한국수학사학회지 제18권 제3호(2005년 8월), 39-54

䃴積과 益積의 歷史

서강대학교 수학과 홍성사
sshong@sogang.ac.kr
숙명여자대학교 수학과 홍영희
yhhong@sookmyung.ac.kr
단국대학교 장혜원
chwlyon@hanmail.net

중국 산학에서는 九章算術의 제곱근과 세제곱근의 해법을 일반화하여 賈憲이 도입한 增乘開方法을 통하여 다항방정식의 해의 근사값을 구한다. 이 때 도구로 사용되는 조립제법에서 음수와 그 연산을 정확히 사용하지 않아서 䃴積, 益積이라는 개념이 나타나는데, 이는 조선 산학에도 그대로 사용되었다. 먼저 중국과 조선에서 䃴積, 益積에 대한 역사를 조사하고, 19세기 중엽에 조선 산학자 南秉吉과 李尙爀이 䃴積과 益積에 대한 충분조건을 얻어내고 이를 증명한 사실을 밝혀낸다.

주제어 : 다항방정식, 增乘開方法, 䃴積, 益積, 九一集, 算學正義, 翼算, 南秉吉, 李尙爀

0. 서론

중국 수학에서 방정식의 풀이는 제곱근, 세제곱근의 풀이부터 시작되었다. 기원전 2세기 이전에 쓰여져 가장 오래된 산서로 알려진 산수서算數書(Suan shu shu)에 이미 영부족盈不足을 이용하여 240의 제곱근의 근사값 $15\frac{15}{31}$를 구하였고([1]), 기원전 1세기에 편찬된 것으로 알려진 주비산경周髀算經(Zhou bi suan jing, [14], [15])에서는 제곱근, 세제곱근을 구할 수 있는 것으로 되어있다. 그러나 이들의 해법을 정확하게 기술한 책은 구장산술九章算術(Jiu zhang suan shu, [5], [14], [15])이 최초이고 이는 그대로 19세기까지 인용되고 있다. 이들이 곧 일반 다항방정식으로 발전되었는데, 이들의 표현 방법의 발전에 대한 역사는 [18]을 참조한다. 초기의 풀이 방법에 대한 자세한 내용은 알 수 없고 다만 11세기 중엽에 실전된 가헌賈憲(Jia Xian)의 석쇄산서釋鎖算書(Shi suo suan shu)에서 다항방정식을 풀어내는 증승개방법增乘開方法(Zeng cheng kai fang fa)을 도입하였다고 양휘楊輝(Yang Hui)가 상해구장산법詳解九章算法(Xiang jie jiu zhang suan fa, 1261, [14], [15])에 언급하였다. 그는 이 책에서 增乘開

方法을 사용하여 제곱근과 세제곱근을 구하고, 이를 增乘開平方法과 增乘開立方法이라 하였다. 또 Pascal 삼각형의 그림과 함께 이 내용을 영락대전永樂大典(Yong Le da dian, 1408, [14], [15])에 다시 인용하고 있다. 그러나 增乘開方法을 일반 다항방정식에 가장 명확하게 설명하고 있는 책은 진구소秦九韶(Qin Jiu Shao, 1202-1261?)의 수서구장數書九章(Shu shu jiu zhang, 1247, [3], [14], [15])이다. 이야李冶(Li Ye, 1192-1279)도 그의 저서 측원해경測圓海鏡(Ce yuan hai jing, 1248, [14], [15])과 익고연단益古演段(Yi gu yan duan, 1259, [14], [15])에서 增乘開方法을 논하고 있다.

불행하게도 이들 세 수학자들 사이에 전혀 교류한 흔적이 없어서 가장 정확하게 增乘開方法을 사용한 數書九章의 해법이 제대로 전달되지 못하였다. 또 조선 산학에 가장 영향을 많이 미친 주세걸朱世傑(Zhu Shi Jie)의 산학계몽算學啓蒙(Suan xue qi meng, 1299, [14], [15])도 增乘開方法을 사용한 것으로 되어있지만 數書九章에 들어있는 계산법은 나타나지 않는다.

增乘開方法은 다음절에서 간단히 설명하겠지만 서양에서는 19세기의 Ruffini-Horner 방법으로 현재의 조립제법을 도구로 사용한다. 正負術(Zheng fu shu)이 도입된 九章算術에는 음수의 계산법 중 덧셈과 뺄셈만 도입되어 있다. 산학자들은 유리수의 곱셈이나 나눗셈을 다 할 수 있었지만 철저하게 九章算術에 의존하는 습관 때문에 조립제법을 사용할 때 계수들의 부호를 정확하게 나타내지 않고 계산하는 과정에서 현재는 사용할 필요가 없는 개념인 번적飜積(Fan ji)과 익적益積(Yi ji)을 도입하였다.

우리는 지금까지 조선 산학에서 방정식의 역사에 대한 일련의 연구를 진행하였는데 ([17], [18], [19], [20]), 飜積과 益積은 현대 수학적으로는 의미가 없을 수도 있지만, 모든 조선 산서에서 이들을 취급하고 있으므로 우리는 이들의 역사를 정리하고자 한다.

이 논문의 목적은 飜積과 益積의 역사를 조사하고, 또 조선 산학자들이 이들을 어떻게 취급하였는지를 알아보는 것이다. 특히 남병길南秉吉(1820-1869)의 산학정의算學正義(1867, [16])에 나타나 있는 결과를 토대로 이상혁李尙爀(1810-?)은 그의 저서 익산翼算(1868, [9], [16])에서 이들이 나타나는 조건을 구하였는데 이는 어떤 산서에도 나타나있지 않은 결과로 매우 중요한 역사적 사실이다. 실제로 算學正義는 南秉吉과 李尙爀의 공저로 보아야 한다.

사료는 가능한대로 1차 사료를 사용하고 조선 산학은 韓國科學技術史資料大系 數學編 ([16]), 중국 산학은 中國科學技術典籍通彙(Zhong guo ke xue ji shu dian ji tong hui) 數學卷(Shu xue quan, [14])과 中國歷代算學集成(Zhong guo li dai suan xue ji cheng, [15])을 참고하고, 2차 사료로 [2], [4], [6], [7], [8], [10], [11], [12], [13]을 이용한다.

1. 중국 산학의 飜積과 益積

독자의 이해를 돕기 위하여 먼저 增乘開方法을 간단히 설명하자. 전술한 대로 방정식의 해법은 제곱근, 세제곱근을 구하는 방법에서 시작하였는데 이들을 구할 때 항상 해의 각 자리수를 차례로 구하는 것은 잘 알려져 있다. 이와 마찬가지로, n차 다항방정식 $p(x)=0$의 근도 가장 큰 자리의 수 x_0을 구하고 나서 다음 자리의 수를 다음과 같이 구하는 것을 增乘開方法이라 한다. 이 경우에 x_0을 초상初商(Chu shang), 다음 자리의 수를 차상次商(Ci shang)이라 한다. $x-x_0=y$ 라 하면 y에 관한 방정식을 구하여야 하는데, 다항식 $p(x)$를

$$p(x)=b_n(x-x_0)^n+b_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\cdots+b_1(x-x_0)+b_0$$

과 같이 나타내고, b_n, b_{n-1}, $\cdots$, b_1, b_0을 구하면 된다. 이 때 $(x-x_0)^n$을 구할 때 11세기의 중국 수학자들은 Pascal 삼각형으로 알려져 있는 것을 이미 알고 이를 사용하여 계산하였다. 그러나 11세기말에서 12세기초에 활동한 중국 수학자 가헌賈憲과 유익劉益(Liu Yi)은 현재 우리가 사용하고 있는 나머지 정리와 조립제법을 사용하여 b들을 구할 수 있었다.

즉 위의 식은

$$p(x)=[b_n(x-x_0)^{n-1}+b_{n-1}(x-x_0)^{n-2}+\cdots+b_1](x-x_0)+b_0$$

이 되어 $p(x)$를 $x-x_0$으로 나누는 조립제법을 사용하여 b_0과 몫을 구할 수 있다. 한편 b_1은 같은 방법으로 위의 몫을 $x-x_0$으로 나누었을 때 얻어지는 나머지이다. 따라서 위의 몫을 $x-x_0$으로 나누는 조립제법을 사용하여 b_1을 구할 수 있다. b_2, b_3, $\cdots$, b_n을 같은 방법으로 계속하여 조립제법을 사용하여 구할 수 있다. 이와 같이 하여 次商에 대한 방정식

$$b_ny^n+b_{n-1}y^{n-1}+\cdots+b_1y+b_0=0$$

을 구하여 次商을 구하고 같은 방법으로 다음 자리의 수를 구하였다. 조립제법은 원래 다항식의 계수에 x_0을 곱하여 다음 계수와 더해나가는 과정을 거친다고 하여, 위의 방법을 증승개방법增乘開方法이라 하였다.

천원술天元術(Tian yuan shu)을 사용하여 다항식을 나타내고, 또 다항식의 연산을 쉽게 계산할 수 있었던 중국 산학자들에게는 增乘開方法이 매우 간단한 algorithm이었다. 따라서 그들의 산서는 문장제(word problem)로 주어진 문제를 만족하는 방정식의 구성에 관심을 두고 그 풀이에 대한 언급은 거의 하지 않았다.

전술한 대로 가장 먼저 增乘開方法을 완벽하게 기술하고, 또 飜法(fan fa)을 최초로 도입한 책이 秦九韶의 數書九章인데 그는 제5권의 첨전구적尖田求積의 술術과 초草에서 다음과 같이 언급하였다.

"問有兩尖田一段 其尖長不等 兩大斜三十九步 兩小斜二十五步
中廣三十步 欲知其積幾何
答曰 田積八百四十步
術曰 以少廣求之飜法入之 置半廣自乘爲半冪與小斜冪相減相乘爲小率 以半冪與大斜冪相減
相乘爲大率 以二率相減餘自乘爲實 併二率倍之爲從上廉 以一爲益隅 開飜法三乘方得積
草曰 … 四百六億四千二百五十六萬爲實 … 七十六萬三千二百爲從上廉 以一爲益隅
開玲瓏飜法三乘方 … "

즉 방정식 $-x^4+763200x^2-40642560000=0$의 增乘開方法의 풀이 과정에 飜法이 들어 있다고 하였다. 草에는 위의 인용에 이어서 이 풀이 과정을 문장으로 나타내고, 또 이어서 정부개삼승방도正負開三乘方圖라고 하여 조립제법에 나타나는 다항식들을 천원술을 사용하여 정확하게 나타내었다. 다만 數書九章 이후에는 음수의 산대 표시를 마지막 0이 아닌 자리수에 빗금을 그어 나타내었는데 數書九章에는 이 기법을 사용하지 않고 다른 산서와 같이 다항식은 천원술을 사용하고 이에 대한 설명을 문장으로 나타내고 있으며 이 과정에서 상수항은 항상 음수로 보고, 그 나머지 음의 계수는 음(＝負)이라는 것을 정확히 나타내어 增乘開方法의 과정을 표현하였다. 위의 術과 草에서 飜法에 대한 설명은 없지만 이는 正負開三乘方圖에서 언급한 환골換骨(Huan gu)을 뜻하는 것임을 알 수 있다. 이 과정을 생략하는데 독자들이 數書九章의 과정과 현재 사용하고 있는 조립제법을 계산하여 함께 비교하면 좋을 것이다([9]). 방정식의 해는 840인데 初商 800을 이용하여 조립제법을 계산하여 마지막 상수항의 계산에서

$$-40642560000+800\times98560000=-40642560000+78848000000=38205440000$$

이 되는데, 원래 상수항 -40642560000과 계산한 결과의 상수항 38205440000의 부호가 서로 다르게 나왔다. 이를 "以負實消正積其積乃有餘爲正實謂之換骨"이라 하여 원래 항과 조립제법의 결과의 부호가 바뀌는 것을 換骨이라 하였다. 그는 이 예를 제외하고는 換骨이라는 단어를 사용하지 않았다. 왜냐하면 계수의 부호만 정확히 알고 있으면, 특별히 언급할 내용이 아니라고 생각한 것으로 보인다. 이와 같은 뺄셈(실제로는 다른 부호의 덧셈)을 번감飜減(fan jian)이라 하여 위의 해법을 飜法이라 하였는데 數書九章이후에 이를 飜積 혹은 飜積法(Fan ji fa)이라 부르기도 한다. 秦九韶는 飜法

이라는 단어를 이 문제에만 사용하였다. 또 飜減이 들어 있는데도 飜法이라는 단어를 사용하지 않은 예는 제8권의 요도원성遙度圓城의 문제로 방정식은

$$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11664x^2-34992=0$$

인데 이 방정식의 해 3을 구하는데 조립제법을 사용하면 4차항과 2차항의 계수에서 飜減이 나타난다. 그러나 그는 이 풀이에 飜法이 들어 있다고 언급하지 않았다.

다음에 數書九章 제8권의 고지추원古池推元을 인용하자.

"問有方中圓古池 堙圮餘一角 從外方隅斜至內圓邊七尺六寸
欲就古跡修之 欲求圓方方斜各幾何
答曰 池圓徑三丈六尺六寸四百二十九分寸之四百一十二
方面三丈六尺六寸四百二十九分寸之四百一十二
方斜五丈一尺八寸四百二十九分寸之四百一十二
術曰 以少廣求之投胎術 入之斜自乘倍之爲實 倍斜爲益方 以半爲從隅
開投胎平方得徑 又爲方面以隅併之共爲方斜
草曰 … 一萬一千五百五十二爲實 … 一百五十二爲益方 以半寸爲從隅開平方 …
以商隅相生 得一萬五千爲正方 以消益方一萬五千二百 其益方餘二百
次與商相生得六百投入實得一萬二千一百五十二 … "

즉, 방정식 $0.5x^2-152x-11552=0$에 增乘開方法을 사용하는데, 初商을 300으로 조립제법을 시행하면 상수항에서 " $-11552+(-600)$"이 나타나는 것을 草에서 "투입投入"이라고 설명하고, 이 과정이 나타나는 해법, 즉 절대값이 증가하는 경우를 투태술投胎術(tou tai shu)이라 하였다. 앞에서 언급한 대로 음수와 양수를 정확히 나타내면 별다른 의미는 없다. 數書九章 이후에는 投胎術을 益積이라 하는데 이 경우도 이 예를 제외하고 다른 곳에서는 사용하지 않고 있다. 飜減이 나타나는 경우처럼 제12권의 돈적양용囤積量容에서 방정식

$$16x^2+192x-1863.2=0$$

의 근사해가 6.35인데 初商을 6으로 하는 조립제법의 1차항에서 $192+16\times6=288$이 나타나 그 절대값이 증가하지만 그는 益積이라는 용어를 사용하지 않고, 또 속상續商 0.05에 대한 조립제법의 상수항에서 飜減이 일어나지만 번법이 들어있음을 역시 언급하지 않았다. 秦九韶는 상수항을 제외하고 나머지 계수의 부호를 정확히 나타내었으므로 飜積과 益積에 대하여 한번 언급하는 정도로 크게 의미를 부여하지 않았다. 불행하게도 數書九章은 淸代에 재발견될 때까지 잊혀지게 되어([20]) 가장 정확하게 增乘開方法을 해설한 내용이 일반에게 알려지지 않아서 혼란을 일으키게 되었다.

다음으로 李冶의 測圓海鏡과 益古演段에 나타나는 飜法과 益積에 대하여 알아보자. 이예李銳(Li Rui, 1768-1867)는 測圓海鏡에 細草를 달아 測圓海鏡細草(Ce yuan hai jing xi cao, 1797 [14], [15])를 출판하였다. 飜法이 들어 있는 문제는 제4권 제5문; 제5권 제9문, 제12문; 제6권 제8문; 제7권 제3문, 제4문, 제10문; 제10권 제8문이다.

이 중에 제7권 제4문을 제외하고는 모두 상수항에서 飜減이 일어나고, 전술한 문제는 1차항에서 번감이 일어난다. 실제로 제4권 제5문에서도 첫 번째 몫을 계산할 때 1차항에서, 두 번째 몫을 계산할 때도 飜減이 일어난다. 또 제5권 제9문과 같이 次商을 구하는데 상수항이 아닌 항에서 飜減이 나타나는 경우도 있다. 따라서 제7권 제4문을 제외하면 測圓海鏡의 飜減은 주로 상수항에서 나타나는 것으로 보아야 한다. 제6권까지 나타난 飜法은 제4권 제5문의 "又法"의 경우를 제외하고는 모두 李銳가 細草를 달면서 "飜法在記"라는 문구를 첨가하여 나타내었다. 제5문에서 "又法 … 一益隅飜開得半經"으로 "飜開"가 처음 나타나고, 이의 草에 "飜法在記"를 첨가하였다. 이 경우는 李銳의 문장인지 李冶의 문장인지 구별이 되지 않는다. 제7권 세 문제에서 法과 草에서 구하는 방정식 다음에 "飜開", "飜法開之", "飜法", "飜法開" 등으로 飜法이 나타나는데 이들은 틀림없이 李冶의 문장이다. 또 제10권 제8문의 경우 法에서는 "飜開之"라 하고, 草에서는 "倒積開"라 하였다.

測圓海鏡에서 취급한 益積은 제7권 제1문, 제2문과 제9권 下의 제4문이다. 제7권 제1문에는 세 개의 방정식에서, 제2문에는 두 개의 방정식에서 나타나는데 이들도 구하는 방정식 다음에 "益積開平方", "益積開之" "益積開" "益積開立方" 등으로 益積을 나타내었다. 한편 제7권 제2문의 경우에는 제7권 제4문과 같이 상수항이 아닌 항에서 飜減이 나타난다. 그러나 이를 飜法이라 하지 않고 益積이라고만 하였다. 따라서 李冶는 제7권 제4문의 飜法을 제외하면 飜法, 益積을 모두 상수항에 관한 것으로 본 것으로 추정되고, 또 그는 제7권부터 飜法과 益積을 도입한 것으로 보아야 한다.

李冶의 저서 益古演段 제24문의 방정식

$$-1.75x^2+108x-1449=0$$

의 해는 42인데 次商의 상수항과 1차항을 구할 때 飜減이 나타난다. 이를 "倒積倒從開平方"이라 하고, 注에서 "[案]法內所言倒積倒從卽飜積法也"라고 하여 전술한 測圓海鏡 제10권 제8문과 함께 정리하였다. 이 注속에 增乘開方法을 필산 형식으로 나타내었는데 전혀 계수의 부호 표시는 하지 않고 경우에 따라 빼고 더하였다. 18세기의 注인데도 달라진 것이 전혀 없음을 알 수 있다. 따라서 여전히 飜積, 益積이라는 단어가 필요하였을 것이다.

楊輝는 승제통변산보乘除通變算寶(Cheng chu tong bian suan bao, 1274) 세 권, 속고적기산법續古摘奇算法(Xu gu zhai ji suan fa, 1275) 한 권, 전무비류승제첩법田畝比類乘除捷法(Tian mu bi lei cheng chu jie fa, 1275) 두 권을 통합하여 양휘산법楊輝算

法(Yang Hui suan fa, [14], [15])으로 출판하였는데 飜積은 田畝比類乘除捷法 卷下의 제10문에 飜積術로 들어있다. 방정식은

$$-x^2+60x-864=0$$

이고, 해는 36이다. 初商 30으로 조립제법을 시행하는데

"草曰 … 除積九百反減元積八百六十四餘積三十六…"

이라 하여 그는 飜減을 反減(fan jian)으로 표현하였다. 또 그가 익적개방술益積開方術이라 부른 문제는 제7문, 제12문에 들어 있지만 이는 [19]에 자세히 설명한 것으로 增乘開方法의 益積과는 상관이 없다. 제7문의 방정식은 $x^2-12x=864$인데 初商 30으로 조립제법을 시행하면 오히려 1차항에서 그의 "反減"이 나타나고, 상수항에서는 익적이 나타나지 않는다.

위의 문제는 增乘開方法이 정립되는 과정에 劉益이 그의 실전된 의고근원議古根源(Yi gu gen yuan)에 도입한 방법을 楊輝가 인용한 것이다. 실제로 제7문은 益積開方術로 풀고 이어서 감종개방술減從開方術로 같은 문제를 풀었다. 후자는 增乘開方法과 일치하는 것으로 이를 현재 기호로 나타내면 다음과 같다.

방정식 $x^2-ax=b$에 대하여 初商을 α라하고 次商을 y라 하면 $x=y+\alpha$이고, 따라서 $(y+\alpha)^2-a(y+\alpha)=b$를 계산하여

$$y^2+2\alpha y-ay=(b+a\alpha)-\alpha^2,\ \text{혹은}\ \ y^2+[(\alpha-a)+\alpha]y=b-(\alpha-a)\alpha$$

를 얻는데, 전자에서 $(b+a\alpha)$의 과정을 "益積"이라 하였고, 후자는 같은 오른쪽 변을 $b-(\alpha-a)\alpha$로 보아 "減從"이라 하였다([12], [13]). 楊輝는 제9문에 "[演段]曰若不益積 便用減從 或有不可益積者 須用減從開之"라 하였다. 그의 益積은 우리의 益積과 다르다. 따라서 楊輝는 飜積은 알고 있었지만, 增乘開方法과 관계된 益積은 모르고 있었던 것으로 보아야 한다. 또 2차방정식의 모든 경우를 분류하여 취급한 오경吳敬(Wu Jing)의 구장산법비류대전九章算法比類大全(Jiu Zhang suan fa bi lei da quan = 구장상주비류산법대전九章詳注比類算法大全, 1450, [14], [15])에도 이 풀이를 "帶從隅益積開平方"이라 하였다.

마지막으로 조선 산학에 가장 영향을 많이 끼친 朱世傑의 算學啓蒙에서 취급한 飜積을 알아보자. 朱世傑은 益積은 전혀 취급하지 않고, 飜積은 모두 算學啓蒙 卷下의 개방석쇄문開方釋鎖門에 나타나는데, 제13문, 제15문, 제20문, 제21문, 제22문, 제27문, 제29문에 들어 있다고 하였다. 그러나 제29문에는 飜減이 들어 있지 않아서 이 문제는 제외하여야 한다. 이들은 모두 구하는 방정식 다음에 "飜法開之"라는 단어로 나타내었고, 특이하게 모든 飜減이 상수항에서는 하나도 일어나지 않았다. 또 조립제법의

결과로 상수항이 아닌 항에서 절대값이 늘어나는 경우가 여러 차례 나타나는데 이를 秦九韶와 마찬가지로 益積으로 보지 않았다. 朱世傑이 "明開方法 置積爲實及方廉隅 同加異減開之"로 增乘開方法을 설명하고 있는데 商과 직전에 구한 항과 곱하여 다음 항에 더하는 것을 九章算術의 正負術의 덧셈 법칙, 즉 同加異減으로 설명하는데 實, 方, 廉, 隅의 부호에 대한 언급이 없다. 이와 같은 환경에서 일어난 개념이 飜積, 益積이다. 모든 산서에서 방정식을 開方式이라 하는데 算學啓蒙에서 朱世傑은 開方式과 함께 開方數式이라는 용어를 開方釋鎖門의 제18문, 제24문, 제15문, 제26문, 제27문, 제29문에서 사용하고 있는 것도 특이한 점이다.

이상에서 우리는 조선 산학에 영향을 크게 끼친 네 사람의 저서에서 飜積, 益積을 조사하였는데 그들 사이에 통일성도 없고 각 저자도 체계적이지 못한 것을 알 수 있다.

2. 조선 산학의 飜積, 益積

이 절에서는 조선 산학의 飜積과 益積에 대한 역사를 조사한다. 먼저 19세기 이전의 대표적인 조선 산학자 홍정하洪正夏(1684-?)가 다룬 飜積과 益積을 조사하고, 19세기의 저서로 南秉吉의 算學正義와 李尙爀의 翼算에 나타나는 飜積과 益積의 연구 결과를 조사한다.

洪正夏는 그의 저서 구일집九一集 ([16])에서 飜減이 포함된 문제를 상당히 많이 다루고 있다. 九一集은 모두 8卷 18門과 제9권 雜錄으로 이루어지는데, 卷之四 구척해은문毬隻解隱門부터 卷之八까지 다항방정식을 취급하고 있다. 洪正夏는 九一集을 편찬하면서 朱世傑의 算學啓蒙과 楊輝의 楊輝算法을 철저히 연구한 것으로 보인다. 실제로 18門중에 13門의 제목은 算學啓蒙에서 따오고 나머지도 算學啓蒙과 같은 내용을 다루고 있고, 또 楊輝의 田畝比類乘除捷法의 문제를 많이 인용하고 있다. 1절에서 언급한 대로 算學啓蒙의 飜法은 모두 상수항이 아닌 항에서 飜減이 나타나고, 田畝比類乘除捷法의 飜減은 상수항에서 일어난다. 그는 이 두 가지 사실을 구조적으로 받아들여 飜減이 상수항에서 일어나는 것을 飜積法, 그렇지 않은 경우를 飜法으로 정확하게 구별하여 나타내었다. 따라서 중국의 산학에서 이들이 혼용하여 나타나는 것을 피하였다. 특히 飜法의 경우 첫 번째 조립제법뿐 아니라 次商을 위한 방정식의 고차 항을 계산할 때 飜減이 생기는 경우도 모두 포함시켰다. 다만 卷之四의 부병퇴타문缶甁堆垜門의 제18문과 제19문의 해에는 飜減이 들어 있지 않은데도 "以立方飜法開之"라 하고 있다. 그러나 제18문에 들어있는 一法의 방정식은 그가 지적한 대로 飜積法이다. 洪正夏도 卷之五의 구고호은문句股互隱門의 제64문의 풀이까지 算學啓蒙과 같이 방정식만 구하고 그 풀이에 대하여 논하지 않았는데 이 문제에서 처음으로 방정식

$$0.5625x^2-18x-81=0$$

에 대하여 增乘開方法을 설명하면서 상수항에서 益積이 나타나는 것을 설명하고 이를 "同加異減", 즉 九章算術의 덧셈 법칙을 들었는데 모든 增乘開方法에 통용되는 것인데 왜 이 문장을 첨가하였는지 알 수 없다. 飜積法과 마찬가지로 그는 이 경우를 "以平方益積法開之"라 하였다. 또 그는 次商을 위한 방정식의 1차항을 계산하는데 飜減이 들어있는 것을 지적하였는데 그의 정의에 따르면 이 방정식의 풀이는 益積法인 동시에 飜法이지만 飜法에 대한 언급은 하지 않았다. 益積法이 언급된 것은 오직 이 문제 하나뿐이다. 이어서 제65문에 다시 增乘開方法을 설명하면서 다시 飜減이라는 단어를 사용하였는데 상수항의 경우에 "此飜積法"이라고 주를 달아서 飜積法이라 하는 이유를 들어놓았다. 이 경우에도 飜減이 한번 더 나타나는 것을 지적하여 이 경우도 飜積法인 동시에 飜法인 셈이다. 따라서 洪正夏는 상수항의 변화를 다른 항의 변화에 비하여 우선적으로 생각한 것은 틀림없다. 한편 卷之六 개방각술문開方各術門 上의 제24문에 위에서 언급한 楊輝의 益積術을 그대로 인용하고 있다. 이로 미루어 洪正夏는 益積法과 益積術을 구별한 것으로 보이고, 따라서 그는 飜積, 益積을 가장 체계적으로 정리한 수학자라 할 수 있다.

洪正夏는 다만 增乘開方法을 적용하는 과정에서 飜積, 益積이 나타나는 경우를 모두 들어 놓았지만, 이들이 일어나기 위한 조건에 대하여 전혀 논의한 적이 없다. 실제로 우리가 조사한 자료로는 중국 산학에도 이 조건을 다룬 결과는 없다. 南秉吉과 李尙爀은 2차방정식에 대하여 飜積, 益積이 일어나기 위한 조건을 구하였다.

算學正義에서 우선 2차방정식을 다음과 같이 분류하였다. 제곱근을 정사각형의 넓이를 알고 한 변을 구하는 것으로 정의하고, 이를 확장하여 직사각형의 넓이를 알고 두 변을 구하는 문제로 이 경우에 반드시 두 변의 차(=장활교長闊較)나 두 변의 합(=장활화長闊和)을 알아야 하는데, 이 경우에 나타나는 방정식을 대종帶從이라 하였다.

따라서 이들이 취급하는 2차방정식은 두 변의 길이 x, y에 대하여, 다음 두 조건을 만족하는 2차방정식이다 $(0<y<x)$.

$$\begin{cases} x-y=a \\ xy=b \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases} \quad (0<a,\ b)$$

처음 경우는 다음 두 개의 방정식을 얻는다.

$$-y^2-ay+b=0 \quad \cdots\cdots \quad (A)$$

$$x^2-ax-b=0 \quad \cdots\cdots \quad (B)$$

이때, (A)를 교수대종법較數帶從法(=翼算에서는 교종較從)이라 하고 (B)를 감종평방법減從平方法(=翼算에서는 감종減從)이라 한다.

장활화가 주어진 두 번째 경우 x와 y는 다음 방정식의 근이다.

$$-x^2+ax-b=0 \quad \cdots\cdots \quad (C)$$

이를 화수대종법和數帶從法(=翼算에서는 화종和從)이라 한다. 물론 조건에서 x, y를 소거하여 이들을 얻을 수 있지만, 음의 항을 모두 이항시켜 등식을 만들면 이들이 바로 직사각형의 넓이를 이용하여 만들어진 것을 알 수 있다.

2차방정식의 較從(A), 減從(B), 和從(C) 세 경우의 增乘開方法에 대하여 算學正義에서 아래 그림을 통하여 증명하고 있다. 각 그림에서 x, y는 長장(=긴 변), 활闊(=짧은 변)을 나타내고 a는 (A)의 경우 y의 初商, (B), (C)의 경우 x의 初商을 나타내고 β는 $y-\alpha$, 또는 $x-\alpha$, 즉 次商을 나타낸다. 이때 각 경우에 주어진 사각형의 넓이 $xy=b$를 나머지 사각형들의 합으로 아래와 같이 정리하면 增乘開方法으로 구한 β에 대한 방정식을 얻는다.

그림 (A)에서 바로 $-\beta^2-(a+2\alpha)\beta+(-\alpha^2-a\alpha+b)=0$을 얻는다. 또 마찬가지 방법으로 그림 (C)의 왼쪽 경우도 대응되는 次商의 방정식을 얻을 수 있다. 減從과 和從의 경우는 아래에서 자세히 설명하기로 하자. 이와 같은 사고는 九章算術에서 제곱근을 구하는 과정을 정사각형에 적용하여 얻은 것에서 시작된 것으로 문자가 없는 경우에도 일반론을 도형을 이용하여 나타낸 것으로 동양 수학에서 많이 활용되는 방법이다.

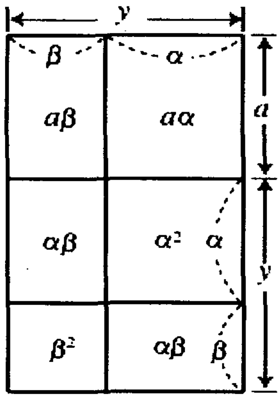


그림 (A)

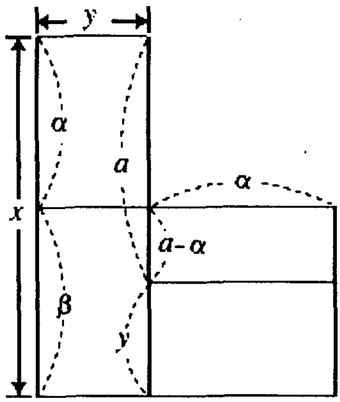


그림 (B)

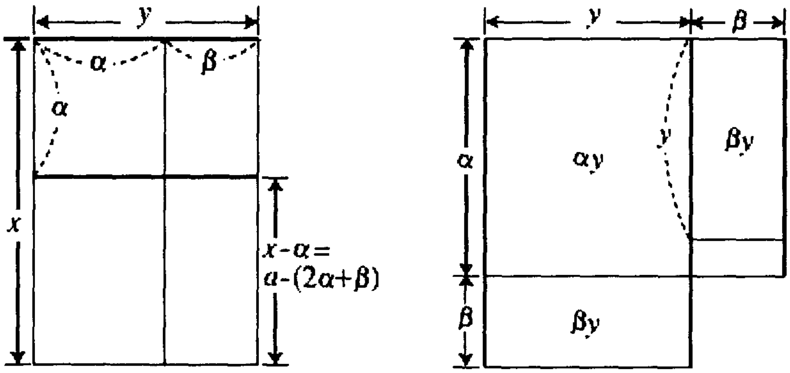


그림 (C)

저자들은 增乘開方法에 그치지 않고 이 그림을 통하여 益積과 飜積을 설명하고 있다.

먼저 減從, 즉 그림 (B)의 경우를 보자.

$(y+\alpha)\beta = b + (a-\alpha)\alpha$와 $y+\alpha = (\alpha+\beta-a)+\alpha = \beta + (2\alpha - a)$에서

$[\beta + (2\alpha - a)]\beta = b + (a-\alpha)\alpha$

를 얻고, 오른쪽 변을 이항한 것이 次商을 위한 방정식, 즉 增乘開方法에서 얻어지는 방정식이다. 따라서 오른쪽 변이 次商을 위한 방정식의 상수항의 절대값이다. 그런데 이는 원래 방정식의 상수항 b에 그림의 오른쪽에 들어 있는 작은 사각형의 넓이를 더한 것이다. 따라서 상수항의 절대값이 늘어난 것이다.

독자들은 이 그림에서 $\alpha < a$인 것에 주의하여야 한다. 이 그림에서 α를 a보다 크게 잡으면 益積이 나타나지 않는 것을 그림 (B)와 같이 그려서 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 그들은 益積을 "減從之變例"라 하였다. 算學正義에서는 이 문장으로 끝을 내었지만, 減從에서 $\alpha < a$가 益積이 일어나기 위한 충분조건이라는 것을 언급한 것은 翼算이다. 즉 "和在隅 而較<卽廉也>大於初商 則爲益積"이라고 하였다. 이 경우 "和在隅"란 減從을 $x^2 = ax + b$으로 보아 隅, 즉 2차항이 나머지의 합이 된다는 것으로 표현한 것이고, a가 바로 長闊較, 즉 較이면서 동시에 減從의 1차항의 계수의 절대값인데 문자를 사용하지 못하므로 이와 같이 표현할 수밖에 없었다.

그림 (C)의 경우, 즉 和從을 보자. 오른쪽 그림에서

$(y+\beta)\alpha = b + (\alpha - y)\beta$를 얻고,

$x+y=a$, $x=\alpha+\beta$에서 $y+\beta = a-\alpha$, $\alpha - y = \beta + (2\alpha - a)$를 얻어 위에 대입하면

$$-[\beta+(2a-\alpha)]\beta+(a-\alpha)\alpha=b$$

를 얻어 b를 이항하면 次商을 위한 방정식을 얻는다.

이 때 $(a-\alpha)\alpha=(y+\beta)\alpha$이므로, 이는 b보다 그림의 오른쪽에 들어 있는 사각형의 넓이만큼 크다. 따라서 次商을 위한 방정식의 상수항 $(a-\alpha)\alpha-b$는 양수이고, 원래 방정식의 상수항 $-b$는 음수이므로 飜減이 일어나 飜積이 되는 것을 보였다.

이 경우에도 $y<\alpha$라는 가정에서 그려진 것이다. 이 때 y는 和從의 두 개의 양의 實根중에 작은 쪽이다. 위에서와 같이 α를 y보다 작게 잡아서 그림 (C)와 같이 그리면 飜積이 되지 않는 것을 쉽게 알 수 있다. 따라서 算學正義에서 飜積을 "和從之變例"라 하고, 翼算에서 "和在廉 而較<卽實也>小於初商 則爲飜積"이라고 하였는데, "和在廉"은 和從을 $ax=x^2+b$로 보아 廉, 즉 1차항이 나머지의 합으로 되어 있는 것을 표현한 것이고, 그 다음 문장은 약간의 문제가 있다. 왜냐하면 初商이 y보다 커야 하는데 이를 표현하지 못하였다. 두 경우 모두 그림에서 初商을 구하는 商보다 작게 택한 경우만 나타내었다. 增乘開方法을 사용하는데 初商은 구하는 商보다 크게 택하여도 무방하고, 이 경우 次商이 음수로 되는 것을 翼算에서 설명하고 있다.

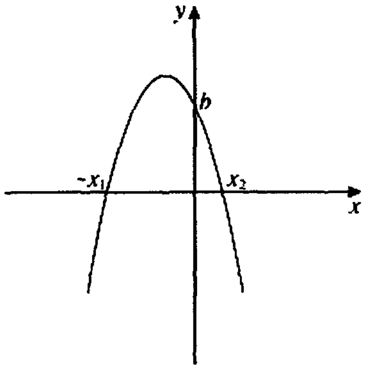
현재 우리가 갖고 있는 2차함수의 그래프를 이용하여 이들을 설명하면 다음과 같다.

각 경우 x-절편의 절대값은 직사각형의 두 변의 길이이고, 방정식 $p(x)=0$에서, $p(a)=-b$이고, 初商 α일 때 次商을 위한 방정식의 상수항은 $p(\alpha)$이다.

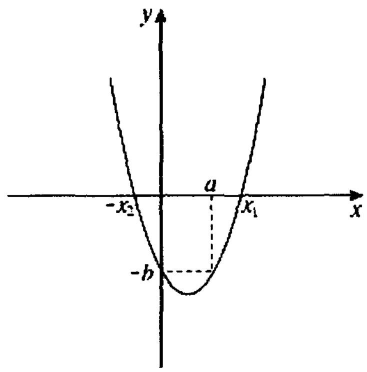
(A) 較從의 경우는 $\alpha>x_2$이면, 飜積이다.

(B) 減從의 경우
(i) $0<\alpha<a$이면, 益積이다.
(ii) $x_1<\alpha$이면, 飜積이다.

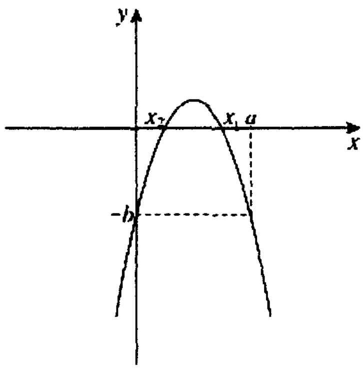
(C) 和從의 경우
(i) $x_2<\alpha<x_1$이면, 飜積이 된다.
(ii) $a<\alpha$이면, 益積이 된다.



(A) 較從



(B) 減從



(C) 和從

물론 위와 같이 2차방정식과 2차 함수의 그래프의 관계를 알고 있으면 바로 飜積, 益積이 일어나는 조건을 구할 수 있지만 19세기 조선 수학자들에게는 이와 같은 도구가 없었는데도 九章算術로부터 내려온 기하적 도구를 사용하여 조건을 구할 수 있었다.

3. 결론

正負術, 즉 음수의 도입과 그 연산에 관한 것이 九章算術에 도입되는 과정에서 연산에 대한 언급이 없이 "同名相除 異名相益 正無負之 負無正之", "異名相除 同名相益 正無正之 負無負之"로 뺄셈과 덧셈에 나타나는 부호의 변화를 나타내었다. 물론 陽數

와 陰數를 붉은 산대, 검은 산대로 구별하여 계산하는 것을 생각하면 위의 명제로 충분하였을 수도 있지만 연산과 정부술을 정확하게 나타내지 못한 것은 틀림없다. 九章算術은 동양 수학에서 고전이 되어 산학자들이 이에서 벗어나지 못하였다. 따라서 增乘開方法과 같이 부호가 계속하여 변하는 과정을 제대로 나타내지 못하게 되었다.

두 陽數 a, b에 대하여 $a+b$, $a+(-b)$, $(-a)+b$, $(-a)+(-b)$의 경우에 이를 $a+b$, $a-b$, $b-a$, $-(a+b)$ 등과 같이 연산으로 대치하지 못하고 이들을 九章算術의 정부술만 생각하여 飜積과 益積이라는 개념이 도입되었다.

중국 수학에서는 비교적 방정식의 풀이 과정을 무시하여 이 두 개념이 가볍게 취급되었는데 조선 산학에서는 飜積과 益積을 매우 비중 있게 다루었다. 19세기에 서양 수학과 宋, 元代의 수학이 재수입되면서 조선 산학은 그 이전의 수학에서 비약적 발전을 하게된다. 정의에서 시작하고, 명제의 증명에 관심을 가지게 된다. 이 과정에 가장 큰 기여를 한 수학자가 李尙爀과 南秉吉이다. 그들은 增乘開方法을 기하적으로 증명하고 이에서 2차방정식에서 飜積과 益積이 일어나기 위한 충분조건을 구하였다. 함수나 함수의 그래프에 대한 개념이 없었지만 그들은 직사각형의 면적을 이용하여 이와 같은 조건을 구하였는데 이는 동양 수학에서 매우 드문 일이다. 왜냐하면 동양 산학에서 주로 취급하는 수학은 algorithm 위주이며 또 이에 대한 설명은 하지 않고 algorithm이 일반적이고 항상 성립하는 것으로 만족하였는데, 위의 두 조선 산학자는 조건을 구하고, 또 이를 증명하였기 때문이다. 그들이 이루어 놓은 결과는 현재 전혀 사용할 필요는 없지만 그들의 수학적 사고방식은 매우 중요한 역사적 사실이다.

참고 문헌

1. C. Cullen, The Suan shu shu 筭數書 "Writings on reckoning", Needham Research Institute Working Papers : 1, Needham Research Institute, Cambridge, 2004
2. Y. Li and S. Du, *Chinese Mathematics, A concise history*, tr. J. N. Crossely and A. W.-C. Lun, Clarendon Press, 1987
3. U. Libbrecht, *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*, The MIT Press, 1973
4. J-C. Martzloff, *A History of Chinese Mathematics*, Springer-Verlag, 1997
5. K. Shen, J. N. Crossley and A. W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Oxford Univ. Press, 1999
6. 孔國平, 李冶 朱世傑與金元數學, 河北科學技術出版社, 1999

7. 吳文俊 主編, 中國數學史大系, 第一卷 - 第八卷, 北京師範大學出版社, 1998
8. 劉鈍, 大哉言數, 遼寧教育出版社, 1993
9. 李相赫, 翼算, 홍성사 역, 한국수학사학회, preprint
10. 李儼, 中算史論叢 (一) 1933, (二) 1939, (三) 1939, (四 上 下) 1947 中華學藝社出版, 商務印書館發行
11. 李迪, 中國數學通史, 宋元卷, 江蘇教育出版社, 1999
12. 李迪, 中國數學史簡編, 遼寧人民出版社, 1984
13. 錢寶琮 主編, 中國數學史, 科學出版社, 1964
14. 中國科學技術典籍通彙 數學卷 全五卷, 河南教育出版社, 1993
15. 中國歷代算學集大成, 上, 中, 下, 山東人民出版社, 1994
16. 韓國科學技術史資料大系, 數學編, 1卷 - 10卷, 驪江出版社, 1985
17. 홍성사, 홍영희, 朝鮮 算學者 李尙赫의 方程式論, 한국수학사학회지 17(2004), No. 1, 1-14
18. 홍영희, 다항식의 대수적 표현, 한국수학사학회지 16 (2003), No. 4, 15-32
19. 홍영희, 조선시대의 방정식론, 한국수학사학회지 17(2004), No. 4, 1-16
20. 홍영희, 不定方程式의 歷史, 한국수학사학회지 18(2005), No. 3, 게재 예정

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 18 No. 3 (Aug. 2005), 39-54

History of Fan Ji and Yi Ji

Department of Mathematics, Sogang University **Hong Sung Sa**
Department of Mathematics, Sookmyung Women's University **Hong Young Hee**
Dankook University **Chang Hyewon**

In Chinese Mathematics, Jia Xian(賈憲) introduced Zeng cheng kai fang fa(增乘開方法) to get approximations of solutions of polynomial equations which is a generalization of square roots and cube roots in Jiu zhang suan shu. The synthetic divisions in Zeng cheng kai fang fa give rise to two concepts of Fan ji(飜積) and Yi ji(益積) which were extensively used in Chosun Dynasty Mathematics. We first study their history in China and Chosun Dynasty and then investigate the historical fact that Chosun mathematicians Nam Byung Gil(南秉吉) and Lee Sang Hyuk(李尙爀) obtained the sufficient conditions for Fan ji and Yi ji for quadratic equations and proved them in the middle of 19th century.

Key words : Polynomial equations, Zeng cheng kai fang fa, Fan ji, Yi ji, *Gu Il Jip*(九一集), *San Hak Jung Eui*(算學正義), *Ik San*(翼算), Nam Byung Gil, Lee Sang Hyuk

2000 Mathematics Subject Classification : 01A13, 01A25, 01A55, 12-03

논문 접수 : 2005년 6월 12일, 심사 완료 : 2005년 7월