

# 수압파쇄균열의 점근적 해석과 경계병치법의 적용성

## Asymptotic Analysis for Hydraulic Fractures and Applicability of Boundary Collocation Method

심 영 중<sup>1</sup> Sim, Young-Jong

김 홍 택<sup>2</sup> Kim, Hong-Taek

### Abstract

The occurrence of multi-segmented hydraulic fractures that show different behavior from the single fracture is common phenomenon. However, it is not easy to evaluate the behavior of multiple fractures computed by most numerical techniques because of complicated process computation. This study presents how to efficiently calculate the displacement of the multi-segmented hydraulic fractures using the boundary collocation method (BCM). First of all, asymptotic solutions are obtained for the closely spaced overlapping fractures and are compared with those by the BCM where the number of collocation points is varied. As a result, the BCM provides an excellent agreement with the asymptotic solutions even when the number of collocation points is reduced ten times as many as that of conventional implementations. Accordingly, the numerical simulation of more realistic and, hence, more complex fracture geometries by the BCM would be valid with such a significant reduction of the number of collocation points.

### 요 지

수압파쇄시 다중으로 분할된 균열의 생성은 자주 발생하는 현상이며 이러한 균열군은 단균열과는 달리 상당히 다른 거동을 나타낸다. 그러나 대부분의 수치기법으로는 이러한 균열군 거동의 묘사는 계산량의 증가로 결코 쉽지 않다. 따라서 본 논문에서는 수압파쇄시 생성되는 다수의 균열 변위를 경계병치법을 사용하여 효과적으로 계산하기 위한 방법을 제시하였다. 우선 평행하면서 아주 가깝게 위치한 다중 분할 균열의 점근적 해를 구하고 경계병치법의 균열에 사용된 병치점의 수를 변화시켜 점근적 해와 비교하였다. 그 결과 기존의 기준에 비해 병치점의 수를 10배 정도 줄이더라도 얻어지는 결과에는 별 차이가 없음을 밝혀냈다. 따라서 이보다 더욱 복잡한 균열이 존재하는 실제의 경우 병치점의 수를 줄여 적용하여도 경계병치법에 의한 계산은 유효하다는 결론을 얻었다.

**Keywords :** Asymptotic solution, Boundary collocation method, Closely spaced overlapping fractures

### 1. 서 론

복수균열(multiple fractures)의 거동은 단균열(single fracture)과는 달리 균열간의 기계적 상호작용으로 인해 그 거동이 상당히 상이하다. 이러한 상호작용은 재료의

성질에 있어서 응력과 변형을 단일균열과는 다르게 발생시키기 때문에 고체역학과 관련된 여러 연구분야에서 중요한 문제로 대두되어 왔다.

특히 균열폭, 즉, 균열의 변위는 유체를 보어홀(borehole) 내에 주입하여 파쇄를 일으켜 지반의 투수성

1 정회원, 한국과학기술원 스마트 사회기반시설 연구센터 연수연구원 (Member, Post-Doctoral Researcher, Smart Infra-Structure Technology Center, KAIST, yjsim@kaist.ac.kr)  
2 정회원, 홍익대학교 토목공학과 교수 (Member, Prof., Dept. of Civil Engrg., Hongik Univ.)

을 증가시키는 수압파쇄(hydraulic fracturing)분야에서 주요 설계변수 중의 하나로 중요한 관심사(예: Jeffrey 등, 1987; Vandamme 등, 1988; Naceur와 Roegiers, 1990, Germanovich 등, 1998)이지만 복수균열에 대한 정확한 이론식을 구할 수 없기 때문에, 제한적이지만 수치해석 기법을 사용한 다양한 연구가 시도되었다(Isida, 1970; Erdogan과 Gupta, 1972; Savruk과 Datsyshin, 1973; Panasyuk 등, 1977; Horii와 Nemat-Nasser, 1985). 또한 다중으로 분할된 균열의 개수와 변위는 측정되는 내부 압력 과도 밀접한 관계에 있기 때문에 현장 압반 응력 측정시 세심한 주의가 필요한 부분이다.

이와 같이 다양한 수치해석기법이 균열 거동을 해석하기 위해 사용되지만 다중으로 분할된 균열에 대한 해석은 극히 제한적이다. 그 이유는 유한요소법이나 경계병치법의 경우 각각 요소수나 병치점의 수가 급격히 늘어나 수치해석용량이 늘어나기 때문이다. 실제의 경우에 균열의 수가 수십 개를 넘는 경우도 발견되고 있어 기존의 방법론 이러한 다수의 균열에 대한 개별적인 변위를 동시에 계산하는 것은 용이치 않다. 더욱이 이러한 균열들의 간격이 아주 작다면 수치해석을 사용한 문제의 해석은 거의 불가능하게 된다.

따라서 본 논문에서 경계병치법의 적용성을 검토하여 균열의 변위를 효과적으로 계산하기 위한 방법을 제시하였다. 일반적으로 균열에 사용된 병치점의 간격은 균열간의 간격보다 작아야 한다고 알려져 있을 뿐 특별히 제시된 기준은 없다. 만약 병치점의 수를 효율적으로 줄여 사용한 경계병치법의 계산이 유효함을 증명한다면 실제 다수의 균열 개수를 고려한 해석을 할 수 있게 된다. 이를 위해 평행하면서 크기가 같은 다수의 균열 문제를 도입하였다. 이러한 균열 형상에서 균열간의 간격이 충분히 작다면 균열의 변위는 점근적인 해를 이용하여 풀 수 있으며 병치점의 수를 줄여 사용한 경계병치법과의 비교도 가능하게 된다.

## 2. 다중으로 분할된 균열의 점근적 해

이 장에서는 경계병치법과의 비교를 위해서 평행하면서 서로 가깝게 위치한 수압파쇄균열의 점근적 해를 구하였다. 이러한 형태의 균열의 변위를 계산할 수 있는 이론식은 존재하지 않으며 수치해석기법으로도 쉽지 않다. 그러나 균열간의 간격이 아주 작고 단균열과 같은 거동을 보인다면 균열의 변위를 점근적 해를 이용하여

계산할 수 있게 되어 경계병치법과의 비교가 가능해진다.

그림 1(a)는 총 N개의 균열이 일정한 간격으로 평행하면서 가깝게 위치한 경우의 기하를 나타낸다. 각 균열의 크기는  $2c$ 이며 서로 중복이 되어 겹치는 부분은  $2a$ 이다. 우선 균열간의 간격  $S$ 가 점근적으로 아주 작게 되면 균열이 중복이 되어 겹치는 부분에 존재하는 균열 사이의 얇은 보의 저항은 아주 작거나 무시할 수 있기 때문에 수압에 의한 균열의 변위 형상은 그림 1(b)와 같은 형상을 가지게 된다. 따라서 이 부분의 균열의 변위는 보의 처짐으로부터 간단히 구할 수 있다(부록 A.1 참조). 또한 중복이 되어 겹치는 부분을 제외한 균열군의 변위는 그림 1(c)와 같이 총 N개 균열의 전체 길이( $x_N$ )와 동일한 유효균열의 전체 변위 형상과 동일하여 이 부분의 균열군의 변위를 쉽게 구할 수 있게 된다.

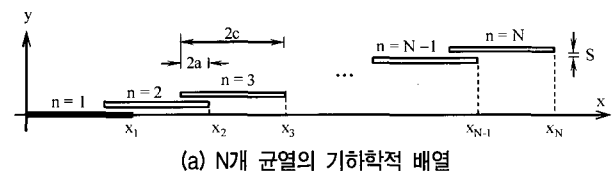
최종적으로 각 수압파쇄균열의 수직변위(그림 1(b))는 다음과 같이 계산될 수 있다.

첫 번째 균열( $n=1$ ) :

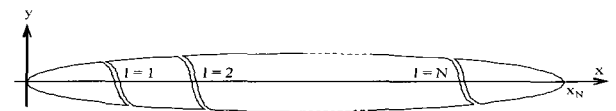
$$\begin{cases} v_1^+(x) = v^+(x) = v(x) & (0 < x < x_1 - 2a) \\ v_1^+(x) = w_1(x) & (x_1 - 2a < x < x_1) \\ v_1^-(x) = v^-(x) = -v(x) & (0 < x < x_1) \end{cases} \quad (1)$$

두 번째 균열( $n=2$ ) :

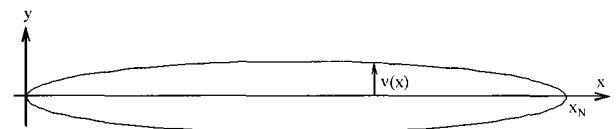
$$\begin{cases} v_2^+(x) = v^+(x) = v(x) & (x_1 - 2a < x < x_2 - 2a) \\ v_2^+(x) = w_2(x) & (x_2 - 2a < x < x_2) \\ v_2^-(x) = w_1(x) & (x_1 - 2a < x < x_1) \\ v_2^-(x) = v^-(x) = -v(x) & (x_1 < x < x_2) \end{cases} \quad (2)$$



(a) N개 균열의 기하학적 배열



(b) 다중분할 균열의 변위 형상



(c) 크기가  $x_N$ 인 유효균열의 변위

그림 1. 아주 가깝게 위치한 평행한 다중분할 수압파쇄균열

n번째 균열 ( $n \neq 1, n \neq N$ ) :

$$\begin{cases} v_n^+(x) = v^+(x) = v(x) & (x_{n-1} - 2a < x < x_n - 2a) \\ v_n^+(x) = w_n(x) & (x_n - 2a < x < x_n) \\ v_n^-(x) = w_{n-1}(x) & (x_{n-1} - 2a < x < x_{n-1}) \\ v_n^-(x) = v^-(x) = -v(x) & (x_{n-1} < x < x_n) \end{cases} \quad (3)$$

마지막 균열 ( $n=N$ ) :

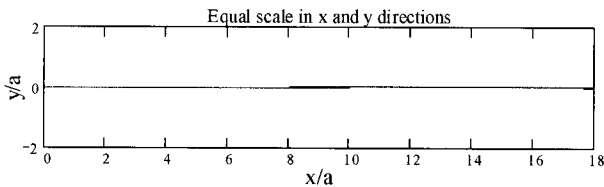
$$\begin{cases} v_N^+(x) = v^+(x) = v(x) & (x_{N-1} - 2a < x < x_N) \\ v_N^+(x) = w_{N-1}(x) & (x_{N-1} - 2a < x < x_{N-1}) \\ v_N^-(x) = v^-(x) = -v(x) & (x_{N-1} < x < x_N) \end{cases} \quad (4)$$

위의 식에서,  $w$ 는 균열사이 경계면에서의 균열의 변위를 나타내며, 보의 처짐 이론으로부터 계산된 값(식 (A.17))이다.  $v$ 는 중복이 되지 않는 부분에서의 균열의 변위로 유효균열의 변위(식 (A.7))로부터 계산된 값이다. 또한  $w$ 와  $v$ 의 첨자 “+”와 “-”는 각각 균열의 상단과 하단의 변위를 나타낸다. 제시된 균열의 변위는 균열간의 간격이 작아질수록( $s/a \rightarrow 0$ ) 정확한 균열의 변위를 계산하며 경계병치법에 의해 얻어진 결과와 비교가 가능하다(부록 A.2 참조).

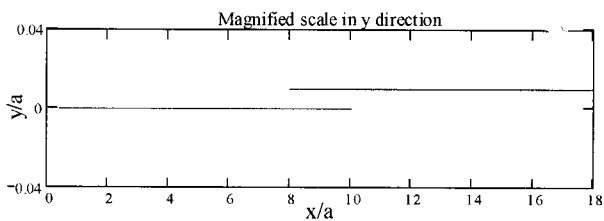
### 3. 비교 및 경계병치법의 적용성

#### 3.1 두 균열의 경우( $N=2$ )

우선 아주 가깝게 위치한 두 균열의 변위를 점근적 해와 경계병치법의 결과를 서로 비교하였다. 기하조건은  $S/2a=0.005$ (즉, 간격이 균열간 중복되어 겹친 부분의



(a) 등축척에서의 평면도

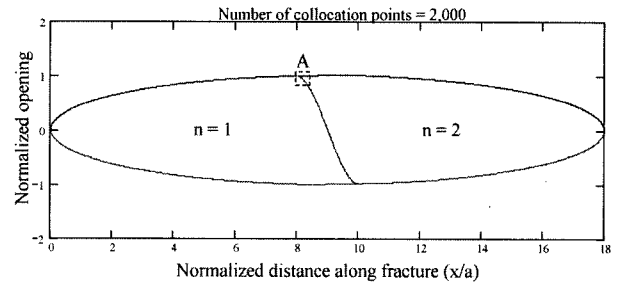


(b) y축으로 확대된 평면도

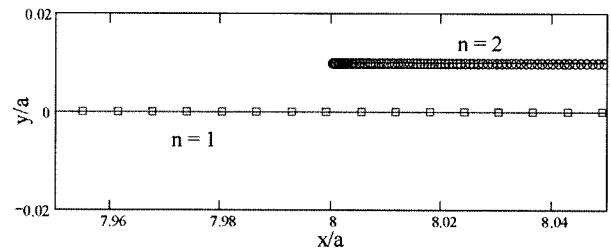
그림 2. 두 균열의 평면도

0.5%)와  $a/c=0.2$ 이다. 그림 2(a)는 등축척에서의 두 균열의 평면도이며 서로 가깝게 위치해 있어 두 균열은 하나의 균열처럼 나타나 있다. 그러나 y축으로 확대된 축척(그림 2(b))에서는 두 균열이 뚜렷하게 구분된다.

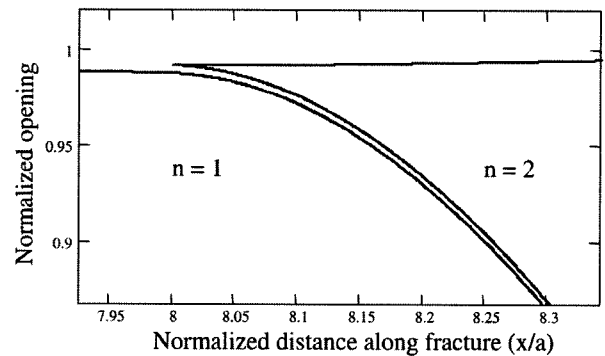
그림 3(a)는 경계병치법을 사용하였을 경우의 변위 형상을 보여주고 있다. 각 균열의 병치점의 간격을 두



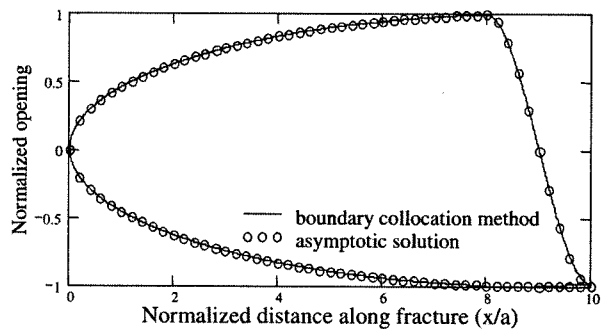
(a) 두 균열의 변형



(b) 병치점의 간격



(c) 균열간 중첩부분에서의 변위



(d) 점근적 해와의 변위 비교

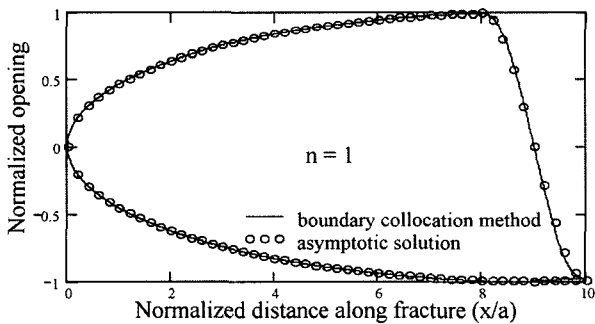
그림 3. 2,000개의 병치점을 사용한 경우

균열의 간격보다 작게 하기 위하여 각 균열에 총 2,000개의 병치점을 사용하였다(그림 3(b)). 그림 3(a)의 점선 부분(A)을 확대하면 그림 3(c)와 같이 두 균열사이에 존재하는 보가 마치 캔틸레바 보처럼 처짐이 발생한 것처럼 변형되어 있는 모습을 볼 수 있다. 그림 3(d)는 첫째 균열( $n=1$ )의 변위를 점근법에 의한, 즉, 식 (1)과 비교한 결과를 나타내는데 예상한 바와 같이 잘 일치함을 알 수 있다. 여기서 균열의 상단과 하단 변위는 각각 식 (5)의 유효균열 중앙( $x=c_N$ )에서의 변위에 대한 상대값으로 무차원화한 값이다.

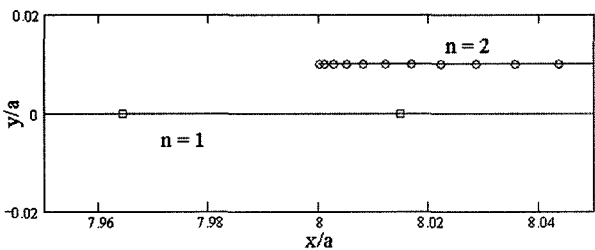
$$v_0 = v^+(c_N) = v(c_N) = 2c_N \frac{1-\nu^2}{E} p \quad (5)$$

여기서,  $E$ 와  $\nu$ 는 각각 암반의 탄성계수와 포아송비이며,  $p$ 는 균열내부에 작용하는 순압력(원응력과 균열내부에 작용하는 수압의 차이)이다.

그림 4(a)는 기존의 기준에서 10배 정도 줄여 250개의 병치점을 경계병치법에 사용하였을 경우의 결과를 보여주고 있다. 그림 4(b)에 나타난 것처럼 병치점의 수를 줄여 병치점의 간격이 두 균열간의 간격보다 상당히 큼에도 불구하고 점근적 해와 좋은 일치치를 보이고 있다. 참고적으로 두 균열간의 간격이  $S/2a=0.005$ (즉, 간격이 단지 중복된 길이의 0.5%)인 경우 수치해석적으로 용이하지 않은 경우임에도 경계병치법의 경우 좋은 결과를



(a) 점근적 해와의 변위 비교



(b) 병치점의 간격

그림 4. 250개의 병치점을 사용한 경우

나타내고 있음을 보여주고 있다.

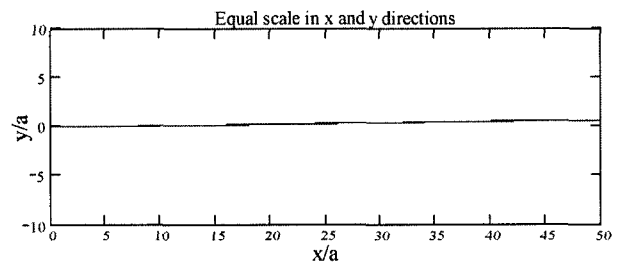
### 3.2 여섯 균열의 경우( $N=6$ )

두번째 예로써, 여섯개의 균열이 서로 일정한 간격으로 있을 경우 점근적 해와 경계병치법을 서로 비교하였다. 이전 예제와 같은 기하조건( $S/2a=0.005$  and  $a/c=0.2$ )을 적용하였으며 그림 5는 이러한 균열들의 평면도를 보여주고 있다.

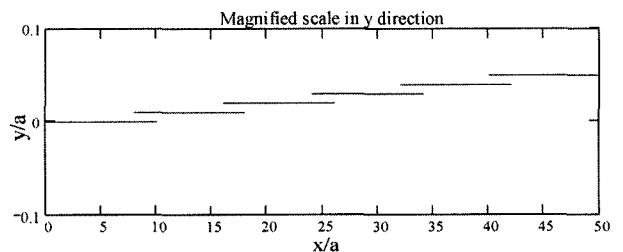
그림 6은 2,000개의 병치점을 각 균열에 사용했을 경우 여섯 균열의 변형된 모습을 나타내며 전 예제와 비슷하게 보가 처진 형태로 변형이 되었음을 예측할 수 있다.

그림 7은 각 균열에 2,000개의 병치점을 사용하였을 경우의 첫 번째( $n=1$ ), 두 번째( $n=2$ ), 그리고 세 번째( $n=3$ ) 균열이 변형된 모습을 점근적 해와 비교한 모습을 나타낸다. 그 결과, 경계병치법에 의한 균열의 변위는 예상한 바와 같이 점근적 해와 잘 일치함을 나타내고 있다.

그림 8은 병치점의 수를 250개로 줄여 계산하였을 경우 점근적인 해와의 비교를 나타내고 있는데 역시 좋은



(a) 등축척에서의 평면도



(b) y축으로 확대된 평면도

그림 5. 여섯 균열의 평면도

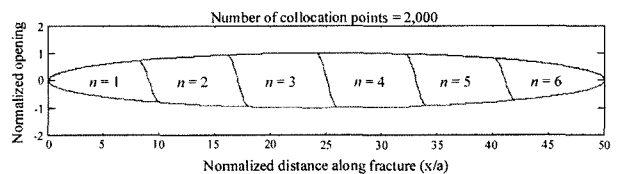
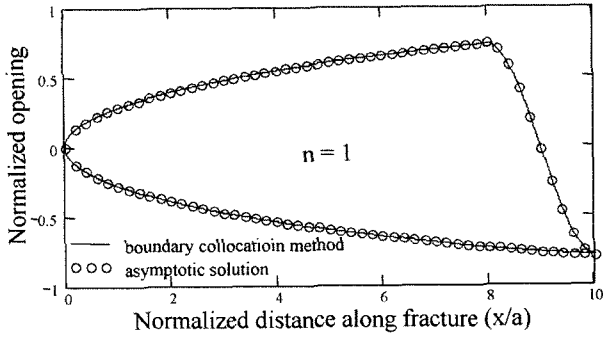
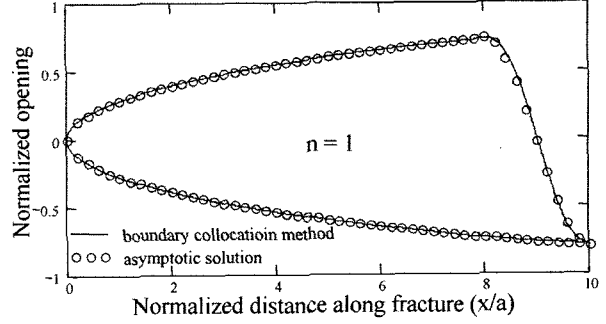


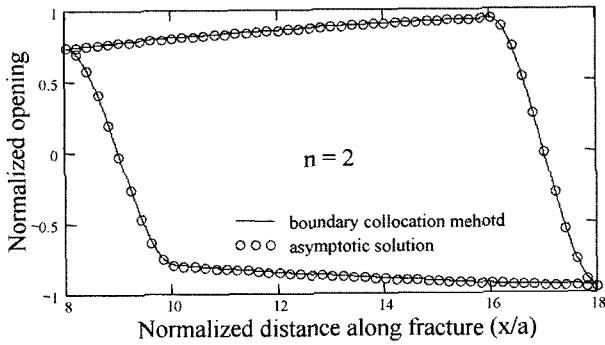
그림 6. 2,000개의 병치점을 사용한 경우 여섯 균열의 변형



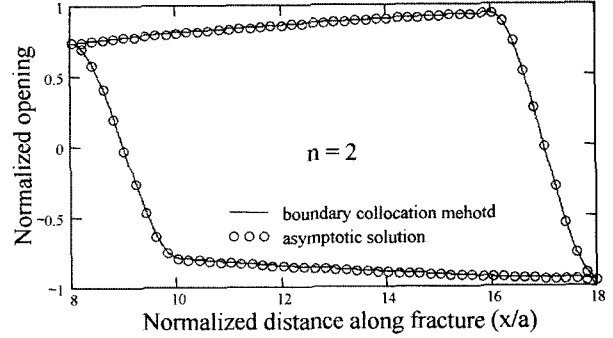
(a) 첫번째 균열



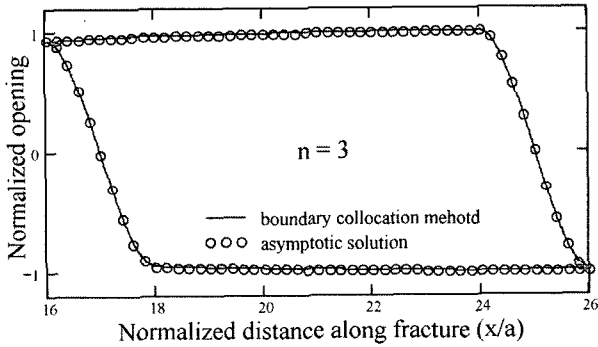
(a) 첫번째 균열



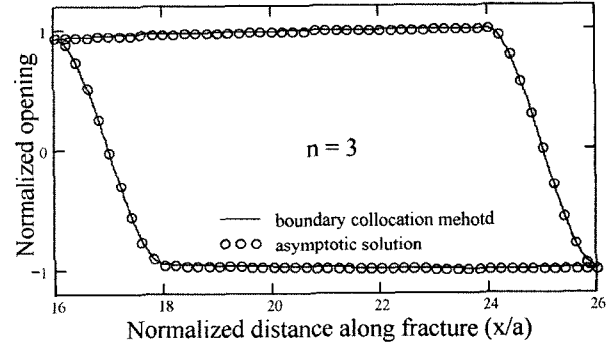
(b) 두번째 균열



(b) 두번째 균열



(c) 세번째 균열



(c) 세번째 균열

그림 7. 2,000개의 병치점을 사용한 경우의 경계병치법과 점근적 해의 균열변위 비교

그림 8. 250개의 병치점을 사용한 경우의 경계병치법과 점근적 해의 균열변위 비교

일치를 보여주고 있다. 이전 예제인 두 균열의 경우와 달리 이 경우에 상당히 해석이 용이하지가 않다. 원래의 기준대로 2,000개의 병치점을 한 개의 균열에 사용해야 한다고 가정하면, 총 12,000개(2,000×6)의 병치점을 사용해야 하기 때문이다. 이로 인해 풀어야 할 방정식의 수도 커지기 때문에 이러한 수치계산은 상당히 비효율적이다. 실제로 이렇게 가까이 위치한 균열의 수가 수십개가 넘는 경우도 있어 이러한 균열의 해석은 이전의 기준을 적용한다면 거의 불가능해지게 된다. 그러나 병치점의 수를 상당히 줄이더라도 점근적 해와 좋은 일치를 보임이 증명됨으로써 다수 균열의 해석에도 경계법

이 방법이 상당히 효율적으로 사용될 수 있음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 다중으로 분할된 많은 수의 균열의 변위를 동시에 계산할 수 있도록 경계병치법의 적용성에 대하여 검토하였다. 이를 위해 서로 평행하면서 가깝게 위치한 균열의 점근적 해를 우선 구하고 경계병치법에 사용될 균열의 병치점 수를 변화시켜 점근적 해에 의한 결과와 비교하였다. 그 결과 병치점의 수를 기존의 기준(병치점의 간격이 균열간의 간격보다 작아야 함)으

로부터 10배까지 줄이더라도 얻어지는 결과에는 별 차이가 없음을 밝혀냈다. 따라서 이보다 더욱 복잡한 균열이 존재하는 경우 다른 수치해석기법은 물론 기존의 병치점 배열 기준을 적용하였을 경우에 수치해석 용량의 문제로 경계병치법의 사용 역시 거의 불가능하였지만 병치점의 수를 효율적으로 줄여 적용하여도 경계병치법에 의한 계산은 유효하다는 결론을 얻었다.

## 부 록

### A.1 보의 처짐

그림 1(a)에서 균열간의 간격  $S$ 가 점진적으로 아주 작게 되면 다음과 같은 조건을 만족하게 된다.

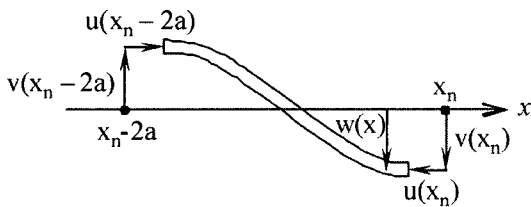
$$(N-1)S \ll 2c \quad (A.1)$$

각 균열의 우측단의 위치를 수식으로 나타내면

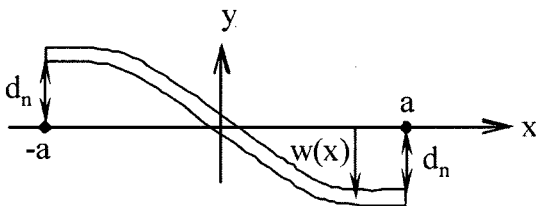
$$x_n = 2nc - 2(n-1)a, \quad (1 \leq n \leq N) \quad (A.2)$$

이 경우  $N$ 개의 균열과  $(N-1)$ 개의 얇은 보가 존재한다(그림 1(a)). 균열 사이에 존재하는 얇은 보의 변형은 보의 처짐 이론으로부터 계산할 수 있다. 우선 그림 A.1(a)와 같이 보의 양단에서 발생하는 변위를 그림 A.1(b)와 같이 국부좌표계의 상하대칭구조로 전환하여 나타내면 다음과 같다.

$$d_n = \frac{v(x_n) + v(x_n - 2a)}{2} \quad (A.3)$$



(a) 보의 초기변형



(b) 상하 대칭구조로 전환된 보의 초기변형

그림 A.1. 보의 휨 변형

$$\Delta a_n = -\frac{u(x_n) - u(x_n - 2a)}{2} \quad (A.4)$$

여기서,  $u(x)$ 와  $v(x)$ 는 각각 수평변위와 수직변위에 해당하며 유효균열(그림 1(c))의 변위에 해당한다.

한편 전체균열의 크기(그림 1(b))를  $2c_N$ 이라 하면

$$2c_N = x_N \quad (A.5)$$

식 (A.2)와 식 (A.5)로부터  $c_N$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c_N = \frac{x_N}{2} = Nc - (N-1)a \quad (A.6)$$

그리고 균열의 수직 및 수평변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v^\pm(x) = \pm v(x) = \pm 2c_N \frac{1-\nu^2}{E} p \sqrt{1 - \frac{(x-c_N)^2}{c_N^2}} \quad (A.7)$$

$$u^\pm(x) = u(x) = -\frac{\Delta c_N}{c_N} (x - c_N) = \Delta c_N \left(1 - \frac{x}{c_N}\right) \quad (A.8)$$

여기서  $\Delta c_N$ 은 다음과 같이 계산이 가능하다(Tada 등, 1985).

$$\Delta c_N = \frac{c_N(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p \quad (A.9)$$

식 (A.8)을 식 (A.4)에 대입하면, 각 보 양단 수평변위가 다음과 같이 얻어진다.

$$\Delta a_n = \frac{\Delta c_N}{c_N} a \quad (A.10)$$

따라서,  $n$ 번째 보의 수평방향 변형률은 다음과 같이 정리되며

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta a_n}{a} = \frac{\Delta c_N}{c_N} \quad (A.11)$$

이는 모든 보의 경우에 같은 값을 갖는다(그림 A.2). 식 (A.9)를 식 (A.11)에 대입하여 풀면 다음과 같다.

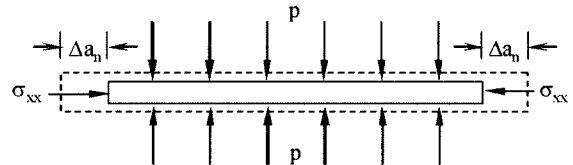


그림 A.2. 주변 응력에 따른 보의 수축(점선은 보의 변형전의 상태이다.)

$$\epsilon_{xx} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p \quad (\text{A.12})$$

따라서 식 (12)와 평면변형을 관계로부터 n번째 보에  
서의 응력은 다음과 같이 정리된다.

$$\sigma_{xx} = p, \quad \sigma_{yy} = p, \quad \sigma_{zz} = 2\nu p \quad (\text{A.13})$$

$\sigma_{xx}$ 는 순압력  $\sigma_{yy}=p$ 와 크기가 같으므로 길이방향의  
수평변위는 휨에 의한 수직방향의 변위에 영향을 끼치  
지 않는다. 따라서, 경계병치법을 사용하여 수직변위 부  
분만을 고려하는 것으로도 충분하다.

보의 수직변위  $w_n$ 을 고려하기 위해서 횡변위  $\Delta_{a_n}$ 을  
그림 A.3에 나타낸 바와 같이 무시하고 보의 처짐관련  
미분방정식을 사용하면(Gere와 Timoshenko, 1991) 다  
음과 같고,

$$\frac{d^4 w_n}{dx^4} = 0, \quad (-a \leq x \leq a) \quad (\text{A.14})$$

경계조건은 다음과 같다.

$$w_n = \mp d_n \quad (x = \pm a) \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{dw_n}{dx} = 0 \quad (x = \pm a) \quad (\text{A.16})$$

식 (A.14)의 해는 전체좌표계로 전환하여 구하면 다  
음과 같이 최종식을 얻을 수 있다.

$$w_n(x) = \frac{v(x_n) + v(x_n - 2a)}{4} \left[ \frac{(x - x_n + a)^3}{a^3} - \frac{3(x - x_n + a)}{a} \right] - \frac{v(x_n) - v(x_n - 2a)}{2}, \quad (N = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{A.17})$$

## A.2 점근적 해의 유효성

비록 보의 두께가 얇아 전단저항을 기대할 수는 없지

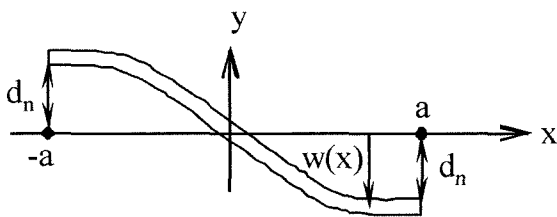


그림 A.3. 수평수축이 없는 보의 수직처짐

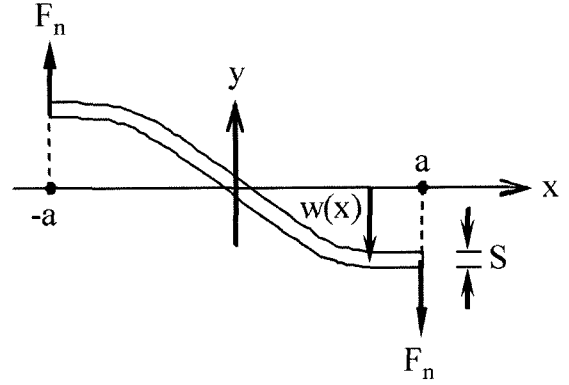


그림 A.4. 보의 양단에서의 전단력

만 그렇지 않을 경우 점근적 해가 유효할 수 있는 최소  
한의 조건이 필요하다. 그림 A.4에 나타난 바와 같이 각  
보의 양단에 균열이 순압력에 의해 변형되는 것을 방해  
하는 보의 전단저항이 있을 수 있다. 이러한 n번째 보의  
단위너비당 전단력( $F_n$ )은 다음과 같은 식으로부터 구할  
수 있다(Gere와 Timoshenko, 1991).

$$F_n = \frac{12ES^3}{1-\nu^2} \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (\text{A.18})$$

여기서 S와 w는 그림 A.4에 나타나 있다.

식 (A.17)을 이용하여 미분식을 표현하면 다음과 같고

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{3d_n}{a^3} \quad (\text{A.19})$$

식 (A.3)을 식 (A.19)에 대입하고 그 결과를 식 (A.18)  
에 대입하여 정리하면 전단력은 다음과 같이 정리된다.

$$F_n = \frac{18[v(x_n) + v(x_n - 2a)]ES^3}{(1-\nu^2)a^3} \quad (\text{A.20})$$

$v(x_n) \leq v_0$ 이고  $v(x_n - 2a) \leq v_0$ 이므로, 식 (A.20)으로부터  
다음과 같은 관계를 유추할 수 있으며

$$F_n < \frac{36v_0ES^3}{(1-\nu^2)a^3} \quad (\text{A.21})$$

식 (5)를 식 (A.21)에 대입하면 전단력은 다음과 같은  
조건을 얻게 된다.

$$F_n < 72c_N \frac{S^3}{a^3} p \quad (\text{A.22})$$

따라서, 식 (A.22)로부터 전단력의 상한치를 다음과

같이 평가할 수 있다.

$$F_{\text{upper}} = 72c_N \frac{S^3}{a^3} p \quad (\text{A.23})$$

이러한 힘들은 각균열의 끝에서 작용하는 수직력으로 간주될 수 있다(그림 A.5). 이러한 힘들이 유효균열 단면에 그림 A.5와 같이 분배되어 작용한다면 그 압력은 다음과 같이 표시되며

$$P_{\text{upper}} = \frac{F_{\text{upper}}(N-1)}{2c_N} \quad (\text{A.24})$$

식 (A.23)을 식 (A.24)에 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$P_{\text{upper}} = 36(N-1) \frac{S^3}{a^3} p \quad (\text{A.25})$$

만약 다음과 같은 조건이 만족된다면

$$P_{\text{upper}} \ll p \quad (\text{A.26})$$

균열에 작용하는 힘  $F_n$ 의 영향은 무시될 수 있다. 식 (A.25)을 식 (A.26)에 대입하면

$$36(N-1) \frac{S^3}{a^3} \ll 1 \quad (\text{A.27})$$

위 식으로부터 균열의 총 갯수(N)와 관련된 조건이 유추된다.

$$N-1 \ll \frac{1}{288} \frac{(2a)^3}{S^3} \quad (\text{A.28})$$

식 (A.1)로부터

$$N-1 \ll \frac{2c}{S} \quad (\text{A.29})$$

따라서 균열의 총수는 식 (A.28)과 식 (A.29)로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

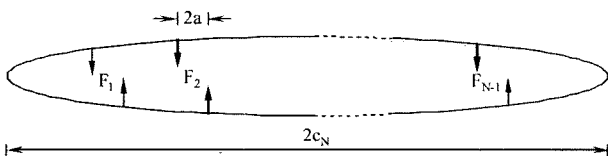


그림 A.5. 보의 양단에 작용하는 전단력으로부터 유효균열면에 작용하는 저항력

$$N-1 \ll \min \left\{ \frac{1}{288} \frac{(2a)^3}{S^3}, \frac{2c}{S} \right\} \quad (\text{A.30})$$

예를 들면,

$$a=1 \text{ m}, \quad S=0.01 \text{ m}, \quad c=5 \text{ m} \quad (\text{A.31})$$

이라면, 식 (A.30)의 조건으로부터

$$N \ll 5,000 \quad (\text{A.32})$$

을 얻을 수 있다. 따라서, 식 (A.32)와 같은 조건이라면 총 균열의 갯수가 5,000보다 훨씬 적을 때, 점근적 해는 유효하다고 볼 수 있다.

## 참고 문헌

1. Erdogan, F. and Gupta, G.D. (1972), "On the Numerical Solution of Singular Integral Equations", *The Quarterly Journal of Pure and Applied mathematics*, 29, pp.525-534.
2. Gere, J.M. and Timoshenko, S.P. (1991), *Mechanics of materials*, Chapman & Hall, London.
3. Germanovich, L. N., Astakhov, D.K., Shlyapobersky, J., Mayerhofer, M.J., Dupont, C., and Ring, L.M. (1998), "Modeling Multisegmented Hydraulic Fracture in Two Extreme Cases : No Leakoff and Dominating Leakoff", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 35(4-5).
4. Horri, H. and Nemat-Nasser, S. (1985), "Elastic Fields of Interacting Inhomogenities", *International Journal of Solids and Structures*, 21(7), pp.731-745.
5. Isida, M. (1970), "Analysis of Stress Intensity Factors for Plate Containing Random Array of Cracks", *Bulletin of the JSME*, 13(59), pp.635-642.
6. Jeffrey, R.G., Vandamme, L., and Roegiers, J.-C. (1987), "Mechanical Interactions in Branched or Subparallel Hydraulic Fractures", *SPE* 16422.
7. Naceur, K.B. and Roegiers, J.-C. (1990), "Design of Fracturing Treatments in Multilayered Formations", *SPE Production Engineering*, pp.21-26.
8. Panasyuk, V.V., Savruk, M.P., and Datsyshyn, A.P. (1977), "A General Method of Solution of Two-Dimensional Problems in the Theory of Cracks", *Engineering Fracture Mechanics*, pp.9481-9497.
9. Savruk, M.P. and Datsyshyn, A.P. (1973), "On the Limiting State of Equilibrium of a Plate Weakened by Two Arbitrarily-Oriented Cracks", *Physico-Mechanical Institute, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, L'vov*. Translated from *Prikladnaya Mechanika*, 9(7), pp.49-56.
10. Tada, H., Paris, P.C., and Irwin, G.R. (1985), *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Paris Productions Incorporated, St. Louis, Mo.
11. Vandamme, L., Jeffrey, R.G., and Curran, J.H. (1988), "Pressure Distribution in Three Dimensional Hydraulic Fractures", *SPE Production Engineering*, pp.181-186.

(접수일자 2005. 5. 2, 심사완료일 2005. 7. 12)