

# 끝단질량을 가진 유체유동 회전 외팔 파이프의 고유진동수 해석

윤한익\*, 손인수#

## Natural Frequency of Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid with Tip Mass

Han Ik Yoon\* and In Soo Son#

### ABSTRACT

The vibration system in this study is consisted of a rotating cantilever pipe conveying fluid and a tip mass. The equation of motion is derived by using the Lagrange's equation. The influences of the rotating angular velocity and the velocity of fluid flow on the natural frequencies of a cantilever pipe have been studied by the numerical method. The effects of a tip mass on the natural frequencies of a rotating cantilever pipe are also studied. The influences of a tip mass, the velocity of fluid, the angular velocity of a cantilever pipe and the coupling of these factors on the natural frequency of a cantilever pipe are analytically clarified. The natural frequencies of a cantilever pipe conveying fluid are proportional to the angular velocity of the pipe in both axial direction and lateral direction.

**Key Words** : Rotating cantilever pipe conveying fluid (유체이송 회전 외팔 파이프), Natural frequency (고유 진동수), Tip mass (끝단질량), Follower force (중동력)

### 1. 서론

스프링 쿨러는 이송유체를 갖는 회전 외팔파이프의 한 형태이며, 파이프의 끝단에 집중 중동력으로 작용하는 비점성 유체의 분사력은 미사일의 추진력과 같이 탄성계의 고유진동수에 큰 영향을 미친다. 이러한 영향을 고려한 회전하지 않는 유체유동 외팔파이프에 관한 연구<sup>1,2</sup>에 비해 회전하는 유체유동 외팔파이프에 관한 연구는 그리 활발하지 않은 실정이다. 또 외팔보가 끝단질량을

갖고 회전운동을 하는 대표적 공학적 예는 우주왕복선이 긴 구조물 끝에 실험장비등을 장착하고 각종 실험을 수행하거나, 산업용 로봇의 매니플레이터 말단장치(end-effector) 등을 들 수 있다. 따라서 이들 끝단질량이 전체 시스템의 고유진동수에 미치는 영향을 해석하는 것은 중요한 문제라 할 수 있다. 유체유동에 의한 송수관의 진동과 안정성에 관한 연구는 Ashley<sup>3</sup> 등에 의해 비롯되어 동역학에 대한 이론적 연구와 실험적 연구를 통해 송수관이 양단 단순지지된 경우에는 유동유체의

\* 접수일: 2005년 3월 8일; 게재승인일: 2005년 8월 9일

\* 동의대학교 기계공학부

# 교신저자: 동의대학교 산업기술개발연구소

E-mail inson0721@hanmail.net Tel. (051) 890-1932

힘은 보존적이고, 계는 어떤 임계유속 이상에서 발산형 불안정을 일으키지만 유체가 나오는 파이프의 끝단이 자유인 경우는 유동유체의 힘이 비보존적이며, 계는 임계유속 이상에서 플러터(flutter) 불안정을 일으킨다는 연구결과를 발표하였다.<sup>4,5</sup> 또 회전운동을 하는 외팔보의 진동해석에 관한 연구는 Southwell<sup>6</sup>로부터 비롯하여 많은 연구자들에 의해 연구되어 졌다.<sup>7-9</sup> 최근들어 회전운동을 하는 외팔보에 대한 연구는 회전하는 유연 매니플레이터의 비선형 자유진동해석, 끝단질량을 갖는 곡선보의 회전운동의 동특성 해석, 그리고 회전 유체 튜브의 동특성에 관한 연구 등 많은 연구결과들이 발표되어져 오고있다.<sup>10-12</sup> 또 Yoo<sup>13</sup> 등은 복합변형변수를 이용한 선형모델링 기법을 사용하여 회전 외팔보 및 회전구조물의 진동해석에 관한 많은 연구를 수행하였다. Bhat<sup>14</sup> 는 회전에 의한 운동에너지를 고려하고 외팔보의 끝단질량과 그 관성모멘트를 고려하여 보의 진동해석을 수행하였으며, Fung<sup>15</sup> 등은 유연한 매니플레이터의 고유진동수에 미치는 끝단질량의 영향을 연구하기도 하였다. 하지만 이상의 많은 연구에서 회전요소와 유동유체, 그리고 끝단질량이 동시에 존재하는 계의 고유진동수를 해석한 결과는 없는 실정이다. 실제의 경우 유체유동 외팔파이프가 끝단질량을 갖고 회전하는 공학적 예는 산업용 로봇 매니플레이터 등을 비롯하여 많이 존재한다.

이러한 복합 계의 경우에 각 요소들의 연성관계가 전체 계의 진동특성에 미치는 영향을 해석하는 것이 이 연구의 목적이다. 따라서 이 연구에서는 점성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 회전 외팔파이프의 끝단에 집중 중동력이 작용하는 계를 고려하였으며, 수치해석을 통하여 외팔파이프 끝단의 축방향 및 횡방향 고유진동수에 미치는 끝단질량의 영향을 고찰하였다. 또 이송유체의 속도 및 외팔파이프의 회전각속도가 각 방향의 고유진동수에 미치는 영향을 연구함으로써 계를 구성하는 각 설계 변수들의 상호 연성관계를 제시하였다. 계의 운동방정식은 가정모드법과 Lagrange 방정식으로 유도하였으며, 복합변형변수를 이용한 선형모델링 방법을 사용하였다.

## 2. 시스템 모델링

Fig. 1 은 이 연구에서 해석 예제로 사용한 반

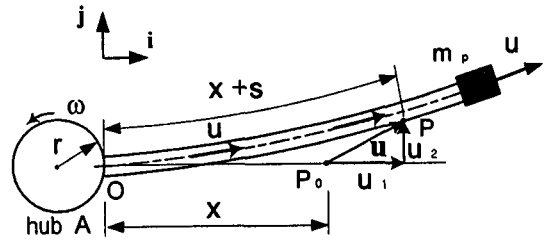


Fig. 1 Schematic diagram of a rotating cantilever pipe conveying fluid with a tip mass

경  $r$ 의 회전축에 고정되어 회전운동을 하는 이송유체와 끝단질량을 갖는 유연 외팔파이프를 모델링한 것이다. 중력의 영향과 끝단질량의 관성모멘트는 고려하지 않았으며, 파이프의 해석은 오일러-베르누이 보이론을 적용하였다. Fig. 1에서  $x$ 는 파이프의 고정점  $O$ 로부터 변형전 임의 질점  $P_0$ 까지의 거리를 의미하며,  $s$ 는 변형전 임의 질점  $P_0$ 에서 변형 후의 질점  $P$ 까지 변형할 때 파이프가 인장된 길이를 나타낸다. 또  $u$ 는 임의 질점의 탄성변위 벡터를 의미한다.  $u$ 와  $m_p$ 는 각각 유체의 속도와 외팔파이프의 끝단질량이다. 외팔파이프의 회전 운동중에 생기는 축(인장)방향 및 횡방향의 탄성변형은 가정모드법(assumed mode method)을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$s(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (1)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (2)$$

여기서  $\phi_{1i}(x)$ ,  $\phi_{2i}(x)$ 는 각각 축(인장)방향과 횡방향의 가정모드 함수를 의미하며,  $q_{1i}(t)$ ,  $q_{2i}(t)$ 는 일반화 좌표, 그리고  $\mu$ 는 일반화 좌표의 수를 각각 나타낸다. 가정모드 함수는 한쪽 단이 고정되고 자유 단에 끝단질량이 부착된 외팔보인 경우 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi_{1i}(x) = \sin\left(\frac{\lambda_{ai}x}{L}\right) \quad (3)$$

$$\phi_{2i}(x) = \cos(\lambda_i x) - \cosh(\lambda_i x) - \beta_i [\sin(\lambda_i x) - \sinh(\lambda_i x)] \quad (4)$$

식 (3)에서  $L$  은 외팔 파이프의 길이를 의미하며, 식 (4)의  $\beta_i$  는 다음 식으로 주어진다.

$$\beta_i = \frac{\cos(\lambda_i L) + \cosh(\lambda_i L)}{\sin(\lambda_i L) + \sinh(\lambda_i L)} \quad (5)$$

식 (3)-(5)에서  $\lambda_{ai}$  와  $\lambda_i$  는 다음 식에서 각각 구할 수 있다.

$$\cot(\lambda_{ai}) = \frac{m_p}{mL}(\lambda_{ai}) \quad (6)$$

$$\frac{1 + \cos(\lambda_i L)\cosh(\lambda_i L)}{\sin(\lambda_i L)\cos(\lambda_i L) + \cos(\lambda_i L)\sinh(\lambda_i L)} = \frac{m_p}{mL}(\lambda_i L) \quad (7)$$

여기서  $m$  은 외팔 파이프의 단위길이당 질량을 나타낸다.

### 2.1 회전 외팔 파이프의 에너지식

변형에 따른 파이프의 임의 질점  $P$  의 속도는 다음식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{p/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} + \mathbf{u}) \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{v}_O$  는  $O$  점의 속도,  $\mathbf{v}_{p/A}$  는  $A$  점에 대한  $P$  점의 상대속도, 그리고  $\boldsymbol{\omega}$  는 축의 회전각속도 벡터를 각각 나타내고 있다. 식 (8)의 각 항들은 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_O &= r\boldsymbol{\omega}\mathbf{j}, & \mathbf{v}_{p/A} &= \dot{u}_1\mathbf{i} + \dot{u}_2\mathbf{j}, \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega\mathbf{k}, & \mathbf{x} &= x\mathbf{i}, & \mathbf{u} &= u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $(\cdot)$  는 시간  $t$  에 대한 미분을 나타낸다. 따라서 식 (8)은 다음과 같다.

$$\mathbf{v}_p = (\dot{u}_1 - \omega u_2)\mathbf{i} + (r\omega + \dot{u}_2 + \omega x + \omega u_1)\mathbf{j} \quad (10)$$

$u_1$  대신 인장방향 변위  $s$  를 사용하기 위하여  $u_1$  과  $s$  사이의 관계를 다음의 기하학적 제한조건에 의하여 결정할 수 있다.

$$s \approx u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (11)$$

따라서 외팔 파이프의 운동에너지와 포텐셜 에너지를 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_p = \frac{1}{2} m \int_0^L (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p) dx + \frac{1}{2} m_p (\mathbf{v}_p|_{x=L})^2 \quad (12)$$

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA_p \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EI \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (13)$$

여기서  $E$  는 영계수,  $I$  는 2 차 면적모멘트, 그리고  $A_p$  는 외팔 파이프의 단면적을 각각 나타낸다.

### 2.2 유동유체에 의한 에너지식

파이프에 대한 유체의 상대속도를  $u$  라고 하면, 유체의 절대속도에는 파이프의 운동이 포함되어야 한다. 따라서 이송유체의 절대속도의 수직성분, 즉 외팔 파이프의 횡방향 성분은  $(r\omega + \dot{u}_2 + \omega x + \omega u_1) + u \frac{\partial u_2}{\partial x}$  이고, 축방향에 평행한 수평성분은  $\dot{u}_1 - u_2\omega + u \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)$  이다.<sup>12</sup> 따라서 유속의 합을 구하면

$$\begin{aligned} v_f &= \left[ \left\{ (r\omega + \dot{u}_2 + \omega x + \omega u_1) + u \frac{\partial u_2}{\partial x} \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (\dot{u}_1 - u_2\omega) + u \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right\}^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

이 된다. 식 (14)의 유체의 속도를 이용하여 유동 유체의 운동에너지를 구하면 다음과 같다.

$$T_f = \frac{1}{2} m_f \int_0^L (v_f v_f) dx \quad (15)$$

여기서  $m_f$  는 유동유체의 단위길이당 질량이다.

이 연구에서 고려한 이송유체는 점성을 무시한 이상유체라 가정하였다. 즉, 파이프 회전의 영향으로 인한 유체의 2 차 유동과 그로 인한 에너지 손실은 고려하지 않았다. 일반적으로 점성이

없거나 점성이 매우 작은 이송유체를 갖는 파이프에서는 유체의 분사력에 의하여 파이프 끝단에 집중접선중동력이 작용하며, 이러한 집중중동력에 의한 일은 그 보존력성분에 의한 일과 비보존력성분에 의한 일로 구분된다. 먼저 집중접선중동력의 보존력 성분에 의한 일은

$$W_c = \frac{1}{2} m_f u^2 \int_0^L \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (16)$$

이고, 비보존력 성분에 의한 일은 유체의 분사력과 코리올리력의 조합에 의하여 다음과 같이 표현되어 질 수 있다.<sup>16</sup>

$$\delta W_{nc} = -m_f u \left( u \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dot{u}_2 \right) \delta u_2 \Big|_{x=L} \quad (17)$$

### 2.3 계의 운동방정식

계의 운동방정식을 유도하기 위하여 식 (12)-(17)의 일과 에너지 식을 다음의 Lagrange 방정식에 대입하여 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_a}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L_a}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (18)$$

여기서  $L_a$  는 Lagrangian 으로서 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$L_a = (T_p + T_f - V_p) + W_c + \delta W_{nc} \quad (19)$$

식 (18)을 이용하여 구해진 계의 운동방정식을 무차원화하기 위하여 사용한 주요 무차원 매개변수는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, & \tau &= \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \\ M &= \frac{m_f}{m}, & U &= uL \sqrt{\frac{m_f}{EI}}, & M_p &= \frac{m_p}{mL}, \\ \Omega_m &= \omega L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}, & \Omega_f &= \omega L^2 \sqrt{\frac{m_f}{EI}} \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)의 무차원 매개변수를 사용한 무차원 운동방정식을 행렬을 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{P} \quad (21)$$

여기서  $(\cdot)$ 는 무차원화된 시간  $\tau$ 에 대한 미분을 나타내며, 행렬  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ , 그리고  $\mathbf{K}$ 는 각각 유체유동을 갖는 회전 외팔 파이프의 질량행렬, 감쇠행렬, 그리고 강성행렬을 각각 나타내고 있다. 또,  $\mathbf{d} = [d_{1i}(\tau) \ d_{2i}(\tau)]^T$ 이다.

식 (21)의 운동방정식을 자유진동에 대한 고유치문제를 해결하기 위하여 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\{\dot{\mathbf{\eta}}\} = [\mathbf{M}^*] \{\mathbf{\eta}\} \quad (22)$$

여기서 각 항들은 각각 다음과 같다.

$$[\mathbf{M}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\{\mathbf{\eta}\} = [\dot{\mathbf{d}} \ \mathbf{d}]^T \quad (24)$$

여기서  $\mathbf{I}$ 는 단위행렬을 의미하며, 식 (22)~(24)를 이용하여 계의 고유치를 구할 수 있다.

### 3. 수치해석 결과 및 고찰

이 연구에서는 시스템 모델링에서 유도된 무차원 운동방정식을 이용하여 끝단질량을 가진 유연한 유체유동 회전 외팔파이프의 축방향 및 횡방향 고유진동수를 수치해석을 통하여 구하였다. 즉 끝단질량의 크기와 회전각속도, 그리고 유체유동이 외팔 파이프의 각 방향 고유진동수에 미치는 영향을 수치해석을 통하여 비교, 고찰하였다. 사용한 수치해석은 Matlab(6.1)에서 4 차의 Runge-Kutta 방법으로 수행하였으며, 이 연구에서는 제 2 차 모드까지의 고유진동수 변화에 대하여 고찰하였다. 수치해석 예제에 사용한 회전 외팔 파이프의 파라미터는 Table 1에 나타내었다.

Fig. 2 와 Fig. 3 은 끝단질량이 없는 경우 유체의 속도와 외팔 파이프의 회전 각속도의 영향에

Table 1 Specifications of the rotating cantilever pipe conveying fluid

Property	Data
Length of pipe ( $L$ )	1 (m)
Out-radius of pipe ( $R_o$ )	0.025 (m)
In-radius of pipe ( $R_i$ )	0.02 (m)
Density of pipe	$2.766 \times 10^3$ (kg/m <sup>3</sup> )
Bending stiffness ( $EI$ )	8.9782 (Nm <sup>2</sup> )
Density of fluid	1000 (kg/m <sup>3</sup> )
Hub radius ( $r$ )	0.05 (m)

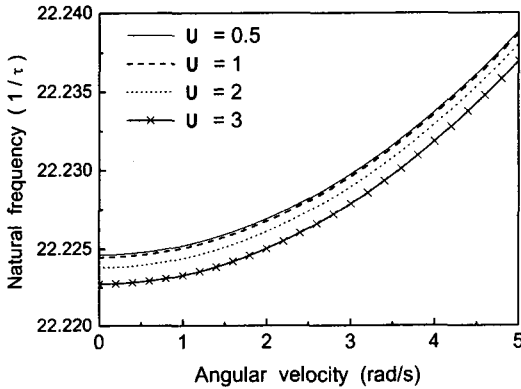


Fig. 2 (a) Natural frequency of rotating cantilever pipe according to fluid velocity in axial direction (1<sup>st</sup> mode)

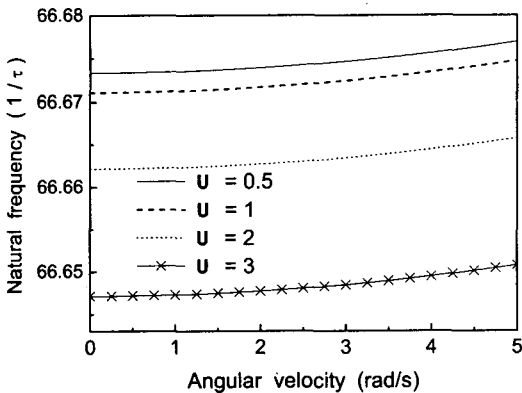


Fig. 2 (b) Natural frequency of rotating cantilever pipe according to fluid velocity in axial direction (2<sup>nd</sup> mode)

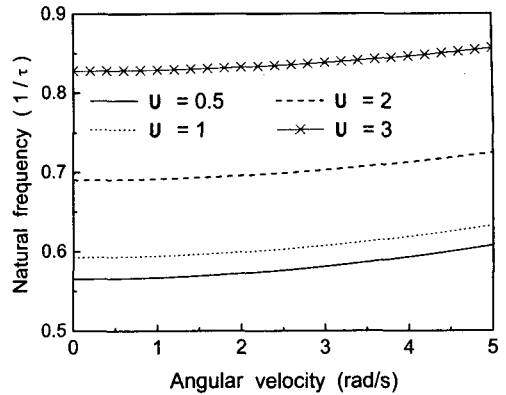


Fig. 3 (a) Natural frequency of rotating cantilever pipe according to fluid velocity in lateral direction (1<sup>st</sup> mode)

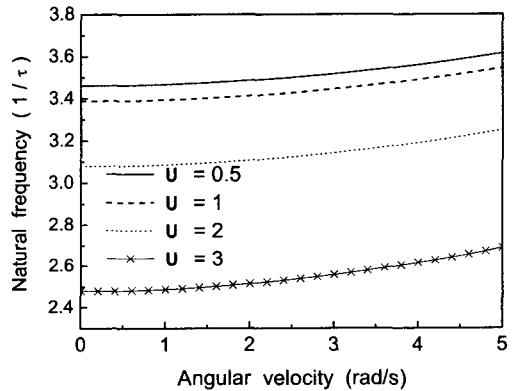


Fig. 3 (b) Natural frequency of rotating cantilever pipe according to fluid velocity in lateral direction (2<sup>nd</sup> mode)

다른 외팔 파이프의 축방향 및 횡방향의 고유진동수를 제 2 차 모드까지 각각 도시한 것이다. Fig. 2 와 Fig. 3 에서 볼 수 있는 것처럼 1, 2 차 모드에 걸쳐서 회전 각속도와 각 방향의 고유진동수는 미소하지만 서로 비례적인 경향을 보이고 있다. Fig. 2 의 외팔 파이프의 축방향 고유진동수를 살펴보면, 1, 2 차 모드에서 유속과 외팔 파이프의 고유진동수는 서로 반비례적임을 알 수 있다. 그러나 Fig. 3(b)의 2 차 모드에서는 축방향 고유진동수의 경향과 마찬가지로 유속과 외팔 파이프의 횡방향 고유진동수는 서로 반비례적인 경향을 보이고 있으나 1 차 모드에서는 고유진동수와 유속은 서로 비례적이다.

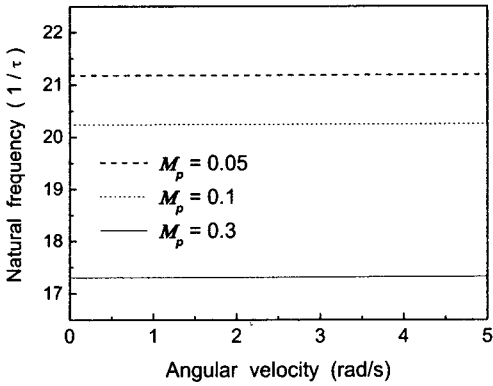


Fig. 4 (a) Natural frequency of rotating cantilever pipe according to tip mass for axial direction (1<sup>st</sup> mode,  $U = 1$ )

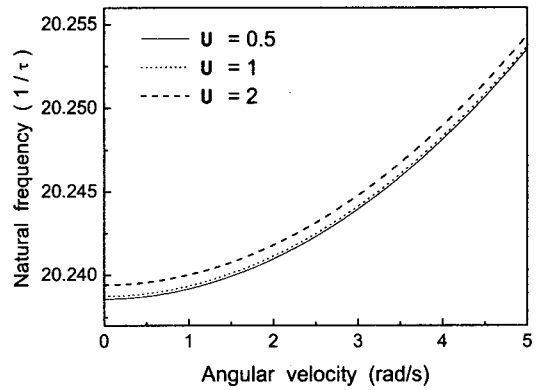


Fig. 5 (a) Natural frequency of rotating cantilever pipe according to tip mass for axial direction (1<sup>st</sup> mode,  $M_p = 0.1$ )

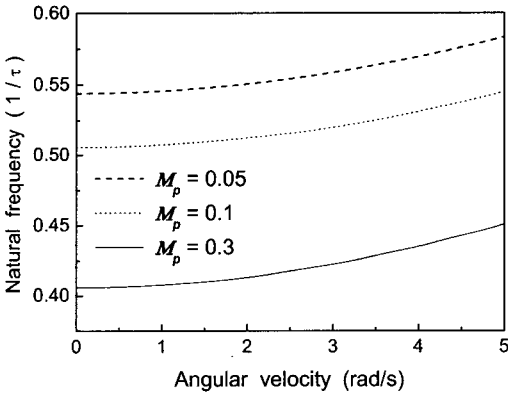


Fig. 4 (b) Natural frequency of rotating cantilever pipe according to tip mass for lateral direction (1<sup>st</sup> mode,  $U = 1$ )

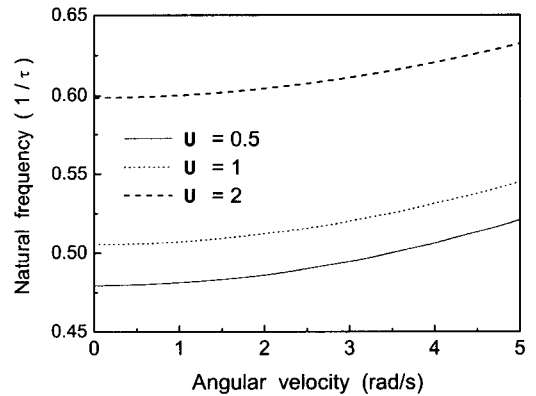


Fig. 5 (b) Natural frequency of rotating cantilever pipe according to tip mass for lateral direction (1<sup>st</sup> mode,  $M_p = 0.1$ )

1 차 모드에서 유속이 증가할수록 파이프의 고유진동수는 증가하며 2 차 모드에서는 유속이 증가할수록 파이프의 고유진동수는 작아져서 결국 어떤 유속에서 1, 2 차 고유진동수가 일치하게 된다. 이러한 현상을 이용하여 파이프의 불안정을 유발하는 임계유속을 결정할 수 있다. 즉 외팔 파이프의 1, 2 차 고유진동수가 일치하는 바로 그때의 유속이 바로 임계유속임을 판단할 수 있다.

Fig. 4 는 무차원 유속이 1 인 경우 끝단질량과 외팔 파이프의 회전 각속도의 영향에 따른 외팔 파이프의 축방향 및 횡방향의 1 차 모드 고유진동수를 나타낸 것이다. 유속이 일정한 경우, 외팔 파

이프의 축방향 및 횡방향 고유진동수는 끝단질량의 크기와 서로 반비례적이다. Fig. 4 (a)에서 외팔 파이프의 회전 각속도가 2 rad/s 일 때 끝단질량의 크기가 0.1 인 경우와 0.3 인 경우의 파이프의 고유진동수를 비교해보면 끝단질량의 크기가 0.1 인 경우에 비해 0.3 일 때 파이프의 축방향 고유진동수는 약 14.5% 정도 감소한다. 또 Fig. 4 (b)의 횡방향 고유진동수에서는 회전하지 않는 경우 끝단질량의 크기가 0.1 인 경우에 비하여 끝단질량이 0.3 인 경우 파이프의 고유진동수는 약 19.8% 정도 감소하며, 회전 각속도가 5rad/s 일 때는 약 17.3% 정도 파이프의 고유진동수가 감소한다. 끝단질량의 크

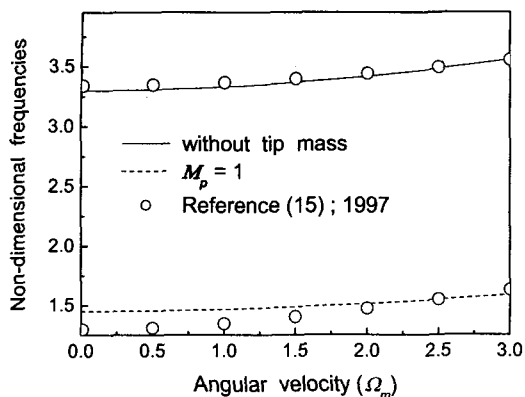


Fig. 6 Comparison of present numerical results and results in Ref.(15) : 1<sup>st</sup> mode

기가 0.1 인 경우 외팔 파이프의 회전 각속도가 5 rad/s 까지 증가하는 동안 파이프의 고유진동수는 약 7.81%정도 증가하며, 끝단질량의 크기가 0.3 일 때는 약 11.1%정도 고유진동수가 증가하는 현상을 보인다.

Fig. 5 는 무차원 끝단질량의 크기가 0.1 인 경우 유체의 속도와 외팔 파이프의 회전 각속도의 영향에 따른 외팔 파이프의 각방향의 1 차 모드 고유진동수를 표현한 것이다. 끝단질량이 존재하지 않는 경우와 마찬가지로 외팔 파이프의 축방향 고유진동수는 유속과 서로 반비례적이며, 횡방향 고유진동수는 유속과 서로 비례적인 경향을 보인다. Fig. 5 (b)에서 외팔 파이프의 회전 각속도가 2 rad/s 일 때 유체의 속도가 1 인 경우에 비해 유속이 2 일 때 파이프의 횡방향 고유진동수는 약 18.0%정도 증가함을 알 수 있다.

Fig. 6 은 유동유체를 고려하지 않은 경우에 동일한 무차원 파라미터를 적용하였을 때, 이 연구에서 사용한 방법의 결과와 해밀턴 원리를 이용한 참고문헌 (15)의 외팔 보의 횡방향 고유진동수를 서로 비교한 것이다. 끝단질량이 존재하는 경우 약간의 고유진동수 차이를 보이고 있으나 전반적으로 참고문헌의 연구결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

#### 4. 결론

끝단질량을 갖는 유체유동 외팔 파이프가 회전운동을 하는 경우에 유속, 회전 각속도, 그리고

끝단질량이 외팔 파이프의 축방향 및 횡방향 고유진동수에 미치는 영향을 수치해석 하였으며, 그 연구결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 외팔 파이프의 고유진동수와 회전 각속도는 서로 비례적이며, 끝단질량과 파이프의 축방향 및 횡방향 고유진동수는 서로 반비례적인 경향을 갖는다.

2) 외팔 파이프의 축방향 고유진동수는 횡방향 고유진동수에 비하여 매우 큰 값을 가지며, 축방향 고유진동수는 고차 모드에서, 횡방향 고유진동수는 저차 모드에서 유체의 속도에 더 큰 영향을 받는다.

3) 유속, 회전 각속도, 그리고 끝단질량의 변화에 따른 외팔 파이프의 고유진동수를 살펴보면, 같은 조건으로 각 파라미터를 변화시켰을 경우 끝단질량이 외팔 파이프의 고유진동수에 미치는 영향이 가장 크다.

4) 끝단질량이 존재하지 않는 경우에 비하여 끝단질량이 존재하는 경우에 회전 외팔 파이프의 고유진동수에 미치는 회전 각속도의 영향이 더 커진다.

#### 참고문헌

1. Ryu, B. J., Jung, S. H. and Lee, J. W., "Effects of Attached Masses on the Instability and Vibration Suppression of a Flexible Pipe Conveying Fluid," Transactions of the KSNVE, Vol. 10, No. 2, pp. 280-290, 2000.
2. Yoon, H. I. and Son, I. S., "Dynamic Characteristics of Cantilever Pipe Conveying Fluid with the Moving Mass," Transactions of the KSNVE, Vol. 12, No. 7, pp. 550-556, 2002.
3. Ashley, H. and Haviland, G., "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, pp. 229-232, 1950.
4. Benjamin, T. B., "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (I. Theory)," Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 261, pp. 457-486, 1961.
5. Benjamin, T. B., "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiments)," Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 261, pp. 487-499, 1961.

6. Southwell, R. and Gough, F., "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda, No. 766, 1921.
7. Putter, S. and Manor, H., "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 56, pp. 175-185, 1978.
8. Yoo, H. H., Kwak, J. Y. and Chung, J., "Vibration Analysis of Rotating Pre-twisted Blades with a Concentrated Mass," Journal of Sound and Vibration, Vol. 240, No. 5, pp. 891-908, 2001.
9. Yoon, H. I., Choi, C. S. and Son, I. S., "The Influence of Tip-mass on Dynamic Characteristics of Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid," Transactions of the KSME (A), Vol. 27, No. 11, pp. 1824-1830, 2003.
10. Hamdan, M. N. and Al-Bedoor, B. O., "Non-Linear Free Vibrations of a Rotating Flexible Arm," Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 5, pp. 839-853, 2001.
11. Park, J. H. and Kim, J. H., "Dynamic Analysis of Rotating Curved Beam with a Tip Mass," Journal of Sound and Vibration, Vol. 228, No. 5, pp. 1017-1034, 1999.
12. Panussis, D. A. and Dimarogonas, A. D., "Linear In-Plane and Out-of-Plane Lateral Vibrations of a Horizontally Rotating Fluid-Tube Cantilever," Journal of Fluids and Structures, Vol. 14, pp. 1-24, 2000.
13. Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 2, pp. 261-278, 1995.
14. Bhat, R., "Transverse Vibrations of a Rotating Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 105, No. 2, pp. 199-210, 1986.
15. Fung, E. H. K. and Shi, Z. X., "Vibration Frequencies of a Constrained Flexible Arm Carrying an End Mass," Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, No. 2, pp. 259-269, 1997.
16. Langthjem, M. A. and Sugiyama, Y., "Vibration and Stability Analysis of Cantilevered Two-pipe Systems Conveying Different Fluids," Journal of Fluids and Structures, Vol. 13, pp. 251-268, 1999.