한국수학사학회지 제18권 제3호(2005년 8월), 25-38

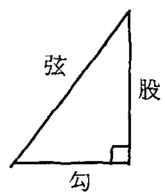
산학서의 직각 삼각형*

광운대학교 수학과 허 민
mher@kw.ac.kr

이 글에서는 중국의 산학서에 나타난 직각 삼각형의 풀이에 관한 연구 결과를 역사적으로 간략히 알아본다. 그리고 직각 삼각형에 관한 문제만을 다룬 조선의 산학서 『유씨구고술요도해』를 중심으로 직각 삼각형의 풀이에 관한 문항들을 분석하고, 문제 풀이를 위한 다항 방정식 작성 방법을 예시하며, 각 문항에서 이용한 피타고라스 삼조들을 조사한다.

주제어 : 직각 삼각형, 주비산경, 구장산술, 구일집, 유씨구고술요도해

0. 머리말



삼각형, 특히 직각 삼각형은 가장 기본적인 도형의 하나로, 다른 도형의 연구를 위한 기초를 이룬다. 동아시아의 전통 산학에서는 직각을 낀 두 변 중에서 짧은 변을 구(勾), 긴 변을 고(股), 빗변을 현(弦)이라 하고, 직각 삼각형을 구고(勾股) 또는 구고형(勾股形)이라 한다.

수학사에서 직각 삼각형에 관한 논의는 동 · 서양을 막론하고 고대부터 끊임없이 나타났다. 이런 논의를 세 가지 부류로 크게 나눌 수 있는데, 첫째는 구고법(즉 피타고라스의 정리) 및 그 활용, 이를테면 직각 삼각형의 풀이이다. 둘째는 닮은 직각 삼각형의 변 사이의 비례 관계를 이용한 측량 및 내접 정사각형 또는 내접원과 관련된 문제들이다. 셋째는 구고 수(즉 피타고라스 삼조 Pythagorean triple)와 관련된 내용이다 [12, pp. 439-440].

여기서는 중국과 조선의 산학서에 나타난 직각 삼각형의 풀이와 관련된 문제를 주로 알아보겠다. 중국 산학에서 직각 삼각형의 풀이에 관한 역사를 간략히 알아보고, [내접 정사각형 및 내접원에 관한 14문제와] 직각 삼각형의 풀이에 관한 210문제만을 다룬 산학서로 남병길(南秉吉, 1820~1869)이 도해한 『유씨구고술요도해』(劉氏句股述要圖解)를 중심으로 조선에서의 직각 삼각형에 관한 연구를 소개하겠다.

* 이 논문은 2004년도 광운대학교 교내 학술연구비에 의하여 연구되었음.

측량에 관한 문제는 남원상(南元裳)[1]이 도해한 『측량도해』(測量圖解)를 참고하기 바란다[4]. 『측량도해』에서는 중국 산학서에 나타난 측량에 관한 문제를 수집해서 소개하고 있는데, 도해를 통해 해법의 정당성을 밝히고 있다. 『측량도해』에서 다룬 문제는 『구장산술』(九章算術) 제9권(구고)의 제17문~제24문, 『해도산경』(海島算經) 전체 9문제, 『수서구장』(數書九章) 제7, 8권 <측망류>의 9문제 중에서 '고지추원'(古池推元)을 제외한 여덟 문제와 제16권 <군려류>의 한 문제 '망지적중'(望知敵衆)이다.

1. 중국 산학에서 직각 삼각형의 풀이

피타고라스의 정리는 피타고라스 시대보다 1000년 이상 이전의 고대 바빌로니아인들도 이미 알고 있었다. 고대 이집트에서는 3-4-5 직각 삼각형을 피라미드 건설에 이용했다고 한다. 중국에서는 『주비산경』(周髀算經)과 『구장산술』에 이미 피타고라스의 정리와 직각 삼각형의 풀이에 관한 논의가 등장하는데, 중국 산학자들은 20세기 초까지도 이 주제를 연구・발전시키고 있다.

1.1. 『주비산경』과 『구장산술』

중국 후한의 조군경(趙君卿, 본명은 爽)은 『주비산경』에 대한 주석에서 유클리드 식의 연역적인 방법으로 증명하고 있지 않지만 피타고라스의 정리에 대해 언급하고 있다. 직각 삼각형에 관한 피타고라스의 정리를 한 눈에 보여주는 유명한 설명도인 <현도>가 실려 있는데, <구고원방도>(句股圓方圖)에는 불과 500여 자의 짤막한 글이지만 직각 삼각형의 성질에 관한 후한 시대의 빛나는 성과를 간결하게 집약하고 있으며, 직각 삼각형의 풀이를 위한 여러 가지 정리를 나열했다([2, pp. 120-125], [6, pp. 203-211], [11, pp. 60-65], [12, pp. 440-450]).

주요한 내용을 정리하면 다음과 같다. 여기서 a는 구, b는 고, c는 현을 나타낸다.

(1) $a^2+b^2=c^2$, (2) $x^2+(b-a)x=\dfrac{c^2-(b-a)^2}{2}$ 의 해는 $x=a$이다.

(3) $\dfrac{a^2}{c-b}=c+b$, $\dfrac{a^2}{c+b}=c-b$, $\dfrac{b^2}{c-a}=c+a$, $\dfrac{b^2}{c+a}=c-a$

(4) $\dfrac{(c+b)^2+a^2}{2(c+b)}=c$, $\dfrac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}=b$, $\dfrac{(c+a)^2+b^2}{2(c+a)}=c$, $\dfrac{(c+a)^2-b^2}{2(c+a)}=a$

(5) $\sqrt{2(c-a)(c-b)}=a+b-c$ (6) $2c^2-(a+b)^2=(b-a)^2$

1) 원상은 남병길의 자(字)이다.

이런 규칙을 직각 삼각형의 풀이에 이용할 수 있다. 즉, 직각 삼각형의 알려진 요소를 이용해서 알려지지 않은 요소를 결정할 수 있다. 이를테면 직각 삼각형의 구 a와 $c-b$를 알면 위에서 (3)의 식 $a^2/(c-b)=c+b$ 를 이용해서 $c+b$를 구할 수 있고, 이에 따라 고 $b=\{(c+b)-(c-b)\}/2$ 와 현 $c=\{(c+b)+(c-b)\}/2$ 를 구하게 된다. 이런 규칙 대부분은『구장산술』 제9권(구고) 제1문~제14문에 또다시 등장하고 이용된다.

『구장산술』에서 직각 삼각형의 풀이와 관련해서 다룬 내용은 아홉 가지 a, b, c, $a+b$, $a+c$, $b+c$, $b-a$, $c-a$, $c-b$ 중에서 두 가지를 제시하고, a, b, c, 중에서 모르는 양을 찾는 문제이다. 이런 경우는 모두 ${}_9C_2=36$ 가지 있지만, 중복되거나 불필요한 경우를 제외하면 의미 있는 경우는 다음과 같이 모두 9 가지이다([12, p. 451], [13, pp. 293-294]).

(1) a, b	(2) a, c [또는 b, c]	(3) a, $c+b$ [또는 b, $c+b$]
(4) a, $c-b$ [또는 b, $c-a$]	(5) c, $b-a$	(6) $c-a$, $c-b$
(7) c, $a+b$	(8) $c+a$, $c+b$	(9) $c+a$, $c-b$

『구장산술』에서는 위에서 (1)~(7)의 경우를 다루고 있다.

1.2. 당 · 송 · 원 · 청 시대

구고 문제는 당 시대(618~907)부터 더욱 개발됐다. 9 개의 요소, 즉 구, 고, 현 및 이것들의 합과 차 중에서 하나와 세 가지 곱, 즉 ab, bc, ac 중에서 하나가 주어졌을 때 직각 삼각형을 푸는 문제로 확장되었다. 여기에는 $9\times3=27$ 가지 경우가 있는데, 이 중에서 논의할 의미가 있는 것은 다음과 같은 10 가지이다. 이 중에서 당의 왕효통(王孝通)은『집고산경』(緝古算經)에서 (5), (6), (7)의 경우를 다루었다[12, pp. 452-453].

(1) ab, c	(2) ab, $a+b$	(3) ab, $b-a$	(4) ab, $a+c$
(5) ab, $c-a$[또는 ab, $c-b$]		(6) bc, a	(7) ac, $c-b$[또는 bc, $c-a$]
(8) bc, $a+b$	(9) bc, $b-a$	(10) bc, $a+c$	

송 시대(960~1279)에도 직각 삼각형에 대한 연구가 더욱 더 진전되었다. 양휘(楊輝)는 『상해구장산법』(詳解九章算法, 1261)에서 네 가지 요소 $c+a+b$(현화화), $a+b-c$(현화교), $c+b-a$(현교화) $c-(b-a)=c+a-b$(현교교) 중에서 하나와 6 요소, 즉 세 변 사이의 합과 차 중에서 하나를 알 때, 직각 삼각형을 푸는 형태의 문제를 논의했다. 모든 경우 $4\times6=24$ 가지 중에서 다음과 같은 7 가지가 논의할 의미가 있다[12, 453-456].

(1) $a+b+c,\ b-a$ (2) $a+b-c,\ b-a$ (3) $a+b+c,\ c-a$
(4) $c+b-a,\ a+b$ (5) $c+b-a,\ c+a$ (6) $c+b-a,\ c-b$
(7) $a+b-c,\ c+a$

특히 송과 원 시대에는 천원술(天元術)의 창시로, 그 이전에 연구한 직각 삼각형의 풀이 문제보다 훨씬 더 복잡한 새로운 것이 창안되었다. 『사원옥감』(四元玉鑑)에서는 (284문제 중에서) 101문제가 직각 삼각형에 관한 것일 정도로 이 주제는 더욱 중요해졌다. 더욱 더 놀랍게도 『측원해경』(測圓海鏡)의 모든 문제는 직각 삼각형과 그에 내접하는 원에 관한 연구만으로 이루어져 있다[13, p. 294].

17세기부터 그 뒤로, 예수회의 활동으로 삼각법이 중국에 전파되었고, (직각이거나 아닌) 삼각형의 풀이에 관한 문제가 더욱 발전했으며, 그 전에는 중국 수학에서 전혀 고려되지 않았던 개념, 즉 각의 개념이 중요해졌다. 이에 따라 새로 도입된 대수학이나 삼각법이 중국의 그 이전 방법을 대신했을 것이라고 자연스럽게 생각할 수 있을 것이다. 그렇지만 전혀 그렇지 않았고, 20세기 초까지도 중국에서는 이용 가능한 모든 기법이 언제나 동등한 위치에서 고려되었다. 주목할 만한 점으로, 동문관(同文館) 대학에서 1889년에 출판한 수학 백과 사전 『중서산학대성』에는 직각 삼각형(구고)의 풀이를 위한 중국의 고대 기법이 2개의 장으로 포함되어 있다. 그 사전에는 대수학과 삼각법에 관한 내용이 독립적으로 전개되어 있다[13, p. 294-295].

청 시대(1644~1911)의 수학자들도 새로운 유형의 문제를 연구했는데, 네 가지 요소 $c+a+b,\ a+b-c,\ c+b-a,\ c+a-b$ 중에서 하나와 $ab,\ ac,\ bc$ 중에서 하나가 주어졌을 때 직각 삼각형을 푸는 것이었다. 모든 경우 $4\times3=12$가지 중에서 다음과 같은 8가지가 논의할 의미가 있다. 매문정(梅文鼎)은 『구고거우』(句股擧隅)에서 네 가지 경우를 다루었고 이를 증명했다[12, pp. 456-457].

(1) $ab,\ a+b+c$ (2) $ab,\ a+b-c$ (3) $ab,\ c+b-a$ (4) $ab,\ c+a-b$
(5) $ac,\ a+b+c$ (6) $ac,\ a+b-c$ (7) $ac,\ c+b-a$ (8) $ac,\ c+a-b$

2. 조선에서 직각 삼각형의 풀이

직각 삼각형의 풀이에 관한 문제는 조선 시대의 산학자들도 다루었다. 홍정하(1684~?)의 『구일집』(九一集, 1713년 이후 출간) 제5권 구고호은문(제1~68문)[2]과 제9권 잡록(제16~23문)[3]에서 이런 문제를 찾아볼 수 있다([7], [10]). 유수석[4]의 저서로 추

2) 문항 번호를 5-1-1부터 5-1-68까지로 나타내겠다.
3) 문항 번호를 9-1-16부터 9-1-23까지로 나타내겠다.
4) 남병길은 저자 유수석이 홍정하와 함께 1713년 5월 29일 來朝中이던 당시 중국의 저명한 산학자인 사력 하국주(何國柱)와 수학을 논한 바 있는 유군이라고 추측한다. 이때 유수석은 산

축되며 남병길이 도해한『유씨구고술요도해』는 직각 삼각형에 관한 224개의 문제[5] 만을 다루고 있다[3]. 처음 210문제는 직각 삼각형의 풀이에 관한 것으로[나머지 14 문제는 내접원과 내접 정사각형에 관한 것이다], 직각 삼각형의 일부 요소 또는 요소 사이의 관계를 제시하고 세 변[또는 일부 변]의 길이를 구하는 문제를 다루고 있다.『구일집』에서 다룬 이런 문제는 모두『유씨구고술요도해』에 포함되어 있으며, 이런 문제들은 주어진 조건과 피타고라스의 정리를 이용하여 적절한 다항 방정식을 세워서 풀고 있다. 여기서는『유씨구고술요도해』를 중심으로『구일집』과 비교하면서 설명하겠다.

2.1. 문항 분석

『유씨구고술요도해』 각 문항의 내역을 조사하면 <표 1>과 같다.

『유씨구고술요도해』에서는 가능한 한 모든 경우에 대한 문제를 제시하고 있다. 예를 들면 한 변의 길이와 나머지 두 변 길이의 합·차·곱·몫을 다음과 같이 모든 경우를 고려하고 있다.

4. $a,\ b+c$	5. $b,\ a+c$	6. $c,\ a+b$
7. $a,\ c-b$	8. $b,\ c-a$	9. $c,\ b-a$
10. $a,\ b\times c$	11. $b,\ a\times c$	12. $c,\ a\times b$
13. $a,\ c\div b$	14. $a,\ b\div c$	15. $b,\ c\div a$
16. $b,\ a\div c$	17. $c,\ b\div a$	18. $c,\ a\div b$

그런데 구(a)와 고(b)의 구분이 의미 없는 경우가 많으며, 현(c)에 대해 서로 같은 역할을 하기도 한다. 이를테면 제4문과 5문, 제10문과 11문 등은 서로 쌍대(또는 대칭)를 이루는 같은 유형의 문제로 생각할 수 있다. 실제로,『유씨구고술요도해』에서는 이런 경우에 해법이 서로 같다고 명시하고 있다. 그런데『구일집』에서는 이런 쌍대 문제를 가능한 한 피하고 있는 것으로 보인다.[6]

그리고 겉보기에는 다르지만 결국 똑같은 조건의 문제와 해법이 중복해서 나타나기도 한다. 위의 제13문과 14문에서 제시한 조건 $c\div b$와 $b\div c$는 같은 조건으로 볼 수 있다. 그러나 이 책에서는 별도의 방정식을 만들어 풀고 있다.『구일집』에서는 이런 경우에 한 문제만을 제시하는데, 제13과 14문은 5-1-52로 가름하고 있다. 그리고 제

학에 관한 문답을 하는 중 하국주에게 구고술의 문제 400여 개를 갖고 있다고 시사한 바 있다[1, pp. 一-四]. [10, 인, p. 255]도 보라.

5) 문항 번호를 1부터 224까지로 나타내겠다.

6) 동치인 문제도 등장한다.『유씨구고술요도해』의 제19 · 22 · 26문, 제20 · 24 · 25문, 제21 · 23 · 27문은 서로 동치인데,『구일집』에서도 이 아홉 문제가 5-1-17부터 5-1-25까지 제시되어 있다([3, pp. 36-52], [10, 지, pp. 117-125]). 또 제55 · 56 · 57문(5-1-14 · 15 · 16)도 서로 동치이다([3, pp. 93-97], [10, 지, 114-117]).

<표 1> 『유씨구고술요도해』 문항 내역 88, 89, 90문의 경우 조건 중에서 $(a+b)-c$ (제88문), $a-(c-b)$ (제89문), $b-(c-a)$ (제90문) 등은 겉으로는 다르게 보이지만, 저자 남병길이 도해(그림 해설)에서 이미 지적한 대로 모두 $a+b-c$ (현화교)를 나타내므로 완전히 같은 조건의 문제이다.

<표 1> 『유씨구고술요도해』 문항 내역

번호	내역
1~3	두 변의 길이를 알고, 나머지 한 변의 길이 구하기
4~18	한 변의 길이와 나머지 두 변 길이의 합·차·곱·몫을 알고, 그 두 변의 길이 구하기
19~54	두 변 길이의 합과 (앞의 두 변과 같거나 하나가 다른) 두 변 길이의 합·차·곱·몫을 알고, 세 변의 길이 구하기
55~84	두 변 길이의 차와 (앞의 두 변과 같거나 하나가 다른) 두 변 길이의 차·곱·몫을 알고, 세 변의 길이 구하기
85~111	두 변 길이의 곱과 (앞의 두 변과 같거나 하나가 다른) 두 변 길이의 곱·현화교·제곱의 차·몫을 알고, 세 변의 길이 구하기
112~141	두 변 길이의 제곱의 합과 (앞의 두 변과 같거나 하나가 다른) 두 변 길이의 차·합·곱·몫을 알고, 세 변의 길이 구하기
142~157	두 변 길이의 제곱의 차와 한 변 또는 (앞의 두 변과 같거나 하나가 다른) 두 변 길이의 차·합·곱·몫을 알고, 세 변의 길이 구하기
158~179	세 변 길이의 합 및 세 변 길이 사이의 여러 가지 관계를 알고, 세 변의 길이 구하기
180~195	두 변 길이의 차의 제곱과 (앞의 두 변과 하나가 다른) 두 변 길이의 차의 제곱의 합·차 및 두 변 길이의 차를 알고, 세 변의 길이 구하기
196~210	두 변 길이의 합의 제곱과 나머지 한 변 길이의 제곱의 합·차 및 한 변의 길이[두 변 길이의 차]를 알고, 나머지 두 변[세 변]의 길이 구하기
211~217	직각 삼각형과 내접원에 관한 문제
218~224	직각 삼각형과 내접 정사각형에 관한 문제

『유씨구고술요도해』에서 직각 삼각형의 풀이를 위한 모든 문제의 조건은 [겉보기에는] 서로 다르다. 『구일집』의 경우에는 조건이 같은 문제가 있는데, 『구장산술』에 있는 것과 같은 응용 문제를 제시할 때 이런 경우가 나타난다. 주어진 양이 구(a)와 고현차($c-b$)인 『구일집』의 문제 5-1-5, 5-1-8, 5-1-9는 각각 『구장산술』 제9권의 문제 9-6, 9-10, 9-9과 상황이 서로 같다. 『유씨구고술요도해』에는 이런 응용 문제가 한 개도 등장하지 않는다. 심지어, 직각 삼각형의 풀이를 위한 조건으로 넓이를 제시한 경우도 없으며, 오직 길이 사이의 관계만을 제시하고 있다. 한편, 『구일집』에서는 구와

고의 곱(句股相乘積, $a\times b$)보다는 넓이(句股積, $a\times b\div 2$)를 주로 제시하고 있다. 그러나 『구일집』의 경우에서 알 수 있듯이 풀이에서는 많은 경우에 일단 '넓이를 2배로 하여(置積倍之)' 구와 고의 곱($a\times b$)을 구한 다음에 문제를 해결하고 있다.

158~179번은 "세 변 길이의 합 및 세 변 길이 사이의 여러 가지 관계를 알고, 세 변의 길이 구하기"인데, 그 조건을 구체적으로 나열하면 다음과 같다.

158. $a+b+c,\ b-a$ 159. $a+b+c,\ c-a$ 160. $a+b+c,\ c-b$
161. $a+b+c,\ a\times b$ 162. $a+b+c,\ a\times c$ 163. $a+b+c,\ b\times c$
164. $a+b+c,\ a\times c+b\times c$ 165. $a+b+c,\ a\times c+a\times b$ 166. $a+b+c,\ a\times b+b\times c$
167. $a+b+c,\ a^2+a\times c$ 168. $a+b+c,\ b^2+b\times c$ 169. $a+b+c,\ c^2+b\times c$
170. $a+b+c,\ c^2+a\times c$ 171. $a+b+c,\ c^2+a\times b$
172. $a+b+c,\ (a+b)\times(a+c)$ 173. $a+b+c,\ (a+b)\times(b+c)$
174. $a+b+c,\ c^2+(a+b)^2$ 175. $a+b+c,\ b^2+(a+c)^2$
176. $a+b+c,\ a^2+(b+c)^2$ 177. $a+b+c,\ (a+b)^2-c^2$
178. $a+b+c,\ (a+c)^2-b^2$ 179. $a+b+c,\ (b+c)^2-a^2$

중국 수학에서 언급했던 직각 삼각형의 풀이에 관한 문제 중에서 『유씨구고술요도해』에서 다루지 않은 유형은 다음과 같다.

(1) $a+b-c,\ b-a$ (2) $c+b-a,\ a+b$ (3) $c+b-a,\ c+a$
(4) $c+b-a,\ c-b$ (5) $a+b-c,\ c+a$ (6) $ab,\ c+b-a$
(7) $ab,\ c+a-b$ (8) $ac,\ a+b-c$ (9) $ac,\ c+b-a$ (10) $ac,\ c+a-b$

2.2. 관련 방정식 분석

직각 삼각형의 풀이와 관련된 210 문항에서 이용한 다항 방정식의 내역은 <표 2>와 같다. 그리고 이와 같은 방정식의 작성(모델링) 과정의 예를 몇 가지 들면 다음과 같다.

(1) 이차 방정식

다음 문제는 이차 방정식을 만들어 풀고 있다[3, pp. 41-44].

【20】 구고화는 112자 7치이고 구현화는 135자 2치이다. 구, 고, 현을 묻는다.
勾股和一百十二尺七寸 勾弦和一百三十五尺二寸 問勾股弦

<표 2> 『유씨구고술요도해』와 관련된 방정식

방정식의 형태		문항 번호	문항 수
일 차 방정식	$ax=b$, $x=b \div a$	4, 5, 7, 8, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 88, 89, 90, 143, 146, 161, 167, 168, 177, 178, 179, 183, 186, 192, 193, 194, 200, 203, 205, 208	36
이 차 방정식	$ax^2=b$	1, 2, 3, 6, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 26, 55, 56, 57, 91, 92, 94, 95, 100, 101, 102, 103, 115, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 172, 173, 174, 175, 176, 184, 185	53
	$ax^2+bx=c$	**19**, 20, 21, **22**, 23, 24, 25, **26**, 27, 28, 29, 30, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 60, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 112, 113, 114, 116, 117, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 144, 145, 147, 148, 158, 159, 160, 164, 165, 166, 169, 170, 171, **174**, 180, 181, 182, 187, 188, 189, 190, 191, 195, 196, 197, 198, 199, 201, 202, 204, 206, 207, 209, 210	80(+4) 검게 나타낸 문항은 앞에도 있음
삼 차 방정식	$ax^3+bx=c$	31, 32, 33, 34	4
	$ax^3+bx^2=c$	61, 62, 63, 64	4
	$ax^3+bx^2+cx=d$	162, 163	2
사 차 방정식	$ax^4=b$	85, 86, 87, 96, 97, 98, 99, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111	15
	$ax^4+bx^2=c$	10, 11, **12**, 93, 118, 119, 120, 133, 134, 135, 149, 150, 151	12(+1)
	$ax^4+bx^3+cx^2=d$	35, 36, 65, 66	4

답 구 55자 5치, 고 57자 2치, 현 79자 7치

答 勾五十五尺五寸 股五十七尺二寸 弦七十九尺七寸

해법 양화[구고화와 구현화]를 각각 제곱하고 큰 수에서 작은 수를 뺀 나머지를 실이라고 하자. 양화 중 큰 수에서 작은 수를 뺀 나머지를 2배로 하여 종이라 하고, 1을 우라고 하자. 평방을 풀면 구를 얻는다. 구를 구고화에서 뺀 나머지는 고이고, 고를 고현화에서 빼면 나머지는 현이다.

術曰 兩和各自乘 相減 餘爲實 兩和相減 倍之 爲從 以一 爲隅 平方開 得勾 以勾減勾股和 餘爲股 以股減股弦和 餘爲弦

문제는 구고화 $a+b$ 와 구현화 $a+c$ 가 주어졌을 때, a, b, c 를 구하는 것이다. 해법에서는 $(a+c)^2-(a+b)^2$이 실이고 $2\{(a+c)-(a+b)\}$이 종이며 1이 우인 평방을 풀어 구 a 를 구하고 있다. 즉, 다음과 같은 이차 방정식을 풀어 $x=a$ 를 구하고 있다.

$$(a+c)^2-(a+b)^2=2\{(a+c)-(a+b)\}x+x^2 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

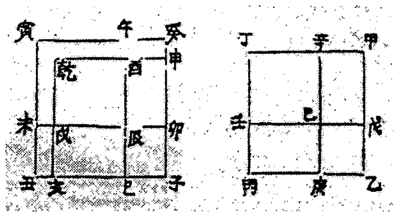


그림 해설(圖解)에서는 해법의 정당성을 오른쪽 그림과 같이 변의 길이가 각각 $a+b$와 $a+c$ 인 두 정사각형을 이용해서 밝히고 있다. 오른쪽 그림에서 戊乙=甲辛 $=a$, 甲戊 = 辛丁 $=b$ 이다. 그러면 다음을 얻는다.

□甲乙丙丁=□戊乙庚己+□辛己壬丁+□甲戊己辛+□己庚丙壬,

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \quad \cdots\cdots \quad ②$$

한편, 왼쪽 그림에서는 卯子=午癸=a, 卯癸=午寅=c이다. 그러면 다음을 얻는다.

□癸子丑寅=□卯子巳辰+□午辰未寅+□癸卯辰午+□辰巳丑未,

$$(a+c)^2=a^2+c^2+2ac \quad \cdots\cdots \quad ③$$

그러므로 식 ②와 ③에 의해 다음이 성립한다(酉辰=酉乾=b).

□癸子丑寅-□申子亥乾(즉 □甲乙丙丁)= $(a+c)^2-(a+b)^2$,

꺾쇠 癸申乾亥丑寅=꺾쇠 午酉乾戊未寅+□癸申酉午+□戊亥丑未

$$= c^2-b^2+2(c-b)a = a^2+2\{(a+c)-(a+b)\}a$$

여기서 □癸子丑寅-□申子亥乾=꺾쇠 癸申乾亥丑寅이므로, 다음이 성립한다.

$$(a+c)^2-(a+b)^2=a^2+2\{(a+c)-(a+b)\}a$$

따라서 이차 방정식 ①을 풀면 $x=a$를 얻는다.

그리고 $b=(a+b)-a$와 $c=(a+c)-a$를 차례로 얻는다.

(2) 삼차 방정식

다음 문제는 삼차 방정식을 만들어 풀고 있다[3, pp. 55-57].

【61】 구현차는 7자 2치 2푼이고, 구와 고를 서로 곱한 적은 80자 62치 8푼이다. 구, 고, 현을 묻는다.

勾弦差五尺二寸九分 勾弦相乘 積一百三十七尺十二寸四十分 問勾股弦

답 **구 6자 6치 3푼, 고 12자 1치 6푼, 현 13자 8치 5푼**

答 勾九尺三寸六分 股十一尺二寸七分 弦十四尺六寸五分

해법 **적을 제곱하여 실이라 하고, 구현차를 제곱하여 하렴이라 하며, 구현차의 2배를 우라고 하자. 입방을 풀면 구를 얻는다.**
術曰 積自乘爲實 差自乘爲下廉 倍差爲隅 立方開 得勾

문제는 구현차 $c-a$ 및 구와 고의 곱 ab가 주어졌을 때, a, b, c를 구하는 것이다. 해법에서는 $(ab)^2$이 실이고 $(c-a)^2$이 하렴이며 $2(c-a)$가 우인 입방을 풀어 구 a를 구하고 있다. 즉, 다음과 같은 삼차 방정식을 풀어 $x=a$를 구하고 있다.

$$(ab)^2=(c-a)^2x^2+2(c-a)x^3 \quad \cdots\cdots \quad ④$$

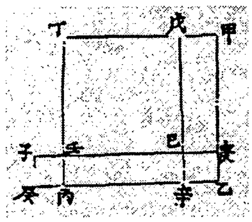


그림 해설에서는 해법의 정당성을 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 현 c과 구 a인 두 정사각형을 함께 그리고 다음을 확인했다. 여기서 甲丁＝甲乙＝c 이고, 戊丁＝戊己＝a 이다.

□甲乙丙丁-□戊己壬丁=꺾쇠 甲乙丙壬己戊
=□庚乙辛己+□甲庚己戊+□己辛丙壬,

$$c^2-a^2=b^2=(c-a)^2+2(c-a)a \quad \cdots\cdots \quad ⑤$$

따라서 [양변에 a^2을 곱하면] $a^2b^2=(c-a)^2a^2+2(c-a)a^3$ 이므로, 삼차 방정식 ④를 풀면 $x=a$를 얻는다.7)

(3) 사차 방정식

다음 문제는 사차 방정식을 만들어 풀고 있다[3, pp. 61-63].

【35】 구고화는 76자 9치이고, 구와 현을 서로 곱한 적은 1,559자 40치이다. 구, 고, 현을 묻는다.
勾股和七十六尺九寸 勾弦相乘 積一千五百五十九尺四十寸 問勾股弦

답 **구 27자 6치, 고 49자 3치, 현 56자 5치**
答 **勾二十七尺六寸 股四十九尺三寸 弦五十六尺五寸**

해법 **적을 제곱하여 실이라 하고, 구고화를 제곱하여 정상렴이라 하며, 구고화를 2배로 하여 부하렴이라 하고, 2를 정우라고 하자. 삼승방을 풀면 구를 얻는다.**
術曰 積自乘 爲實 和自乘 爲正上廉 倍和爲 負下廉 以二 爲正隅 三乘方開 得勾

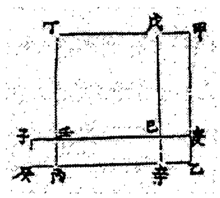
문제는 구고화 $a+b$ 및 구와 현의 곱 ac가 주어졌을 때, a, b, c를 구하는 것

---

7) 그림 해설에서는 식 ⑤의 결과를 얻은 뒤에, 구 $a=\{b^2-(c-a)^2\}\div2\div(c-a)$와 현 $c=[(c-a)^2+\{b^2-(c-a)^2\}\div2]\div(c-a)$을 구하는 방법도 기하적으로 설명하고 있다.

이다. 해법에서는 $(ac)^2$이 실이고 $(a+b)^2$이 정상렴이며 $2(a+b)$가 부하렴이고 2가 정우인 삼승방을 풀어 구 a를 구하고 있다. 즉, 다음과 같은 사차 방정식을 풀어 $x=a$를 구하고 있다.

$$a^2c^2=(a+b)^2x^2-2(a+b)x^3+2x^4 \quad \cdots\cdots \quad ⑥$$



해설(解)에서는 이 해법의 정당성을 밝히기 위해서

$(a+b)^2=c^2+2ab$이므로 다음을 얻는다.

$$(a+b)^2-2(a+b)a+2a^2=c^2+2ab-2ab=c^2$$

따라서 [양변에 a^2을 곱하면] $(a+b)^2a^2-2(a+b)a^3+2a^4=a^2c^2$이므로, 사차 방정식 ⑥을 풀면 $x=a$를 얻는다.

『유씨구고술요도해』에서는 다항 방정식을 푸는 구체적인 과정은 소개하고 있지 않다. 다항 방정식의 풀이 방법에 대해서는 [5, pp. 34-49], [8], [9], [11, pp. 117-140], [13, pp. 221-240] 등을 참조하라.

2.3. 피타고라스 삼조

『구일집』에서는 직각 삼각형의 변의 길이는, 5-1-3, 5-1-8, 9-1-18을 제외하면, 모두 자연수로 나타내어진다. 그것도 구 · 고 · 현이 차례로 24자 · 45자 · 51자인 직각 삼각형이 47문항에, 27자 · 36자 · 45자인 직각 삼각형이 17문항에 반복해서 이용되고 있다. 그리고 나머지 문제에서도 세 변의 길이의 비가 8 : 15 : 17인 것이 5문제이고, 3 : 4 : 5인 것이 2문제이며, 5 : 12 : 13인 것이 2문제이다.

그런데 방정식 작성 과정을 보여주기 위해 제시한 『유씨구고술요도해』의 세 문제에서 알 수 있듯이, 이 책에서는 변의 길이가 거의 대부분 유효 숫자가 3개 또는 4개인 복잡한 수치를 이용하고 있으며, 변 사이의 비례 관계가 선명하게 드러나지 않는다. 실제로, 이런 직각 삼각형의 변들은 [내접하는 정사각형과 관련된 문제 중에서 마지막 두 문제를 제외하면 모두] 책의 앞 부분에서 설명한 <구고현율 구하기>의 방법에 따라 세심하게 설계한 길이를 이용하고 있음을 알 수 있다.

『유씨구고술요도해』의 <서문> 뒤에 있는 <구고현율 구하기>의 시작은 다음과 같다[3, p. 3].

먼저 어떤 수를 놓고 모수라 하고, 다음에 어떤 수를 놓고 자수라고 하자. 「나중에 선택한 수는 먼저 선택한 수보다 작고, 만일 모수가 홀수이면 자수는 짝수를 취한다. 자수와 모수는 홀수와 짝수라는 면에서 반드시 서로 반대이다.」 자수와 모수를 보고 약분할 수 있으면 곧 이를 약분한다. 이에 자수와 모수를 각각 제곱하여 서로 더하면 현이 되고, 또 자수와 모수를 각각 제곱하여 서로 빼면 구가 되며, 또 자수와 모수를

서로 곱하고 이를 2배로 하면 고가 된다.

先任置若干數 爲母數 次任置若干數 爲子數「取次數稍小於先數 而母數若爲奇 則子數取偶 以子母數奇偶必相反」視子母之數 可約 則約之 乃子母數各自乘 相併 爲弦 又子母數各自乘 相較 爲勾 又子母數相乘倍之 爲股也

즉, 모수를 m, 자수를 n이라 하면, $m>n$이고 m과 n은 서로 소이며 둘 중에서 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수이다.[8] 그러면 다음과 같이 직각 삼각형의 세 변의 길이를 얻는다.[9]

$$\{구,\ 고\}=\{m^2-n^2,\ 2mn\},\qquad 현=m^2+n^2$$

따라서 [마지막 두 문제를 제외하면] 모두 유한 소수로 표현되는 길이를 가진 직각 삼각형만을 이용하고 있다. 그리고 아래에 나열한 관찰 결과에서 알 수 있듯이, 대단히 체계적이고 계획적으로 구 · 고 · 현의 길이를 생성했음을 확인할 수 있다. ([3, pp. 335-341]의 <고 · 구 · 현의 길이 분석>을 보라.)

(1) 생성하는 모수는 제217문까지는 최소 11이며, 그 뒤에도 제219문과 220문에서 각각 이용한 3-4-5와 5-12-13의 직각 삼각형을 제외하면 10과 11이다.
(2) 제37문과 제73문에 이용한 직각 삼각형(구: 2.5, 고: 31.2, 현: 31.3)을 제외하면, 합동인 삼각형을 전혀 사용하지 않았다.
(3) 다음의 단 세 가지 경우를 제외하고, 닮은 삼각형도 사용하지 않았다.
(제14문, 제49문), (제37문, 제73문, 제138문), (제16문, 제98문)

3. 맺음말

직각 삼각형을 가장 기본적인 도형의 하나로 다른 도형의 연구를 위한 기초로 이용된다. 특히, 세 변의 길이 사이에서 성립하는 관계(구고법, 피타고라스의 정리) 때문에 [그리고 여기서는 구체적으로 제시하지 않았지만 한 쌍 또는 두 쌍의 닮은 직각 삼각형을 간편하게 이용할 수 있기 때문에] 길이와 거리 측정을 위한 중요한 도구로 이용된다. 이에 따라 동 · 서양의 모든 문화권에서는 직각 삼각형을 고대부터 끊임없이 연구하고 활용했다.

---

8) 사실, $m>n$인 임의의 두 양수 m과 n에 대해 m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2은 직각 삼각형의 세 변의 길이를 형성한다. 그렇지만 제1, 6, 9, 12, 16, 49, 139, 173, 218~222문 등 13문제를 제외한 나머지 209문제에서는 모두 두 양수 m과 n을 서로 소이며 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수인 자연수로 택하고 있다.

9) 본문에서는 m^2-n^2이 구가 되고 $2mn$이 고가 된다고 했지만, 부등식 $m^2-n^2<2mn$이 항상 성립하지는 않는다.

이 글에서 알아본 대로, 중국에서는 매우 최근까지도 직각 삼각형에 대한 자기 나름의 연구 방법을 고집했었고, 조선의 산학자들도 이에 받아들여서 방대하고 포괄적인 연구 체제를 정립했었다. 이런 연구 방법과 결과는 현대 수학과 수학 교육에서 활용할 만한 충분한 가치가 있다고 생각한다. 이를테면 직각 삼각형의 풀이를 위해 다항 방정식을 제작하는 과정(모델링)은, 피타고라스의 정리에 대한 더 깊은 이해, 도형을 활용하는 통찰력과 직관력, 다양한 식의 계산 능력 등을 향상시키는 데 큰 도움을 줄 것으로 보인다.

감사의 글 본 논문은 심사위원님들의 적절한 지적과 훌륭한 의견에 따라 많은 부분을 수정・보완하였습니다. 본 논문을 세심하게 검토해주고 값진 조언을 해주신 심사위원님들께 깊은 감사의 뜻을 표합니다.

참고 문헌

1. 김용운 편(1985), 한국과학기술사자료대계 수학편 6, 여강출판사.
2. 김용운・김용국(1996), 중국수학사, 민음사.
3. 남병길 도해/유인영・허민 옮김(2005), 유씨구고술요도해, 한국수학사학회(한국학술진흥재단 보고용 번역서).
4. 남원상 도해/유인영・허민 옮김(2005), 측량도해, 한국수학사학회(한국학술진흥재단 보고용 번역서).
5. 이상혁 저/홍성사 역(2005), 익산, 한국수학사학회(한국학술진흥재단 보고용 번역서).
6. 차종천 역(2000), 구장산술・주비산경, 범양사출판부.
7. 호문룡(2002), "句股互隱門에 대한 고찰," 한국수학사학회지 제15권 제1호, pp. 43-56.
8. 홍성사・홍영희(2004), "朝鮮 算學者 李尙赫의 方程式論," 한국수학사학회지 제17권 제1호, pp. 1-14.
9. 홍영희(2004), "조선 시대의 방정식론," 한국수학사학회지 제17권 제4호, pp. 1-16.
10. 홍정하 저/강신원・장혜원 역(2005), 구일집 지・인, 한국수학사학회(한국학술진흥재단 보고용 번역서).
11. 李儼・杜石然 저/J.N. Crossley・A.W.-C. Lun 역(1987), *Chinese Mathematics - A concise history*, Claredon Press.
12. Shen Kangshen・J.N. Crossley・A.W.-C. Lun(1999), *The Nine Chapters on Mathematical Art - Companoin and Commentary*, Oxford University Press.
13. Martzloff, Jean-Claude(1987), *A History of Chinese Mathematics*, Springer.

Right Triangles in Traditional Mathematics of China and Korea

Department of Mathematics, Kwangwoon University **Min Her**

We briefly survey the history of Chinese mathematics which concerns the resolution of right triangles. And we analyse the problems of *Yucigugosulyodohae*(劉氏勾股述要圖解) which is the mathematical book of Chosun Dynasty and contains the 224 problems about right triangles only. Among them, 210 problems are for resolution of right triangles. We also present the methods for generating the Pythagorean triples and constructing polynomial equations in *Yucigugosulyodohae* which are needed for resolving right triangles.

Key words: right triangle, *Zhoubi suanjing*(周髀算經), *Jiuzhang suanshu*(九章算術), *Guiljip*(九一集), *Yucigugosulyodohae*,

2000 Mathematics Subject Classification: 01A25, 51-03

ZDM Subject Classification: A30, G30

논문 접수 : 2005년 6월 4일, 심사 완료 : 2005년 7월