-2.4654
-3.4332	-1.3178 ± 6.9209j
-10.9573	-10.1714
-26.7379	-26.4446

Table 8 The lower eigenvalues of non-homogeneous damped beam for case 2

Clamped-Free	Clamped-Pinned
-0.001538	-0.03180
-0.06824	-0.4326
-0.7076	-2.4255
-3.4327	-8.4427
-10.9574	-21.8299

성을 나타낸다.

Table 7은 case 2의 물성치를 가지는 비균질 감쇠 보의 양 끝단의 경계조건이 각각 고정-고정과 자유-자유일 경우, 미분변환법을 이용한 해석결과이다. 양 끝단이 고정-고정인 경계조건일 때 처음 다섯 번째  $\lambda$ 값은 실수를 가지며, 경계조건이 자유-자유일 경우에는 세 번째  $\lambda$ 값만이 허수를 나타낸다.

Table 8은 비균질 감쇠보에 미분변환법을 적용하여 처음 다섯 번째까지의  $\lambda$ 값을 수치 해석하였다.

이때 비균질 감쇠보의 물성치는 case 2인 경우이고, 양 끝단의 경계조건은 각각 고정-자유와 고정-핀인 경우이다. 그리고 두 경계조건에서  $\lambda$ 값은 모두 실수를 가짐을 알 수 있다.

## 6. 결론

본 연구는 비균질 감쇠 보에 대한 진동을 해석하기 위해 보를  $w_1(x)$ 과  $w_2(x)$ 로 나누어 고려하였고, 그 경계면에 연속조건을 적용하였다. 이와 같이 나누어진 각각의 비균질 감쇠 보에 대한 지배방정식과 연속조건 및 다양한 경계조건에 미분변환법을 적용하여 수치해석을 수행하였다. 그 결과를 기존의 해석 결과<sup>8)</sup>와 비교하여 미분 변환법의 타당성을 검증 하였다. 또한 다양한 경계조건에서 고유진동수를 구하였으며, 적은  $n$ 값에서 해를 얻을 수 있었다. 이것은 비균질 감쇠 보의 진동 해석에 있어서 미분변환법이 다른 해석법보다 효율성이 크고 적용이 용이하다는 것을 보여준다.

## 후 기

본 논문은 2003년도 BK21 사업의 지원에 의해 이루어졌음.

## References

- 1) L. Klein, "Transverse Vibrations of Non-uniform Beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.37, pp.491-505, 1974.
- 2) I. Elishakoff and S. Candan, "Infinite Number of Closed-form Solutions for Reliability of Non-homogeneous Beam," *Applications of Statistics and Probability* (R. E. Melchers and M. G. Stewart, editors), Vol.2, pp.1059-1067, 1999.
- 3) M. Gürğöze and H. Erol, "On the "modes" of Non-homogeneously Damped Rods Consisting of Two Parts," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.260, pp.357-367, 2003.
- 4) J. K. Zhou, "Differential Transformation and its Application for Electrical Circuit," Huazhong University Press, Wuhan China(in Chinese), 1986.
- 5) C. K. Chen and S. H. Ho, "Transverse Vibration of a Rotating Twisted Timoshenko Beams Under Axial Loading Using Differential Transform," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.41, pp.1339-1356, 1999.
- 6) M. Malik and H. H. Dang, "Vibration Analysis of Continuous Systems by Differential Transformation Applied Mathematics and Computation," Vol.96, pp.17-26, 1998.
- 7) C. K. Chen and W. J. Wu, "Application of the Taylor Differential Transformation Method to Viscous Damped Vibration of Hard and Soft Spring System," *Computer and Structures*, Vol.59, No.4, pp.631-639, 1994.
- 8) M. Gürğöze, "The Modes of Non-homogeneous Damped Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.242, pp.355-361, 2001.