

메쉬 연결망의 강한 해밀톤 laceability

(Strongly Hamiltonian Laceability of Mesh Networks)

박 경 욱 [†] 임 형 석 ^{††}

(Kyoung-Wook Park) (Hyeong-Seok Lim)

요 약 상호 연결망에서 해밀톤 경로는 선형 배열 구현이나 멀티캐스팅과 같은 여러 응용에서 활용된다. 본 논문에서는 여러 병렬 시스템의 상호연결망으로 사용되는 메쉬 연결망의 해밀톤 성질에 대해 고려한다. 연결망이 강한 해밀톤 laceable이면 그 연결망은 임의의 두 노드를 잇는 가능한 가장 긴 길이의 경로를 지닌다. 2차원 메쉬 $M(m, n)$ 은 노드의 수가 짝수이면 $m \geq 4, n \geq 4$ 일 때, 노드의 수가 홀수이면 $m \geq 3, n \geq 3$ 일 때 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다. 메쉬는 토러스, k -ary n -큐브, 하이퍼큐브, 재귀원형군과 같은 여러 상호 연결망들의 스페닝 부 그래프이므로 본 논문의 결과는 이들 연결망들의 고장 해밀톤 성질을 밝히는데 활용될 수 있다.

키워드 : 메쉬, 해밀톤 경로, 강한 해밀톤 laceable 그래프

Abstract In interconnection networks, a Hamiltonian path has been utilized in many applications such as the implementation of linear array and multicasting. In this paper, we consider the Hamiltonian properties of mesh networks which are used as the topology of parallel machines. If a network is strongly Hamiltonian laceable, the network has the longest path joining arbitrary two nodes. We show that a two-dimensional mesh $M(m, n)$ is strongly Hamiltonian laceable, if $m \geq 4, n \geq 4$ ($m \geq 3, n \geq 3$ respectively), and the number of nodes is even(odd respectively). A mesh is a spanning subgraph of many interconnection networks such as tori, hypercubes, k -ary n -cubes, and recursive circulants. Thus, our result can be applied to discover the fault-hamiltonicity of such networks.

Key words : mesh, hamiltonian path, strongly hamiltonian laceable graph

1. 서 론

메쉬(mesh) 연결망은 구조가 간단하여 확장이 쉽고 VLSI 구현에 적합하다는 장점으로 MasPar, Intel Paragon XP/S, Touchstone DELTA System과 같은 여러 상용 병렬 시스템의 상호 연결망(interconnection network)으로 사용되고 있다[1]. 연결망 구조는 일반적으로 그래프로 표현하는데 이때 노드는 그래프의 정점에 대응되고 통신 링크는 에지에 대응된다. 그래프에서 해밀톤 경로나 사이클을 찾는 해밀톤 문제(hamiltonian problem)는 그래프 이론 분야에서 널리 알려진 문제 중 하나다. 그래프의 해밀톤 경로(사이클)는 그 그래프의 모든 정점들을 오직 한번씩만 지나는 경로(사이클)를 말하며 해밀톤 사이클을 지닌 그래프를 해밀톤(hamiltonian) 그래프라 한다. 그리고 모든 두 정점들 사이에

해밀톤 경로가 있는 그래프를 해밀톤 연결된(hamiltonian-connected) 그래프라 한다. 상호 연결망에서 해밀톤 경로는 경로 기반(path-based) 멀티 캐스팅이나 파이프 라인 계산을 위한 선형 배열의 구현과 같은 여러 응용에 쉽게 활용될 수 있으므로 연결망이 해밀톤 성질을 지니는가는 그 연결망을 평가하는 중요한 척도다. 따라서 하이퍼큐브, k -ary n -큐브, 재귀원형군, 스타그래프와 같은 여러 상호 연결망들의 해밀톤 성질들에 대한 연구가 이루어지고 있다[2-6].

그래프 $G=(V, E)$ 에서 $V=V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 인 두 개의 이분 집합 V_1 과 V_2 로 나누어지고 서로 다른 집합에 속한 정점들 사이에만 에지가 존재하면 그 그래프를 이분 그래프(bipartite graph)라 한다. $|V_1| \leq |V_2|$ 이라 할 때 이분 그래프는 V_1 에 속한 두 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재하지 않으므로 해밀톤 연결된 그래프가 되지 못한다[5]. 따라서 [6]에서는 이분 그래프를 위해 해밀톤 laceable 그래프 개념을 소개하였다. 이분 그래프에서 W 와 B 를 각각 이분 정점 집합이라고 할

[†] 정희원 : 전남대학교 전산학과
kwpark@alex.chonnam.ac.kr

^{††} 종신희원 : 전남대학교 전산학과 교수
hslim@chonnam.chonnam.ac.kr

논문접수 : 2005년 2월 18일

심사완료 : 2005년 4월 12일

때, 다음 조건들 중 하나를 만족하면 해밀톤 laceable 그래프라 한다.

- i) $|B|=|W|$ 이고 모든 B 에 속한 정점들과 W 에 속한 정점들 사이에 해밀톤 경로를 지니거나,
- ii) $|B|=|W|+1$ 이고 모든 B 에 속한 정점 쌍을 잇는 해밀톤 경로를 가지거나,
- iii) $|B|=|W|-1$ 이고 모든 W 에 속한 정점 쌍을 잇는 해밀톤 경로를 가진다.

$|B|=|W|$ 인 해밀톤 laceable 그래프가 같은 이분 정점 집합에 있는 모든 두 정점들을 잇는 길이가 $|W|+|B|-2$ 인 경로를 지니면 강한 해밀톤 laceable(strongly hamiltonian-laceable) 그래프라 한다[7]. 그리고 [8]에서는 이분 그래프가 결합 예지나 결합 정점을 지니는 경우를 고려해 강한 해밀톤 laceable 그래프의 개념을 다음과 같이 정의하였다. 이분 정점 집합 B 와 W 에 속한 정점들 중 결합이 없는 정점들의 수를 각각 n_b, n_w 라 하자. $n_w = n_b$ 일 때 서로 다른(같은) 집합에 속한 두 정점을 잇는 길이 $2n_b - 1(2n_b - 2)$ 인 결합 요소(정점 혹은 예지)를 포함하지 않는 경로(fault-free path)를 L^{opt} -경로라 한다. $n_b > n_w$ 일 때, L^{opt} -경로의 길이는 B 에 속한 쌍의 정점들을 잇는 경우 $2n_w$, 서로 다른 집합에 속한 정점들을 잇는 경우 $2n_w - 1$, 그리고 W 에 속한 정점들을 잇는 경우 $2n_w - 2$ 이다. 이와 비슷하게 $n_b < n_w$ 인 이분 그래프의 L^{opt} -경로도 정의할 수 있다. 이러한 L^{opt} -경로는 이분 그래프에서 두 정점을 잇는 가능한 가장 긴 길이의 경로이다. 강한 해밀톤 laceable 그래프는 모든 두 정점을 잇는 L^{opt} -경로를 지니는 이분 그래프이다. 이처럼 이분 그래프가 강한 해밀톤 laceable 그래프이면 임의의 두 정점을 잇는 가능한 가장 긴 길이의 경로를 생성할 수 있어 해밀톤 성질을 이용하는 여러 응용 분야에 활용될 수 있다.

본 논문에서 대상으로 하는 메쉬 연결망의 해밀톤 성질에 대한 기존의 연구들은 [6,9-12]에 기술되어 있다. m 행 n 열로 구성된 메쉬 $M(m, n)$ 은 $m, n \geq 2$ 이고 짝수 개의 정점을 지닐 때 해밀톤 사이클을 지닌다. 또한 짝수(홀수)개의 정점을 지닐 때 분지수가 2인 정점 s 와 s 와 다른(같은) 이분 집합에 속한 정점 t 를 잇는 해밀톤 경로가 존재함이 알려져 있으며[9], $m, n \geq 4$ 이고 짝수 개의 정점을 지니는 경우 해밀톤 laceable 그래프임이 증명되었다[11]. 또한 이러한 조건에서 해밀톤 경로를 생성하는 선형 시간(linear time) 알고리즘이 [9-11]에서 제시되었다. [6]에서 다차원 메쉬가 해밀톤 laceable 그래프임을 보였으며 [13]에서는 다차원 메쉬에서 해밀톤 사이클을 생성하는 알고리즘이 제안되었다.

본 논문에서는 $M(m, n)$ 이 강한 해밀톤 laceable 그래

프임을 보인다. 이를 위해 먼저 $M(m, n)$ 에는 $m \geq 2, n \geq 2$ 일 때 분지수가 2인 정점과 다른 임의의 정점을 잇는 L^{opt} -경로가 존재함을 보인다. 그리고 정점의 수가 짝수이면 $m \geq 4, n \geq 4$ 일 때, 정점의 수가 홀수이면 $m \geq 3, n \geq 3$ 일 때 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다. 메쉬는 토러스, k -ary n -큐브, 하이퍼큐브, 재귀원형군과 같은 여러 상호 연결망들의 스페닝 부 그래프이므로 본 논문의 결과는 이들 연결망들의 고장 해밀톤 성질을 밝히는데 활용될 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 본 논문에서 필요로 하는 정의와 표기법들에 대해 기술하고 3장에서는 2차원 메쉬가 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다. 마지막으로 4장에서 결론을 맺는다.

2. 정의 및 표기법

m 행 n 열로 구성된 $m \times n$ 메쉬는 그래프 $M(m, n) = (V, E)$ 로 정의한다. 여기서 정점들의 집합

$$V = \{v_j^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

이며, 예지들의 집합

$$E = \{(v_j^i, v_{j+1}^i) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n\} \cup \{(v_j^i, v_j^{i+1}) \mid 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n\}$$

이다. 따라서 mn 개의 정점과 $2mn - (m+n)$ 개의 예지로 구성된다. 메쉬는 최소 분지수가 2인 네 개의 정점을 지니고 있다. 이러한 정점들을 꼭지 정점(corner vertex)라 하자. $M(m, n)$ 은 이분 그래프이므로 모든 정점들은 이분 집합 B 와 W 로 나눌 수 있다. 정점 v_j^i 는 $i+j$ 가 짝수이면 검정 정점, 홀수이면 흰색 정점이라 하고, 검정 정점의 집합을 B , 흰색 정점의 집합을 W 라 한다. 행 i 에 속한 정점을 $R(i) = \{v_j^i \mid 1 \leq j \leq n\}$, 열 j 에 속한 정점은 $C(j) = \{v_i^j \mid 1 \leq i \leq m\}$ 로 표시한다. $i \leq j$ 일 때 i 행과 j 행 사이에 있는 모든 정점들의 집합 $R(i:j) = \bigcup_{i \leq k \leq j} R(k)$ 로 표기하고 이와 비슷하게 i 열과 j 열 사이에 있는 모든 정점들의 집합 $C(i:j) = \bigcup_{i \leq k \leq j} C(k)$ 로 표기한다.

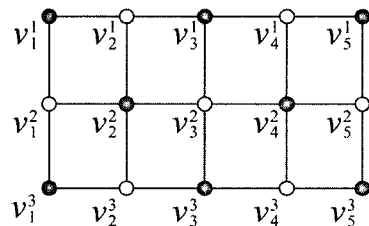


그림 1 $M(m, n)$

그래프의 경로는 정점들의 시퀀스(sequence)로 표기하고 경로 P 의 정점들의 집합을 $V(P)$ 로 표기한다. 그래프 G 에서 정점들의 집합 X 로 유도되는 부 그래프(induced subgraph)를 $G\langle X \rangle$ 라 하고, $G\langle X \rangle$ 의 두 정점 s, t 를 잇는 해밀톤 경로가 존재하면, 그 경로를 $H[s, t|X]$ 라 한다. 만약 X 가 공집합이면, $H[s, t|X]$ 는 비어있는 시퀀스로 표기한다. 부 그래프 $G\langle R(i) \rangle$ 에서 두 정점 v_j^i 와 $v_{j'}^i$ 를 잇는 경로를 $v_j^i \rightarrow v_{j'}^i$ 로 표기한다. 다시 말해 $v_j^i \rightarrow v_{j'}^i$ 는 $j < j'$ 이면 $(v_j^i, v_{j+1}^i, \dots, v_{j'-1}^i, v_{j'}^i)$ 이며 $j > j'$ 이면 $(v_j^i, v_{j-1}^i, \dots, v_{j'+1}^i, v_j^i)$ 이다. 이와 비슷하게 $G\langle C(j) \rangle$ 에서 두 정점 v_j^i 와 $v_{j'}^i$ 를 잇는 경로를 $v_j^i \rightarrow v_{j'}^i$ 로 표기한다.

메쉬는 보조정리 1과 보조정리 2의 조건에서 해밀톤 경로를 지니며[9] 이러한 조건에서 해밀톤 경로를 생성하는 선형시간 알고리즘이 [10,11]에서 제안되었다. 본 논문에서는 메쉬가 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보이는데 이러한 정리들을 활용한다.

보조정리 1. [9] $m, n \geq 2$ 일 때 mn 이 짝수(홀수)이면 $M(m, n)$ 은 꼭지 정점 s 와 s 와 다른(같은) 색을 지닌 정점 t 를 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

보조정리 2. [11] mn 이 짝수이면 $M(m, n)$ 은 다음과 같은 경우 두 정점 s 와 t 를 잇는 해밀톤 경로를 지닌다.

- (a) m, n 이 모두 4이상이고 두 정점 s 와 t 가 서로 다른 색을 지니거나,
- (b) $m=2$ 이고 $n \geq 3$ 인 경우 두 정점 s 와 t 가 서로 다른 색을 지니고 서로 다른 열에 있거나 모두 1열 혹은 n 열에 있는 경우

3. 메쉬의 강한 해밀톤 laceability

이 절에서는 메쉬가 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다. 메쉬는 $m, n \geq 2$ 일 때 mn 이 짝수(홀수)이면 꼭지 정점 s 와 s 와 다른(같은) 색을 지닌 정점 t 를 잇는 해밀톤 경로가 존재한다. 다음의 보조정리는 꼭지 정점과 임의의 정점을 잇는 가능한 가장 긴 길이의 경로(L^{opt} -경로)가 존재함을 보인다.

보조정리 3. $m, n \geq 2$ 일 때 $M(m, n)$ 은 mn 이 짝수

(홀수)이면 꼭지 정점 s 와 s 와 같은(다른) 색을 지닌 정점 t 를 잇는 L^{opt} -경로가 존재한다.

증명. m 에 대한 수학적 귀납법으로 s 와 t 를 잇는 L^{opt} -경로 P 가 존재함을 보인다. 일반성을 잃지 않고 $s = v_1^m$ 으로 간주하고 $t = v_j^i$ 라 하자. 기본 단계로 $m=2$ 인 경우 $P = (s, H[v_2^m, t|C(2:n)])$ 이다(그림 2(a)). 여기서 $H[v_2^m, t|C(2:n)]$ 은 보조정리 1에 의해 존재한다.

$m-1(m \geq 3)$ 인 경우 위 정리가 성립한다고 가정하고 m 인 경우 성립함을 보인다.

경우 1: $t \in R(1:m-1)$.

$t \neq v_n^{m-1}$ 이면 $P = (s \rightarrow v_n^m, P')$ 이다. 여기서 P' 는 $G\langle R(1:m-1) \rangle$ 에 존재하는 v_n^{m-1} 과 t 를 잇는 L^{opt} -경로로 귀납가설과 보조정리 1에 의해 존재한다(그림 2(b)). 만약 $t = v_n^{m-1}$ 이면 보조정리 1에 의해 $P = (s \rightarrow v_{n-1}^m, H[v_{n-1}^{m-1}, t|R(1:m-1)])$ 를 생성할 수 있다(그림 2(c)).

경우 2: $t \in R(m)$.

$P = (s \rightarrow v_{j-1}^m, P', v_n^m \rightarrow t)$ 를 생성할 수 있다. 여기서 P' 는 $G\langle R(1:m-1) \rangle$ 에 존재하는 v_{j-1}^{m-1} 과 v_n^{m-1} 을 잇는 L^{opt} -경로로 귀납가설과 보조정리 1에 의해 존재한다(그림 2(d)). □

보조정리 1과 3에 의해 $m \geq 2, n \geq 2$ 인 $M(m, n)$ 은 꼭지 정점과 임의의 정점을 잇는 L^{opt} -경로를 지닌다. 이러한 성질을 이용하여 $M(m, n)$ 이 강한 해밀톤 laceable함을 보인다. 먼저 $M(m, n)$ 이 짝수개의 정점을 지니는 경우를 고려한다.

정리 1. $m, n \geq 4$, mn 이 짝수인 $M(m, n)$ 은 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

증명. m 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. mn 이 짝수이므로 일반성을 잃지 않고 n 을 짝수로 가정한다. 보조정리 2에 의해 임의의 두 정점이 서로 다른 이분 집합에 속한 경우 이들 정점들을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다. 따라서 같은 이분 집합에 속한 두 정점 s 와 t 를 잇는 길이 $mn-2$ 인 L^{opt} -경로 P 가 존재함을 보인다. 일반성을 잃지 않고 s 와 t 는 검정 정점으로 가정한다.

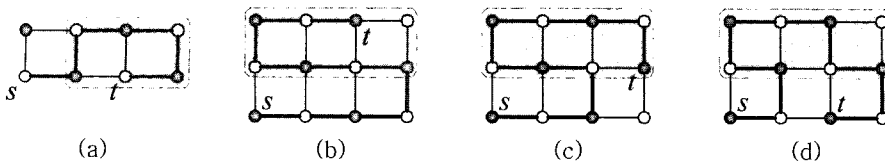


그림 2 보조정리 3 증명의 설명

기본 단계로 $m=4$ 인 경우 다음과 같이 두 가지로 나누어 성립함을 보인다.

i) $s, t \in R(1:2)$.

s 가 t 보다 왼쪽 열에 존재한다고 가정하고 $t=v_j^2$ 라 하자. 보조정리 1에 의해 $G\langle R(1:2) \cap C(1:j-1) \rangle$ 에는 s 와 v_j^2 를 잇는 해밀톤 경로 P' 가 존재한다. 또한 $j < n$ 이면 보조정리 3에 의해 $G\langle R(1:2) \cap C(j:n) \rangle$ 에는 t 와 v_n^2 를 잇는 L^{opt} -경로 P'' 가 존재하며, $j=n$ 이면 $P''=(t)$ 라 하자. 그리고 $G\langle R(3:4) \rangle$ 에는 v_1^3 과 v_n^3 을 잇는 해밀톤 경로 P''' 가 존재하므로 $P=(P', P'', P''')$ 를 생성할 수 있다(그림 3(a)).

ii) $s \in R(1:2), t \in R(3:4)$.

$s=v_n^2$ 이면 $s'=v_n^2$ 라 하고 $s=v_n^2$ 이면 $t \neq v_1^3$ 일 때 $s'=v_1^3, t=v_1^3$ 일 때 $s'=v_2^3$ 라 하자. 그리고 $R(3)$ 에 속한 s' 와 이웃한 정점을 t' 라 하자. 다음과 같이 $G\langle R(1:2) \rangle$ 와 $G\langle R(3:4) \rangle$ 에는 각각 s 와 s', t' 와 t 를 잇는 경로 P 와 P' 를 생성할 수 있다. $s' \in B$ 이면 $G\langle R(1:2) \rangle$ 에는 보조정리 3에 의해 L^{opt} -경로 P'' 가 존재하고 $G\langle R(3:4) \rangle$ 에는 보조정리 2에 의해 해밀톤 경로 P''' 가 존재한다. 그렇지 않으면($s' \in W$) 보조정리 1에 의해 $G\langle R(1:2) \rangle$ 에는 해밀톤 경로 P'' 가 존재하며 $G\langle R(3:4) \rangle$ 에는 보조정리 3에 의해 L^{opt} -경로 P''' 가 존재한다. 따라서 $P=(P', P''')$ 를 생성할 수 있다(그림 3(b)).

$m-1(m \geq 5)$ 인 경우 위 정리가 성립한다고 가정하고 m 인 경우 성립함을 보인다. 일반성을 잃지 않고 s 가 속한 행의 위치는 t 가 속한 행의 위치보다 작다고 가정한다.

경우 1. $s, t \in R(1:m-2)$.

귀납가설에 의해 $G\langle R(1:m-2) \rangle$ 에는 s 와 t 를 잇는 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. 경로 P' 가 경유하는 에지들 중 $G\langle R(m-2) \rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택한다. 그리고 두 정점 u, v 와 인접한 $R(m-1)$ 에 속한 두 정점을

각각 u', v' 라 하면 $G\langle R(m-1:m) \rangle$ 에는 보조정리 2에 의해 u' 와 v' 를 잇는 해밀톤 경로 P'' 가 존재한다. P' 에서 (u, v) 를 제거하고 (u, u') 와 (v, v') 를 추가하여 P' 와 연결하면 P 를 생성할 수 있다(그림 3(c)).

경우 2. $s \in R(1:m-2), t \in R(m-1:m)$.

$s \in R(m-2)$ 이면 앞의 [경우 1]과 같으므로 $s \in R(1:m-3)$ 으로 간주한다. $G\langle R(1:m-2) \rangle$ 에는 보조정리 3에 의해 s 와 v_n^{m-2} 를 잇는 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. 또한 $G\langle R(m-1:m) \rangle$ 에는 보조정리 1에 의해 v_n^{m-1} 과 t 를 잇는 해밀톤 경로 P'' 가 존재한다. 따라서 $P=(P', P'')$ 를 생성할 수 있다(그림 3(d)). □

$M(m, n)$ 이 홀수개의 정점을 지나는 경우 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보인다. 먼저 기본 단계로 $m=3$ 인 경우 성립함을 보인다.

보조정리 4. $n \geq 3$ 이 홀수이면, $M(3, n)$ 은 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

증명. n 에 대한 수학적 귀납법을 이용하여 임의의 두 정점 s 와 t 를 잇는 L^{opt} -경로 P 가 존재함을 보인다. $|B|=|W|+1$ 이므로 s 와 t 가 모두 검정이면 길이 $3n-1$ 인 해밀톤 경로, s 와 t 가 서로 다른 색을 지닌 경우 길이 $3n-2$ 인 경로, 그리고 s 와 t 가 모두 흰색인 경우 길이 $3n-3$ 인 경로가 존재함을 보인다. 기본 단계로 $n=3$ 인 경우 다음과 같이 세 가지로 나누어 성립함을 보인다.

i) $s, t \in B$.

s 와 t 둘 중 하나는 꼭지 정점이므로 보조정리 1에 의해 해밀톤 경로 P 가 존재한다.

ii) $s \in B, t \in W$.

일반성을 잃지 않고 $s=v_1^1$ 인 경우와 $s=v_2^2$ 인 경우로 나누어 보인다. 먼저 $s=v_1^1$ 이면(그림 4(a,b)),

$$P = \begin{cases} (s, v_2^1, v_2^2, v_1^2, v_1^3, v_2^3, v_3^3, t) & \text{if } t = v_3^3 \\ (s, v_1^2, v_1^3, v_2^3, v_3^3, v_2^2, v_2^1, t) & \text{if } t = v_2^1 \end{cases}$$

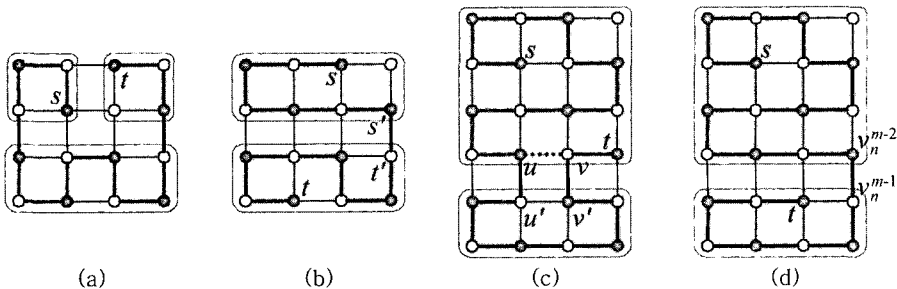


그림 3 정리 1 증명의 설명

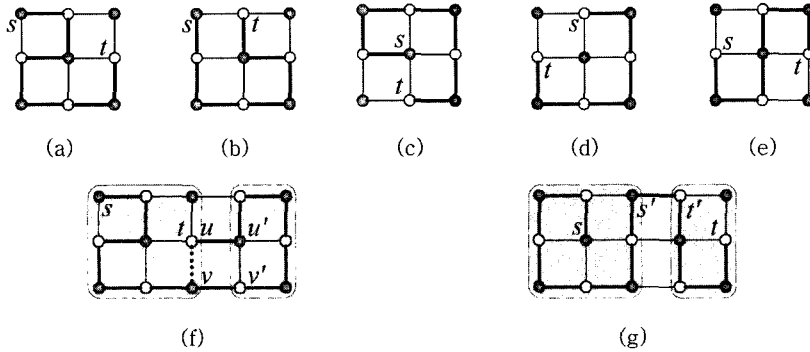


그림 4 보조정리 4 증명의 설명

$s = v_2^2$ 이면 $t = v_2^3$ 인 경우 $P = (s, v_1^2, v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_2^3, v_3^3, t)$ 이다(그림 4(c)).

iii) $s, t \in W$.

일반성을 잃지 않고 $s = v_2^1, t = v_1^2$ 인 경우와 $s = v_2^2, t = v_3^2$ 인 경우만을 보인다(그림 4(d,e)).

$$P = \begin{cases} (s, v_3^1, v_3^2, v_3^3, v_2^3, v_1^3, t) & \text{if } s = v_2^1, t = v_1^2 \\ (s, v_1^3, v_2^3, v_2^2, v_2^1, v_3^1, t) & \text{if } s = v_2^2, t = v_3^2 \end{cases}$$

이때 P 는 에지 (v_3^1, v_3^2) 와 (v_2^3, v_3^3) 중 하나는 반드시 경유한다.

$n-2 (n \geq 5)$ 인 경우 성립한다고 가정하고 n 인 경우 성립함을 보인다. 일반성을 잃지 않고 s 가 속한 열의 위치는 t 가 속한 열의 위치보다 같거나 작다고 가정한다.

경우 1: $s, t \in C(1:n-2)$

귀납가설에 의해 $G\langle C(1:n-2) \rangle$ 에는 s 와 t 를 잇는 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. P' 는 $G\langle C(n-2) \rangle$ 에 속한 에지들 중 적어도 하나는 반드시 경유한다. 이 에지를 (u, v) 라 하자. 그리고 두 정점 u, v 와 인접한 $C(n-1)$ 에 속한 두 정점들을 각각 u', v' 라 하면 $G\langle C(n-1:n) \rangle$ 에는 보조정리 1에 의해 u' 와 v' 를 잇는 해밀톤 경로 P'' 가 존재한다. P' 에서 (u, v) 를 제거하고 (u, u') 와 (v, v') 를 추가하여 P' 와 연결하면 L^{opt} -경로 P 를 생성할 수 있다(그림 4(f)).

경우 2: $s \in C(1:n-2), t \in C(n-1:n)$.

$s \in C(n-2)$ 이면 앞의 [경우 1]로 대응시켜 생각할 수 있으므로 $s \in C(1:n-3)$ 으로 간주한다. 두 개의 점 정점 v_{n-2}^1 와 v_{n-2}^3 중 t 와 인접하지 않은 정점을 s' 라 하고 s' 와 인접한 $C(n-1)$ 에 속한 정점을 t' 라 하자. 귀납가설에 의해 $G\langle C(1:n-2) \rangle$ 에는 s 와 s' 를 잇는 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. 또한 $t \in B$ 이면 보조정리

1, $t \in W$ 이면 보조정리 3에 의해 $G\langle C(n-1:n) \rangle$ 에는 t' 와 t 를 잇는 L^{opt} -경로 P'' 가 존재한다. 따라서 $P = (P', P'')$ 인 L^{opt} -경로 P 를 생성할 수 있다(그림 4(g)). □

정리 2. $m, n \geq 3, mn$ 이 홀수인 $M(m, n)$ 은 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

증명. m 에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. 먼저 기본단계로 $m=3$ 인 경우 보조정리 4에 의해 성립한다. $m-2 (m \geq 5)$ 인 경우 위 정리가 성립한다고 가정하고 m 인 경우 성립함을 보인다. 일반성을 잃지 않고 s 가 속한 행의 위치는 t 가 속한 행의 위치보다 같거나 작다고 가정한다.

경우 1: $s, t \in R(1:m-2)$.

귀납가설에 의해 $G\langle R(1:m-2) \rangle$ 에는 s 와 t 를 잇는 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. 경로 P' 가 경유하는 에지들 중 $G\langle R(m-2) \rangle$ 에 속한 에지 (u, v) 를 선택한다. 그리고 두 정점 u, v 와 인접한 $R(m-1)$ 에 속한 두 정점을 각각 u', v' 라 하면 $G\langle R(m-1:m) \rangle$ 에는 보조정리 2에 의해 u' 와 v' 를 잇는 해밀톤 경로 P'' 가 존재한다. P' 에서 (u, v) 를 제거하고 (u, u') 와 (v, v') 를 추가하여 P' 와 연결하면 P 를 생성할 수 있다(그림 5(a)).

경우 2: $s \in R(1:m-2), t \in R(m-1:m)$.

$s \in R(m-2)$ 이면 앞의 [경우 1]과 같으므로 $s \in R(1:m-3)$ 으로 간주한다. 두 개의 점 정점 정점 v_1^{m-2} 와 v_n^{m-2} 중 t 와 이웃하지 않은 정점을 s' 라 하자. 이때 $s' \in B$ 이다. $G\langle R(1:m-2) \rangle$ 에는 귀납가설에 의해 s 와 s' 를 잇는 L^{opt} -경로 P' 가 존재한다. s' 와 이웃한 $R(m-1)$ 에 속한 정점을 t' 라 하면 $G\langle R(1:m-1) \rangle$ 에는 t' 와 t 를 잇는 L^{opt} -경로 P'' 가 보조정리 3에 의해 존재한다. 따라서 $P = (P', P'')$ 를 생성할 수 있다(그림 5(b)). □

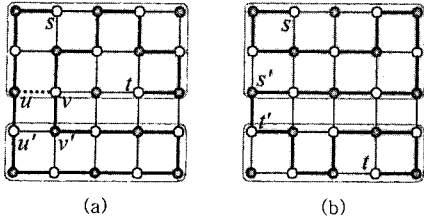


그림 5 정리 2 증명의 설명

n -차원 메쉬 $M(k_n, k_{n-1}, \dots, k_1)$ 는 $P_{k_n} \times P_{k_{n-1}} \times \dots \times P_{k_1}$ 과 같은 그래프의 곱(catersian product)로 나타낼 수 있다. 여기서 P_{k_n} 은 정점의 수가 k_n 인 체인(chain)을 의미한다. $P_{k_n} \times P_{k_{n-1}} \times \dots \times P_{k_1}$ 은 $P_m \times P_{k_n}$ 을 스페닝 부 그래프로 지닌다. 여기서 $m = \prod_{i=1}^{n-1} k_i$ 이다. 정리 1과 정리 2를 적용시켜 다음의 정리가 성립함을 알 수 있다.

따름정리 3. $n \geq 3, k_i \geq 3 (1 \leq i \leq n)$ 이라 하자. n -차원 메쉬 $M(k_n, k_{n-1}, \dots, k_1)$ 는 강한 해밀톤 laceable 그래프이다.

4. 결론

본 논문에서는 m 행 n 열로 구성된 2차원 메쉬 $M(m, n)$ 이 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보였다. 먼저 $M(m, n)$ 에는 $m \geq 2, n \geq 2$ 일 때 분지수가 2인 정점과 다른 임의의 정점을 잇는 L^{opt} -경로가 존재함을 보이고 이를 이용하여 정점의 수가 짝수이면 $m \geq 4, n \geq 4$ 일 때, 정점의 수가 홀수이면 $m \geq 3, n \geq 3$ 일 때 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보였다. 또한 $M(m, n)$ 의 해밀톤 성질을 이용하여 $n \geq 3, k_i \geq 2 (1 \leq i \leq n)$ 인 n -차원 메쉬 $M(k_n, k_{n-1}, \dots, k_1)$ 가 강한 해밀톤 laceable 그래프임을 보였다. 메쉬는 토러스, k -ary n -큐브, 하이퍼큐브, 재귀원형군과 같은 여러 상호 연결망들의 스페닝 부 그래프이므로 본 논문의 결과는 이들 연결망들의 고장 해밀톤 성질을 밝히는 데 활용될 수 있다.

참고 문헌

[1] Intel Corporation literature, Intel Corporation, 1991.
 [2] C.-H. Tsai, J. M. Tan, T. Lian, and L.-H. Hsu, "Fault-tolerant hamiltonian laceability of hyper-cubes," *Information Processing Letters*, Vol. 83, pp. 301-306, 2002.
 [3] C.-H. Tsai, J. M. Tan, Y. C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault-free cycles and links in faulty recursive circulant graphs," *Proc. of the ICS 2000 Workshop on Algorithms and Theory of Computation*, pp. 74-77, 2000.
 [4] Y. A. Ashir and I. A. Stewart, "Fault-tolerant

embeddings of hamiltonian circuits in k -ary n -cubes," *SIAM Journal on Discrete mathematics*, Vol. 15, No. 3, pp. 317-328, 2002.
 [5] W. T. Huang, Y. C. Chuang, J. J. Tan, and L. H. Hsu, "On the fault-tolerant hamiltonicity of faulty crossed cubes," *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E85-A, No. 6, pp. 1359-1370, 2002.
 [6] G. Simmons, "Almost all n -dimensional rectangular lattices are Hamilton laceable," *Congressus Numerantium*, Vol. 21, 649-661, 1978.
 [7] S. Y. Hsieh, G. H. Chen, and C. W. Ho, "Hamiltonian-laceability of star graphs," *Networks*, Vol. 36, No. 4, pp. 225-232, 2000.
 [8] J. H. Park and H. C. Kim, "Fault hamiltonicity of product graph of path and cycle," *International Conference, Computing and Combinatorics Conference (COCOON)*, pp. 319-328, 2003.
 [9] C. C. Chen and N. F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs," *Combinatorial Mathematics VIII. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 884, pp. 23-34, 1980.
 [10] S. D. Chen, H. Shen, and R. W. Topor, "An efficient algorithm for constructing hamiltonian paths in meshes," *Parallel Computing*, Vol. 28, pp. 1293-1305, 2002.
 [11] A. Itai, C. H. Papadimitriou, and J. L. Czwarcfiter, "Hamiltonian paths in grid graphs," *SIAM Journal on Computing*, Vol. 11, No. 4, pp. 676-686, 1982.
 [12] J. S. Kim, S. R. Maeng, and H. Yoon, "Embedding of rings in 2-D meshes and tori with faulty nodes," *Journal of Systems Architecture*, Vol. 43, pp. 643-654, 1997.
 [13] S. D. Chen, H. Shen, and R. W. Topor, "Permutation-based range-join algorithms on N -dimensional meshes," *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, Vol. 13, No. 4, pp. 413-431, 2002.



박 경 옥
 1996년 8월 순천대학교 전자계산학과(학사). 1999년 8월 전남대학교 전산통계학과(석사). 2004년 8월 전남대학교 전산학과(박사). 관심분야는 병렬 및 분산처리, 그래프 이론, 알고리즘



임 형 석
 1983년 서울대학교 컴퓨터공학과(학사) 1985년 한국과학기술원 전산학과(석사) 1993년 한국과학기술원 전산학과(박사) 1996년 8월~1997년 7월 미국 퍼듀대학교 전산학과 방문교수. 1987년~현재 전남대학교 전산학과 교수. 관심분야는 계산이론, 알고리즘, 병렬 및 분산처리