

끝단 질량을 갖고 종동력을 받는 외팔 Timoshenko보의 동적안정성에 미치는 부분 탄성기초의 영향

류봉조#, 신광복*, 김효준**

Influence of Partial Elastic Foundations on Dynamic Stability of a Cantilevered Timoshenko Beam with a Tip Mass under a Follower Force

Bong Jo Ryu[#], Kwang Bok Shin^{*} and Hyo Jun Kim^{**}

ABSTRACT

This paper presents the dynamic stability of a cantilevered Timoshenko beam on partial elastic foundations subjected to a follower force. The beam with a tip concentrated mass is assumed to be a Timoshenko beam taking into account its rotary inertia and shear deformation. Governing equations are derived by extended Hamilton's principle, and finite element method is applied to solve the discretized equation. Critical follower force depending on the attachment ratios of partial elastic foundations, rotary inertia of the beam and magnitude and rotary inertia of the tip mass is fully investigated.

Key Words : Partial Elastic Foundation(부분 탄성기초), Follower Force(종동력), Dynamic Stability(동적안정성), Timoshenko Beam(티모셴코 보), Tip mass(끝단질량)

1. 서론

탄성기초위에 놓여있고 종동력을 받는 보의 동적안정성에 관한 연구는 기계공학, 항공우주공학 등 공학의 제 분야에서 많은 연구자들의 관심의 대상이 되어왔다. 예를들어, 지반구조위에 놓인 유동유체에 의한 파이프의 안정성 문제라든지 추력을 받는 로켓이나 미사일 등은 비보존력의 일종인 종동력을 받는 구조물로 간주될 수 있다. 탄성기초 위에 놓인 종동력을 받는 보의 동적안정성과

진동에 관한 연구의 시초는 Smith와 Herrmann¹에 의해 이루어졌다. 이들은 기둥의 전단변형과 회전관성을 고려하지 않은 Beck기둥에 대해, 탄성기초가 기둥 전체에 걸쳐있는 경우의 임계종동력 값을 탄성기초 파라미터값의 변화에 따라 구하였다. 그런데 이들이 구한 임계 종동력 값은 탄성기초가 없는 경우의 임계종동력 값과 비교해 보았을 때 변화가 없다는 특이한 결론에 도달하였다. 그 후, Sundararajan²은 Smith와 Herrmann의 연구를 확장하여 기둥의 질량분포와 유사한 탄성기

*** 접수일: 2005년 4월 22일; 게재승인일: 2005년 8월 9일

교신저자 : 한밭대학교 기계공학부

E-mail bjryu701@hanbat.ac.kr Tel. (042) 821-1159

* 한밭대학교 기계공학부

** 삼척대학교 기계공학부

초 상수(elastic foundation modulus)를 갖는 기둥이 비보존력과 보존력을 받는 두 경우에 대해 안정성을 조사하였으며, 이 연구에서 그 또한 역시 임계 종동력 값은 탄성기초의 존재와 무관하다는 결론을 도출하였다. Anderson³은 전체 탄성기초위에 놓여 있고 끝단 집중질량을 갖는 감쇠를 고려한 외팔보가 종동력을 받는 경우에 있어서의 계의 동적안정성을 보의 회전관성, 집중질량의 크기변화, 집중질량 회전관성 및 탄성기초 파라미터의 변화에 따라 연구하였다. 이 연구에서 그는 집중질량의 회전관성과 보의 회전관성의 고려는 탄성기초위에 놓인 보의 임계종동력 값의 변화에 중요한 영향을 미친다는 것을 알았다. Hauger와 Vetter⁴는 전체 탄성기초가 되어있는 외팔 Euler-Bernoulli보가 종동력을 받는 경우의 동적안정성 문제를 다루었는데, 이들은 탄성기초의 형태가 각각 균일, 선형적, 포물선 형태인 경우로 확장하여 연구하였다. 종동력을 받고 전체 탄성기초위에 놓인 위의 연구들과 병행하여, 종동력을 받는 병진스프링 지지된 보의 진동과 안정성에 대한 연구도 이루어져 왔는데 Sundararajan⁵은 자유단에 병진스프링 지지되고 종동력을 받는 외팔보의 진동과 안정성 문제를 스프링 상수 값의 변화에 따라 조사하였다. 그 후, Jacoby와 Elishakoff⁶는 끝단질량을 갖고 종동력을 받는 외팔보(소위 Pflüger 기둥이라 일컬음)가 전체 탄성기초위에 놓여있을 때의 동적안정성 문제에 대하여 Anderson³의 연구를 재검토 하였다. 이들은 Pflüger기둥이 전체 탄성기초 되어 있을 때, 오로지 자유단 끝에만 스프링 상수값이 다른 병진스프링을 한개 부착시켜 임계종동력 값을 구하였다. 이 연구에서 이들은 기둥의 밀도에 대한 균일 탄성기초 상수의 비가 끝단 질량에 대한 병진스프링 상수의 비와 같은 경우는 임계 종동력 값에 변화가 없다는 결과를 얻었다.

이때까지의 연구들이 대부분 전체 탄성기초위에 놓인 보 구조물들의 안정성 연구였던데 비해, Elishakoff와 Wang⁷은 종동력을 받는 부분 탄성기초된 외팔 Euler-Bernoulli보의 동적안정성 연구를 하였다. 이들은 특히 부분탄성기초 길이 변화에 따라 임계 종동력 값의 변화를 살펴보았다. 또한, 이들은 탄성기초 파라미터 값 K 가 $K=0.0$ 일 때의 임계 종동력 값에 대한 $K=20$ 부터 100까지의 임계 종동력 값의 비의 변화에 따라 곡선을 얻었다. 이들이 얻은 결과에 의하면 부분탄성기초 길이가 고정 단으로부터 점점 길어져 보 길이의 약 0.7부

근까지는 K 의 증가에 따라 임계 종동력 값이 증가되나 그 이후는 감소된다는 것이었다. 그러나, 이들의 이러한 결과는 임계 종동력 값을 산출하는 과정에서 다소의 오류가 있었다고 지적되며 이에 대한 새로운 결과를 본 논문의 Fig. 5에 나타내었다.

Chen과 Ku⁸는 끝단 집중질량을 갖고 전체 탄성기초된 외팔 Timoshenko보가 종동력을 받는 경우, 집중질량 회전관성과 크기변화, 탄성기초 파라미터 값의 변화에 따라 임계 종동력값을 유한요소법에 의하여 구하였다. Lee와 그의 공동연구자들⁹은 양끝단이 병진 스프링과 회전 스프링으로 지지되고 보 전체에 걸쳐 탄성기초된 보가 종동력을 받는 경우 계의 동적안정성에 미치는 탄성기초의 영향을 조사하였고, Budkowska와 Szymczak¹⁰은 지반에 부분적으로 묻힌 못(piles)이 축력을 받는 경우, 지반강성에 대한 못의 강성 비의 효과를 조사하였다. 최근 Maurizi와 Bambill¹¹은 종동력을 받는 기둥의 동적안정성에 관한 연구의 역사와 흐름을 추적한 Langthejem과 Sugiyama¹²의 조사에 덧붙여, 종동력을 받고 전체 탄성기초 또는 부분 탄성기초위에 놓인 보의 동적안정성 연구들이 추가되어야 된다는 내용을 발표하였다. 본 연구의 목적은 종동력을 받고 부분 탄성기초위에 놓인 끝단질량을 갖는 Timoshenko보에 대한 동적안정성을 보의 회전관성 및 전단변형 파라미터의 변화, 끝단질량 크기 및 회전관성의 변화 그리고 탄성기초 파라미터 값의 변화에 따라 연구하는데 있다.

2. 이론

2.1 수학적 모델 및 운동방정식

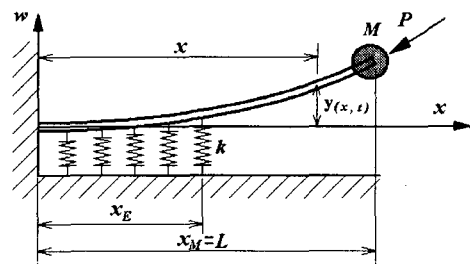


Fig. 1 Mathematical model of a cantilevered beam on partial elastic foundations subjected to follower force

Fig. 1은 종동력 P 를 받고 집중질량 M 을 갖는 외팔보가 단위길이 당 스프링 상수 k 를 갖는 부분 탄성기초위에 놓여있을 때의 수학적 모델을 나타낸다.

Fig. 1 모델에 대한 운동 지배방정식을 유도하기 위해 에너지 표현 식을 쓰면 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \phi_t^2 dx + \frac{1}{2} M y_t^2(x_M, t) + \frac{1}{2} J \phi_t^2(x_M, t) \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \phi_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k' AG(y_x - \phi)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{x_E} k y^2 dx \quad (2)$$

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L P y_x^2 dx \quad (3)$$

$$\delta W_{nc} = -P \phi(L, t) \delta y(L, t) \quad (4)$$

식(1)-(4)에서 T 는 운동에너지, V 는 보와 탄성 기초에 의한 탄성 포텐셜에너지, W_c 는 종동력에 의한 보존일, δW_{nc} 는 종동력에 의한 비보존 가상일을 나타낸다. 한편, ρ 는 보의 밀도, y 는 횡방향 변위, ϕ 는 굽힘기울기, k' 는 보의 전단계수, EI 는 보의 굽힘강성계수, L 은 보의 길이, J 는 집중질량 회전관성, A 는 단면적, 하첨자 x 와 t 는 각각 축 방향 좌표와 시간에 대한 미분을 의미한다.

이제 식 (1)-(4)를 다음과 같은 확장된 해밀턴원리

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V + W_c) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (5)$$

에 대입하면 다음과 같다

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L (\rho A y_{tt} \delta y + \rho I \phi_{tt} \delta \phi + EI \phi_x \delta \phi_x - P y_x \delta y_x \right. \\ & \quad + k' AG(y_x - \phi) \delta(y_x - \phi)) dx \\ & \quad + \int_0^{x_E} k y \delta y dx \Big\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \{ P \phi(L, t) \delta y(L, t) \\ & \quad + M y_{tt}(x_M, t) \delta y(x_M, t) \\ & \quad + J \phi_{tt}(x_M, t) \delta \phi(x_M, t) \} dt = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

2.2 유한요소법의 적용

식 (6)으로부터 이산화된 운동 지배방정식을 얻기 위해 유한 요소법을 적용하였으며 보를 균일 길이 l 인 N 개의 요소로 분할하고 다음과 같은 무차원 좌표들과 국부좌표들을 이용한다.

$$\begin{aligned} x' &= x - (i-1)l, & x'_M &= x_M - (N-1)l, & \xi_M &= \frac{x'_M}{l}, \\ x'_E &= x_E - (d-1)l, & \xi &= \frac{x'}{l}, & \xi_s &= \frac{x'_E}{l}, & \eta &= \frac{y}{l} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)을 이용하여 식 (6)의 변분을 정리하고 이산화된 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 [\rho A l^3 \eta_{tt}^{(i)} \delta \eta^{(i)} + \frac{EI}{l} \phi_\xi^{(i)} \delta \phi_\xi^{(i)} - P l \eta_\xi^{(i)} \delta \eta_\xi^{(i)} \\ & \quad + \rho I l \phi_{tt}^{(i)} \delta \phi^{(i)} + k' A G l (\eta_\xi^{(i)} - \phi^{(i)}) \delta (\eta_\xi^{(i)} - \phi^{(i)})] d\xi \\ & \quad + \sum_{i=1}^d \left[\int_0^{\xi_s} k l^3 \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right] d\xi + M l^2 \eta_{tt}^{(N)}(\xi_M, t) \delta \eta^{(N)}(\xi_M, t) \\ & \quad + J \phi_{tt}^{(N)}(\xi_M, t) \delta \phi^{(N)}(\xi_M, t) \\ & \quad + P \phi(1, t)^{(N)} \delta \eta(1, t)^{(N)} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

이제 식 (8)의 해 $\eta(\xi, t)$, $\phi(\xi, t)$ 를

$$\eta(\xi, t) = \eta(\xi) e^{st}, \quad \phi(\xi, t) = \phi(\xi) e^{st} \quad (9)$$

로 가정하고 다음과 같은 무차원 파라미터들

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{M}{\rho A L}, \quad \beta = \frac{J}{\rho A L^3}, \quad \mu = \frac{x_M}{L}, \quad K = \frac{k L^4}{EI}, \\ \sigma &= \frac{x_E}{L}, \quad Q = \frac{P L^2}{EI}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho A L^4 s^2}{EI}, \quad R = \frac{I}{A L^2} \\ S &= \frac{k' A G L^2}{EI} \end{aligned} \quad (10)$$

을 도입하면 식 (8)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left[-\frac{\lambda^2}{N^4} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} + \eta_\xi^{(i)} \delta \eta_\xi^{(i)} - \frac{Q}{N^2} \eta_\xi^{(i)} \delta \eta_\xi^{(i)} d\xi \right. \\ & \quad + \frac{\lambda^2 R}{N^2} \phi^{(i)} \delta \phi^{(i)} + \frac{S}{N^2} (\eta_\xi^{(i)} - \phi^{(i)}) \delta (\eta_\xi^{(i)} - \phi^{(i)}) \Big] \\ & \quad + \sum_{i=1}^d \left[\int_0^{\xi_s} \frac{K}{N^4} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} d\xi \right] + \frac{\alpha \lambda^2}{N^3} \eta^{(N)}(\xi_M) \delta \eta^{(N)}(\xi_M) \\ & \quad + \frac{\beta \lambda^2}{N} \phi^{(N)}(\xi_M) \delta \phi^{(N)}(\xi_M) \\ & \quad + \frac{Q}{N^2} \phi^{(N)}(1) \delta \eta^{(N)}(1) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

식 (10)의 무차원 파라미터들에 있어, α 는 집중 질량과 보 질량의 질량비를 나타내고, β 는 집중 질량 회전관성 파라미터, μ 는 무차원 집중질량 위치, K 는 탄성기초 파라미터, σ 는 무차원화된 부분 탄성기초 끝단 위치, Q 는 무차원 종동력, λ 는 무차원 고유진동수, R 과 S 는 각각 보의 회전관성과 전단변형 파라미터를 의미한다.

3. 수치해석 결과 및 검토

3.1 부분 탄성기초의 영향

종동력을 받고 부분 탄성기초위에 놓인 외팔 Timoshenko보의 동적안정성에 관한 수치 해를 얻기 위해 유한요소해석을 수행하였으며, 수치해의 타당성 검토를 위해 전체가 탄성기초위에 놓인 Euler-Bernoulli보에 대한 이전 연구인 참고문헌(6)의 임계 종동력 값과 비교하였다. 비교한 결과 임계 종동력 값에 있어 근사한 일치($Q/\pi^2=2.0315$ (참고문헌(6)), $Q/\pi^2=2.0317$ (본 연구) 0.0098%오차)를 보임으로서 본 연구의 수치해의 타당성을 검토하였다.

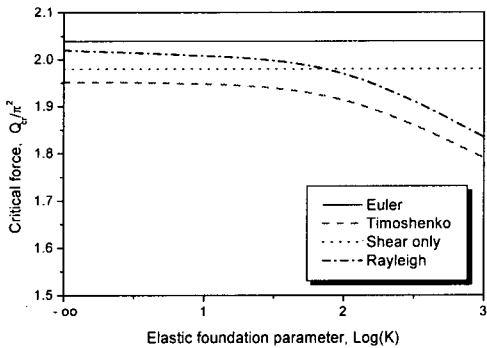


Fig. 2 Critical force depending on various types of beam

Fig. 2는 Euler-Bernoulli보, 전단변형만을 고려한 보, Rayleigh보, Timoshenko보가 전체 탄성기초를 갖는 경우에 있어, 탄성 기초파라미터의 변화에 대한 종동력 값을 보여주고 있다. 이 그림에서 알 수 있듯이 Euler-Bernoulli보는 탄성기초 파라미터의 변화(증가 또는 감소)에 대해 임계 종동력 값의 변화가 없음을 알 수 있고, 전단변형만을 고려한 보 또한 고정된 전단변형 파라미터 값에 대해

탄성 기초 파라미터 값의 변화가 임계 종동력 값에 미치는 영향은 없는 것으로 나타났다. 그러나 Timoshenko보와 회전관성만을 고려한 Rayleigh보의 경우에는 탄성기초 파라미터 값의 증가와 함께 임계 종동력 값이 감소함을 알 수 있다.

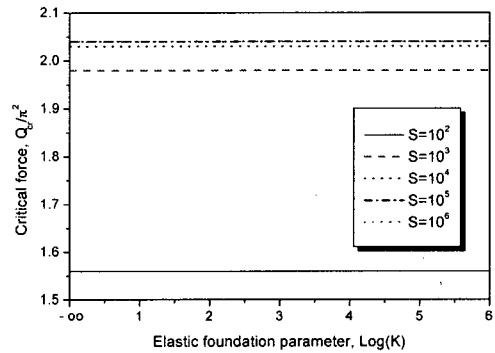


Fig. 3 Critical force depending on shear deformation parameters, S.

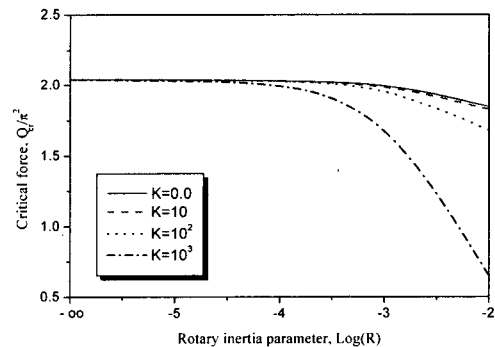


Fig. 4 Critical force depending on rotary inertia parameters, R.

Fig. 3은 보 전체가 탄성기초 되어 있는 경우, 보의 회전관성 파라미터를 고정($R=0.0$)시킨 상태에서 보의 전단변형 파라미터와 탄성기초 파라미터 값의 변화에 대해 임계 종동력 값을 나타낸 그림이다. 이 그림에서 알 수 있는 것은 전단변형 파라미터 S 값이 $S \geq 10^4$ 에 대해서는 탄성기초 파라미터 값의 변화가 임계 종동력 값에 미치는 영향은 없음을 알 수 있다. Fig. 4는 전체 탄성기초가 되어 있는 경우 보의 전단변형 파라미터 값

을 고정($S=10^6$)시킨 상태에서 보의 회전관성 파라미터와 탄성기초 파라미터의 변화에 따른 임계 종동력 값을 보여준다. 그림에서 알 수 있듯이 회전관성 파라미터 R 값이 $R \leq 10^{-4}$ 에서 탄성기초 파라미터 값의 변화가 임계 종동력 값에 미치는 영향은 거의 없는 것으로 나타났다.

Fig. 5와 Fig. 6은 보가 부분 탄성기초 되어 있는 경우, Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보의 임계 종동력 값을 탄성기초 파라미터 값의 변화와 부분 탄성기초의 길이 변화에 따라 나타내 보인 그림들이다. 먼저 두 그림들 모두에 있어, 무차원화된 부분 탄성기초 끝단의 위치 σ 가 보의 고정단으로부터 자유단 쪽으로 증가될 때, 임계 종동력 값은 고정된 탄성기초 파라미터 값에 대해 증가했다가 감소되고 다시 증가되는 경향을 보였으며, 고정된 부분 탄성기초 끝단위치에 대해 임계 종동력 값은 Timoshenko 보의 경우가 Euler-Bernoulli 보의 경우보다 더 작게 나타남을 알 수 있었다. 또한, 고정된 탄성기초 파라미터 값에 대해 최대 임계 종동력 값을 나타내는 무차원 부분 탄성기초 끝단의 위치 σ 는 $\sigma=0.5$ 즉, 부분탄성기초가 보의 고정단으로부터 보의 중간부분까지 되어있는 경우이다. 한편, 최저 임계 종동력 값을 나타내는 부분 탄성기초의 끝단의 위치는 보의 고정단으로부터 약 $\sigma=0.85$ 되는 부근이다.

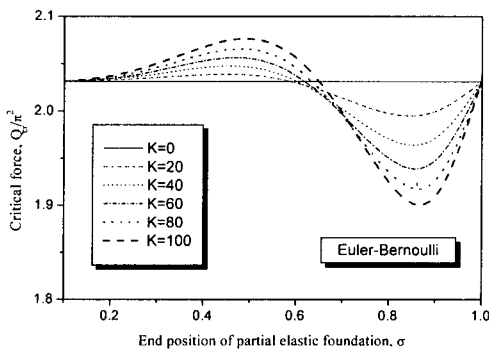


Fig. 5 Critical force depending on the partial elastic foundation parameter(Euler-Bernoulli beam)

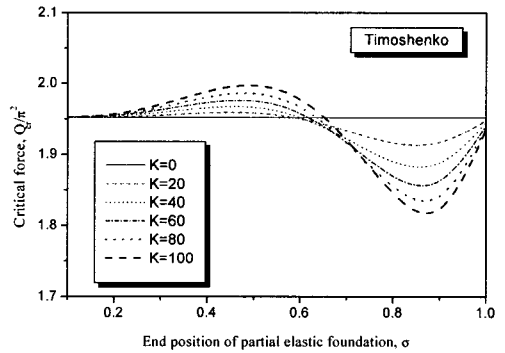


Fig. 6 Critical force depending on the partial elastic foundation parameter (Timoshenko beam)

3.2 부분 탄성기초의 영향

Fig. 7과 8은 Timoshenko보가 전체 탄성기초 되어 있을 때, 집중질량의 크기만을 고려한 경우와 회전관성까지도 함께 고려된 경우, 탄성기초 파라미터 변화에 의한 임계 종동력 값을 보여준다.

먼저 Fig. 7의 집중질량의 크기만을 고려한 경우, 질량비 α 에 대해 탄성기초 파라미터의 증가와 함께 임계 종동력 값이 증가되지만 비교적 작은 질량비($\alpha \leq 0.2$)에 대해서는 반대의 경향을 나타내 보인다. 이를 좀 더 상세히 설명하면, 질량비 $\alpha=0.1$ 일때, 탄성기초 파라미터 값 $K=0, K=50, K=100$ 의 경우 각각에 대해 임계 종동력 값은 1.725, 1.655, 1.609이고, 질량비 $\alpha=0.2$ 일때, 탄성기초 파라미터 값 $K=0, K=50, K=100$ 의 경우 각각에 대해 임계종동력 값은 0.641, 1.589, 1.579로 탄성기초 파라미터 값의 증가와 함께 임계종동력 값이 감소됨을 알 수 있다. 한편 Fig. 8의 회전관성을 고려한 경우는 질량비에 대해 탄성기초 파라미터 값의 증가와 함께 임계 종동력 값은 증가된다. 또한, 집중질량의 회전관성 고려는 집중질량의 크기만을 고려한 경우(Fig. 7)에 비해 동일 탄성기초 파라미터 값에 대해 임계 종동력 값을 작게 함으로서 더 불안정한 효과를 나타내 보인다.

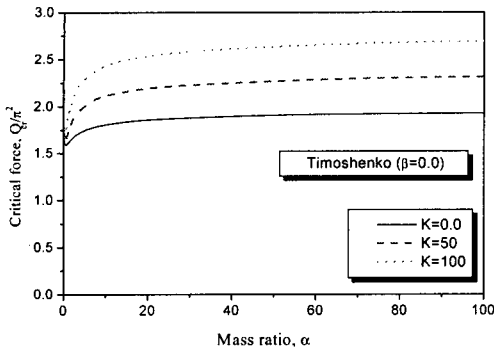


Fig. 7 Critical force depending on the mass ratio without rotary inertia of the tip mass

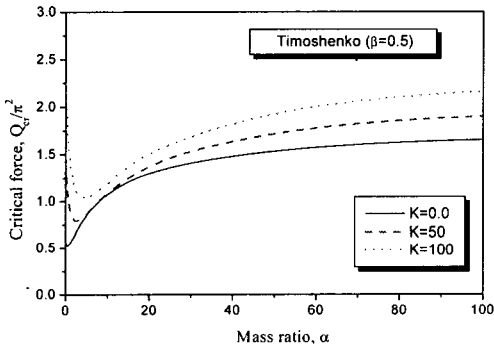


Fig. 8 Critical force depending on the mass ratio taking into account rotary inertia of the tip mass

4. 결론

충동력을 받고 부분 탄성기초위에 놓인 회전관성과 전단변형을 고려한 Timoshenko보의 동적안정성에 관한 수치 해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다. 첫째, 전체 탄성기초 되어 있는 경우, 보의 전단변형은 탄성기초 파라미터의 변화에 대해 임계충동력 값의 변화에 영향을 주지 않지만, 보의 회전관성은 큰 영향을 미친다. 둘째, 부분 탄성기초의 끝단의 위치가 보의 고정 단으로부터 자유단 쪽으로 증가되어갈 때, 임계 충동력 값은 고정된 탄성기초 파라미터 값에 대해 증가했다가 감소되고 다시 증가되는 경향을 나타내었으며, 최대 임계 충동

력 값을 나타내는 부분 탄성기초의 끝단 위치는 대략 보의 중간부분이다. 셋째, 끝단질량이 존재할 때, 끝단질량의 크기만을 고려한 경우는 질량비 α 에 대해 탄성기초 파라미터의 증가와 함께 임계 충동력 값이 증가되지만 비교적 작은 질량비에 대해서는 반대의 경향을 나타내 보인다. 그러나, 끝단질량 회전관성까지도 고려한 경우는 고정된 질량비에 대해 탄성기초 파라미터 값의 증가와 함께 임계 충동력 값은 증가된다. 또한, 끝단질량의 회전관성의 고려는 끝단질량 크기만을 고려한 경우에 비해 동일 탄성기초 파라미터 값에 대해서도 임계 충동력 값을 작게 만들어 불안정한 효과를 나타낸다.

참고문헌

1. Smith, T. E. and Herrmann, G., "Stability of a Beam on an Elastic Foundation Subjected to a Follower Force," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 628-629, 1972.
2. Sundarajan, C., "Stability of Columns on Elastic Foundations Subjected to Conservative and Non-conservative Forces," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 37, pp. 79-85, 1974.
3. Anderson, G. L., "The Influence of Rotary Inertia, Tip Mass, and Damping on the Stability of a Cantilever Beam on an Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 43, pp. 543-552, 1975.
4. Hauger, W. and Vetter, K., "Influence of an Elastic Foundation on the Stability of a Tangentially Loaded Column," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 47, pp. 296-299, 1976.
5. Sundararajan, C., "Influence of an Elastic End Support on the Vibration and Stability of Beck's Column," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 18, pp. 239-241, 1976.
6. Jacoby, A. and Elishakoff, I., "Discrete-continuous Elastic Foundation may leave the Flutter Load of the Pfluger Column Unaffected," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108, pp. 523-525, 1986.
7. Elishakoff, I. and Wang, X., "Generalization of Smith-Herrmann Problem with the Aid of Computerized Symbolic Algebra," *Journal of*

- Sound and Vibration, Vol. 117, pp. 537-542, 1987.
8. Chen, L. W. and Ku, D. M., "Stability of Elastic Systems under Follower Forces," AIAA Journal, Vol. 30, pp. 767-771, 1992.
 9. Lee, S. Y., Kuo, Y. H. and Lin, F. Y., "Stability of a Timoshenko Beam Resting on a Winkler Elastic Foundation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 153, pp. 193-202, 1992.
 10. Budkowska, B. B. and Szymczak, C., "Initial Post-buckling Behavior of Pipes Partially Embedded in Soil," Computers & Structures, Vol. 62, pp. 831-835, 1997.
 11. Maurizi, M. J. and Bambill, E. A., "An Additional Note on "Dynamic Stability of Columns Subjected to Follower Loads : A Survey," Journal of Sound and Vibration, Vol. 251, pp. 181-183, 2002.
 12. Langthjem, M. A. and Sugiyama, Y., "Dynamic Stability of Columns Subjected to Follower Loads : A Survey," Journal of Sound and Vibration, Vol. 238, pp. 809-851, 2000.