

## 論文

## 강화재의 크기 및 배치에 따른 복합재의 등가 물성치 예측에 대한 연구

이재곤\*, 김진곤\*\*

## A Study on Prediction of Effective Material Properties of Composites with Fillers of Different Sizes and Arrangements

J. K. Lee\* and J. G. Kim\*\*

## ABSTRACT

The validity of Eshelby-type model with Mori-Tanaka's mean field theory to predict the effective material properties of composites have been investigated in terms of filler size and its arrangement. The 2-dimensional plate composites including constant volume fraction of fillers are used as the model composite for the analytical studies, where the filler size and its arrangement are considered as parameters. The exact effective material properties of the composites are computed by finite element analysis (FEA), which are compared with effective material properties from the Eshelby-type model. Although the fillers are periodically or randomly arranged, the average Young's moduli by Eshelby-type model and FEA are in good agreement, specially for the ratio of specimen size to filler size being smaller than 0.03. However, Poisson's ratio of the composite by the Eshelby-type model is overestimated by 20%.

## 초 록

본 연구에서는 복합재의 등가 물성치를 예측하는 방법중 하나인 Mori-Tanaka의 평균장이론이 결합된 Eshelby 이론의 적용한계에 대해 유한요소해석을 통하여 강화재의 크기와 배치 측면에서 고찰하였다. 모델 복합재로 일정 체적비의 강화재를 포함하는 2차원 평판 복합재를 사용하였으며, 강화재의 크기를 변화시키고 또한 강화재를 규칙적 및 불규칙적으로 배치하였다. 이 복합재에 유한요소해석을 적용하여 수치적으로 복합재의 등가 물성치를 구하였으며, 수치해석결과를 Eshelby 이론으로 구한 등가 물성치와 비교하였다. Eshelby 이론으로 예측되는 복합재의 등가 물성치는 시편의 크기에 비해 강화재의 크기가 0.03이하가 되면 강화재의 배치와 관계없이 유한요소해석으로 구한 복합재의 평균 영계수와는 잘 일치하나, 평균 프와송비는 약 20%의 차이를 보였다.

**Key Words** : 복합재의 등가물성치(effective material properties of composites), 유한요소해석(finite element analysis), 강화재 크기(filler size), 강화재 배치(filler arrangement), Eshelby의 등가개재물법(Eshelby's equivalent inclusion method), Mori-Tanaka의 평균장 이론(Mori-Tanaka's mean field theory)

## 1. 서론

복합재는 이를 구성하는 요소의 열기계적 물성치에 따라 다양한 물성치를 얻을 수 있는 장점이 있어, 구조물의

사용 환경이 복잡해짐에 따라 큰 관심을 끌고 있다. 요구되는 복합재의 물성치를 얻기 위해 복합재의 구성 원소의 선택과 모재에 포함되는 강화재의 형상, 크기 및 체적비를 달리하여 복합재를 설계한다. 이를 위해 복합재의 등가 물

\* 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부

\*\* 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부, 교신저자(E-mail:kimjg1@cu.ac.kr)

성치를 예측하기 위한 모델링이 필수적이다.

지금까지 복합재의 등가물성치를 예측하려는 여러 가지 시도가 있어왔다. 대표적으로 Hashin과 Shtrikman[1]은 variational approach를 사용하여 복합재의 탄성계수, 열팽창 계수, 및 열전도계수 등 열기계적 등가 물성치의 상한값과 하한값을 예측하였다. Hill[2]은 자기일치모델(self-consistent model)을 이용하여 복합재의 등가 물성치를 계산하였다. 각각의 강화재는 미지의 등가 물성치를 갖는 복합재속에 존재하는 것으로 가정하여, 반복계산법(iterative method)에 의해 등가 물성치를 계산하였다. 컴퓨터의 발달에 따라 유한 요소해석법을 사용하여 금속 모재에 강화재가 포함된 복합재의 등가 물성치와[3] 기계적 성질을 예측하였다[4,5]. 이 이론들은 모재속에 강화재가 규칙적으로 배열된 것으로 가정하고, 단위 격자에 균질화기법을 적용하여 복합재의 등가 물성치와 인장특성을 계산하였다. 비균질체의 상호 작용을 고려하는 Mori-Tanaka의 평균장 이론[6]이 결합된 Eshelby 이론[7]을 사용하여 복합재의 등가 물성치를 예측하였다 [8-11]. 이 방법은 복합재내에 존재하는 강화재의 불규칙적인 배치에 대해서도 적용이 가능한 것으로 알려져 있고, 또한 계산이 편리하여 여러 종류의 복합재의 등가물성치를 예측하기 위해 사용되어왔다. Tandon 과 Weng[9]은 임의로 배치된(randomly oriented) 타원체(ellipsoidal inclusions)를 포함하는 복합재의 등가물성치를 여러 장단비(aspect ratio)에 대해 Eshelby 이론으로 예측하였지만, 강화재의 크기효과는 이 이론으로 규명할 수 없으며, 단순히 강화재의 크기는 시편보다 충분히 작아야한다고 밝혔다. 이와 같이 복합재에 포함되는 강화재의 크기, 배치, 형상, 및 체적비 등에 관해서 이 이론의 적용한계에 대한 연구는 전무한 실정이다.

본 연구에서는 일정한 체적비의 강화재를 포함하는 2차원 평판 복합재의 등가 물성치를 Mori-Tanaka의 평균장이론이 결합된 Eshelby 이론으로 예측하고[6, 7], 동시에 이를 유한요소해석 결과와 비교하여 2차원 평판문제에서 Eshelby 이론의 타당성을 검증하고자 한다. 해석에 사용된 강화재로는 알루미늄 평판에 포함된 SiC가 사용되었다. 강화재의 체적비를 일정하게 유지하면서, 이의 크기를 변화시켜 Eshelby 이론을 적용할 수 있는 강화재의 크기를 제시한다. 또한, 동일한 크기의 강화재가 규칙적 및 불규칙적으로 배치된 복합재의 등가 물성치를 비교함으로써, 강화재의 배치와 크기에 따른 Eshelby 이론의 적용 범위를 규명한다.

## 2. Eshelby 이론을 사용한 등가 물성치 계산

Mori-Tanaka의 평균장 이론을 결합한 Eshelby 이론을 사용하여 복합재의 등가 물성치를 예측한다[6, 7]. 복합재가 외부의 인가 응력을 받을 때 Fig. 1 (a)는 원래의 문제이고, Fig. 1 (b)는 원래의 문제를 Eshelby의 등가 개재물법을 사용

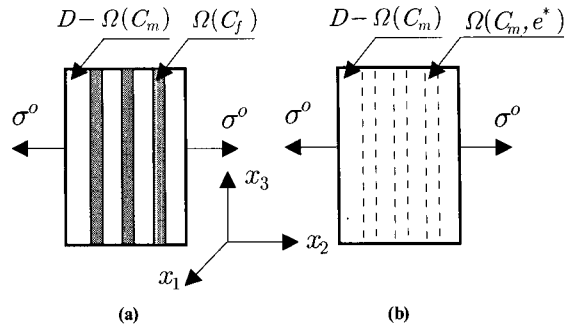


Fig. 1 An analytical model for 2-dimensional composite plates to compute stresses and strains in both the matrix and the fiber. (a) The original problem, (b) Eshelby's equivalent inclusion problem.

하여 변환한 것이다. 본 연구에 적용되는 모델 복합재는 Fig. 1과 같이 강화재가 2차원 평판에 규칙적 및 불규칙적으로 배치된 것이다. 강화재는  $x_3$  방향으로 배치된 원기둥 형태의 SiC이다.

Eshelby의 등가개재물법이 적용된 Fig. 1(b)로부터 강화재의 응력( $\sigma_f$ )과 모재내의 응력( $\sigma_m$ )은 각각 다음 식으로 표시된다.

$$\sigma_f = C_f(e_o + \bar{e}) = C_m(e_o + \bar{e} + e - e^*) \quad (1)$$

$$\sigma_m = C_m(e_o + \bar{e}) \quad (2)$$

여기서 아래첨자  $m$  및  $f$  는 모재와 강화재를 나타낸다. 그리고  $C$ 는 강성텐서,  $e_o$ 는 강화재가 없을 경우 인가 하중  $\sigma^o$ 에 의해 발생하는 모재의 균일 변형률장(uniform strain field)으로  $\sigma^o = C_m e_o$ 의 관계를 갖는다.  $\bar{e}$ 는 모재 영역의 강화재에 의한 평균 교란 변형률(average of disturbance strain),  $e$ 는 강화재 내의 교란 변형률,  $e^*$ 는 Eshelby의 등가 개재물법에 의해 발생하는 등가 eigenstrain으로 계산될 값이다.

외부 하중의 경계조건은  $\sigma^o$ 이므로, 교란응력을 복합재 전 영역에 걸쳐 체적 적분을 하면 0이 되어야한다. 식(1)과(2)로부터

$$\bar{e} + v_f(e - e^*) = 0 \quad (3)$$

여기서  $v_f$ 는 복합재 내의 강화재의 체적비를 나타낸다. Eshelby tensor  $S$ 는 강화재의 형상과 모재의 프와송비에 의해 결정되는 것으로,  $e$ ,  $e^*$ , 그리고 Eshelby 텐서  $S$  사이에는 다음 관계가 존재한다.

$$e = Se^* \tag{4}$$

식(1)~(4)로부터

$$e^* = A[(C_m - C_f)C_m^{-1}\sigma^o] \tag{5}$$

$$A = \{ (C_f - C_m)[(1 - \nu_f)S + \nu_f I] + C_m \}^{-1} \tag{6}$$

A는 6×6 행렬을 나타내고 I는 6×6 단위행렬을 나타낸다. 모재와 강화재의 변형률을 각각  $e_m$  및  $e_f$ 라 하면 다음 식으로 표시된다.

$$e_m = e_o + \bar{e} \tag{7}$$

$$e_f = e_o + \bar{e} + e \tag{8}$$

따라서 하중 인가시 복합재의 전체 변형률은 복합재의 체적 적분에 의해 다음 식으로 표시된다.

$$e_c = (1 - \nu_f) e_m + \nu_f e_f = e_o + \nu_f e^* \tag{9}$$

복합재 전체에 작용하는 응력  $\sigma_c$  는 복합재의 등가 물성치  $C_c$  와 식(9)의 복합재의 변형률과 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\sigma_c = C_c e_c \tag{10}$$

복합재에 작용하는 외부 응력은  $\sigma^o$ 이므로, 식(9)와 식(10)로부터 복합재의 등가 물성치는 다음과 같이 표현된다.

$$C_c = C_m [I - \nu_f A (C_f - C_m)]^{-1} \tag{11}$$

### 3. 수치적 실험 방법

Fig. 2는 규칙적 및 불규칙적으로 배치된 강화재를 포함하는 복합재의 등가 물성치를 유한요소해석으로 검증하기 위한 모델을 보여주고 있다. Saint-Venant의 원리에 의하여 시편의 양단에 일정한 응력이 가해질 때 끝단 효과를 없애기 위해 검증 모델은 강화재를 포함하는 복합재보다 크게 설계하였다.

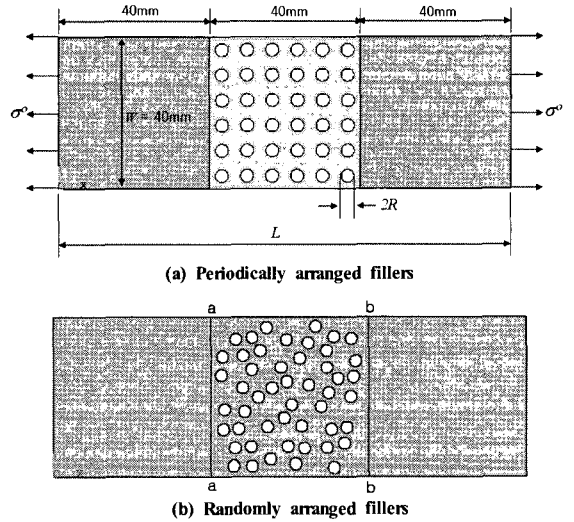


Fig. 2 Models of 2-dimensional composite plates with fillers of different numbers and arrangements for a finite element analysis.

모재인 알루미늄에 포함된 강화재는 원기둥 모양의 SiC를 사용하였으며, 이의 재료상수는 Table 1에 정리하였다. 강화재의 체적비( $\nu_f$ )는 강화재의 체적을 복합재의 전체 체적으로 나눈 것으로 다음과 같이 표현된다.

$$\nu_f = \frac{\pi N R^2 t}{L W t} \tag{12}$$

여기서,  $N, R, L, W, t$ 는 각각 강화재의 수, 강화재의 반지름, 복합재의 길이, 폭 및 두께를 나타낸다. 복합재의 등가 물성치에 미치는 강화재 크기의 영향을 분석하기 위해 강화재의 체적비는 일정하게 유지시키면서, 강화재의 반지름을 변화시킨다. 이 때 강화재의 반지름은 식(12)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$R = \sqrt{\frac{\nu_f L W}{\pi N}} \tag{13}$$

또한, 강화재의 배치에 따른 복합재의 등가 물성치 변화를 파악하기 위해 Fig. 2 (a)와 같이 단위 정사각형의 중심에 강화재가 규칙적으로 배치된 평판과 Fig. 2 (b)와 같이 Matlab의 난수 발생 프로그램(random number generation)에 의해 생성된 난수를 강화재의 중심 좌표로하여 강화재가 불규칙적으로 배치된 평판들을 해석하였다[12]. 이때 불규칙적으로 생성되는 강화재가 중첩될 경우 이를 제외하였으며, 난수 생성은 동일한 강화재 개수에 대해서 각각 3차례씩 실시하였다.

Table 1 Material properties of matrix and filler for analytical studies

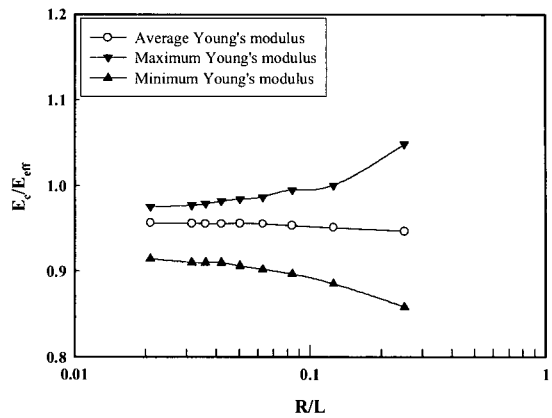
	Aluminum	SiC
Young's modulus[GPa]	70	427
Poisson's ratio	0.33	0.17
Aspect ratio	-	$\infty$
Volume fraction of filler	-	0.2
Thickness of plate[mm]	1.0	

수치실험을 위해 ANSYS의 평면응력 요소를 사용하였으며, Fig.2의 (a)모델을 사각형 요소를 사용하여 강화재의 반지름 크기에 따라서 최대 1에서 최소 0.05까지의 요소크기로 수치해석결과가 수렴할 때까지 요소를 분할하였다. 강화재가 규칙적인 배열을 가지는 경우는 대칭조건을 이용하여 전체의 1/4만 고려하였으며, 강화재가 불규칙적인 배열을 가지는 경우는 전체 모델에 대해서 해석을 수행하였다. 하중은 양쪽 끝단에 균일하게 분포하는 단위하중을 부과하였다. 규칙적 배열을 갖는 복합재에 대해서는 Fig. 2에서처럼 전체 모델의 1/3에 해당하는 가운데 부분의 a-a와 b-b 양 끝단과 두 a-b 단면에서 발생하는 변위값을 계산하였으며, 변위의 최대값, 최소값 및 평균값을 구하였다. 불규칙적인 배치의 복합재는 양 끝단에서 평균 변위를 계산하였다. 주어진 하중값과 계산된 변위값으로부터 복합재의 등가 물성치를 계산하였으며, 이를 2장의 Eshelby 이론으로 구한 등가 물성치와 비교하였다.

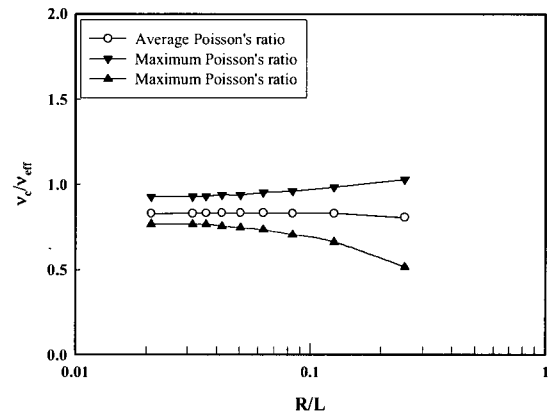
#### 4. 결과 및 토의

Fig. 3은 규칙적으로 배치된 강화재를 갖는 평판의 등가 물성치를 유한요소해석을 통하여 수치적으로 계산한 결과를 2장의 Eshelby 모델로 예측한 등가 물성치로 무차원화한 결과( $E_c/E_{eff}$ ,  $\nu_c/\nu_{eff}$ )를 보여주고 있다. 하중인가방향의 영계수는 최대값, 최소값 및 평균값을 그리고 하중인가방향과 이에 수직인 방향의 프로와송비 역시 최대값, 최소값 및 평균값을 강화재의 반지름을 평판의 길이로 나눈 값 ( $R/L$ )의 함수로 나타내었다.

Fig. 3 (a)의 결과로부터 강화재의 크기가 클 때는 평판의 등가 영계수의 최대값, 최소값 및 평균값은 편차가 크고, 크기가 감소함에 따라 등가 영계수의 최대값, 최소값 및 평균치의 편차는 급격히 감소함을 알 수 있다.  $R/L$ 이 0.03이하가 되면 이 값들은 약 7% 이내로 수렴함을 알 수 있다. 이는 강화재의 수가 적을 경우 응력집중현상에 의해 등가 영계수의 최대값 및 최소값이 차이가 많이 나지만, 강화재의 수가 증가할수록 응력집중이 완화되어 최대값 및 최소값의 차이가 줄어드는 것으로 판단된다. 또한, 강화재의 크기가 작을



(a) Effective Young's modulus as a function of filler size



(b) Effective Poisson's ratio as a function of filler size

Fig. 3 Analytical results for effective material properties of 2-dimensional composite plates with periodically arranged fillers.

수록 영계수의 평균값은 영계수의 최소값보다 최대값에 가까운 값을 갖는다. 영계수의 최소값은 국부적인 응력집중으로 발생하는 변위의 최대값에 영향을 받으므로, 강화재의 크기가 작을수록 응력집중 영역이 급격히 감소되어 영계수의 평균값은 영계수의 최대값에 가까운 값을 갖게 되는 것이다. 유한요소해석을 통하여 계산한 등가 평균 영계수와 Eshelby 이론으로 계산한 등가 영계수는 검토된 최대 강화재의 크기에서 약 5.5%의 차이를 보이고 최소 강화재의 크기에서 약 4.5%의 차이를 보인다. Eshelby 이론으로 구한 등가 영계수는 강화재의 크기에 관계없이 FEM으로 계산된 등가 평균 영계수와 약 5% 정도의 차이로 잘 일치함을 보인다. 전체적으로 Eshelby 이론은 등가 영계수를 과대 예측하고, 강화재의 크기가 작아짐에 따라 잘 예측하는 경향을 보인다.

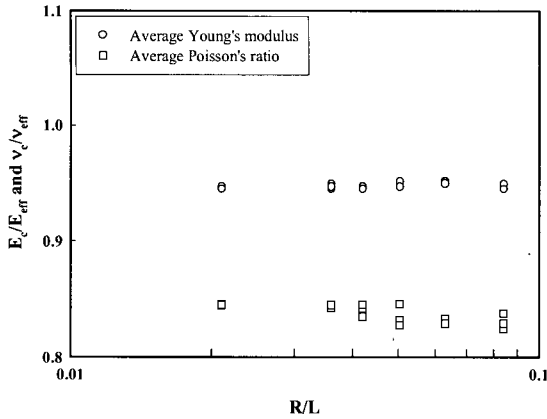


Fig. 4 Analytical results for effective material properties of 2-dimensional composite plates with randomly arranged fillers.

Fig. 3 (b)에서처럼 복합재의 등가 프와송비는 강화재의 크기에 따라 영계수와 같은 양상을 보인다. 강화재의 크기가 감소함에 따라 등가 프와송비의 최대값, 최소값 및 평균값은 수렴된다.  $R/L$ 이 0.03 이하일 때, Eshelby 이론으로 구한 등가 프와송비는 유한요소해석으로 구한 평균값보다 약 20%정도 큰 값을 갖는 것을 알 수 있다.

규칙적으로 배치된 강화재를 포함하는 복합재의 등가물성치를 Eshelby 이론으로 예측할 경우, 강화재의 크기가  $R/L$ 이 0.03이하일 경우 등가 영계수는 잘 예측되나 등가 프와송비는 약20%의 차이가 남을 알 수 있다.

Fig. 4는 강화재가 불규칙적으로 배치된 평판의 등가 평균 물성치를 FEM으로 해석한 결과를 Eshelby 이론으로 예측한 등가 물성치로 무차원화한 값을 강화재 크기의 함수로 나타낸 것이다. 각각의 강화재 크기에 대해 3회씩 난수발생 프로그램을 돌려 강화재를 불규칙적으로 배치하였다. 규칙적으로 배치된 강화재를 포함하는 평판의 등가 평균 물성치와 같이 유한요소해석을 통하여 구한 등가 평균 물성치는 강화재의 크기에 큰 영향을 받지 않으며,  $R/L$ 이 0.03 이하인 경우 등가 평균 물성치는 거의 일정한 값을 보이고 있다. 이는 Eshelby 이론으로 복합재의 등가 영계수와 등가 프와송비를 예측할 때 강화재의 크기가  $R/L$ 이 0.03 이하인 경우 잘 적용될 수 있음을 보여주고, 유한요소법으로 계산된 등가 평균 영계수와 프와송비 보다 각각 약 6%와 18% 크게 예측하였다.

Fig. 5는 강화재가 규칙적 및 불규칙적으로 배치된 평판에 대해 유한요소법으로 해석한 등가 평균 영계수와 등가 평균 프와송비를 Eshelby 이론으로 구한 등가 물성치로 무차원화한 결과를 보여주고 있다. Eshelby 이론으로 예측되는 등가 평균 물성치는 강화재가 규칙적으로 또는 불규칙적으로 배치된 어느 경우에도 배치와 관계없이 강화재의  $R/L$ 이 0.03 이하일 때 등가 물성치를 잘 예측할 수 있음을 알 수 있다.

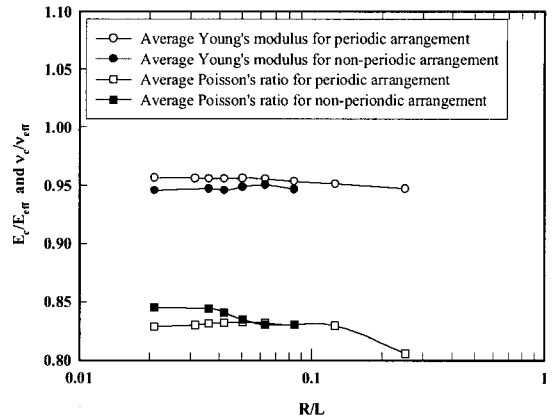


Fig. 5 Analytical results for the average effective material properties of 2-dimensional composite plates as functions of filler size and arrangement.

### 5. 결론

복합재의 등가 물성치를 예측하는 균질화기법 중 하나인 Eshelby 이론의 적용한계를 강화재의 크기와 배치측면에서 규명하였다. 20% 체적비의 강화재가 포함된 평판 복합재의 등가 물성치를 유한요소해석을 통한 수치해와 비교한 결과, 강화재의 크기와 복합재 시편의 크기의 비가 0.03 이하가 되면 Eshelby 이론으로 구한 복합재의 평균 영계수는 강화재가 규칙적 또는 불규칙적으로 배치되어도 약 6% 이내로 잘 예측하였다. 하지만, 평균 프와송비는 약 20% 정도의 오차를 갖는 것으로 나타났다. 또한, Eshelby 이론은 강화재가 불규칙적으로 배열된 복합재의 등가 물성치도 규칙적으로 배열된 복합재의 등가물성치와 거의 동등한 정밀도로 예측함을 확인할 수 있었다.

### 참고문헌

- 1) Hashin, Z. and Shtrikman, S., "A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 11, 1963, pp. 127-140.
- 2) Hill, R., "A self-consistent mechanics of composite materials," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, 1965. pp. 213-222.
- 3) 윤성호, "균질화기법과 유한요소법을 이용한 복합재료의 등가탄성계수," 한국전산구조공학회 논문집, 제13권 제1호, 2000, pp. 51-61.
- 4) Segurado, J., Gonzalez, C., and LLorca, J., "A numerical

- investigation of the effect of particle clustering on the mechanical properties of composites," *Acta Materialia*, Vol. 51, 2003, pp. 2355-2369.
- 5) Saraev, D. and Schmauder, S., "Finite element modelling of Al/SiCp metal matrix composites with particles aligned in stripes-a 2D-3D comparison," *Int. J. of Plasticity*, Vol. 19, 2003, pp. 733-747.
  - 6) Mori, T. and Tanaka, K., "Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions," *Acta Metallurgica*, Vol. 21, 1973, pp. 571-574
  - 7) Eshelby, J.D., "The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems," *Proc. of the Royal Society of London*, Vol. A241, 1957, pp. 376-396.
  - 8) Takao, Y., Chou, T.W., and Taya, M., "Effective longitudinal Young's modulus of misoriented short fiber composites," *Trans. ASME*, Vol. 49, 1982, pp. 536-40.
  - 9) Tandon, G.P. and Weng, G.J., "Average stress in the matrix and effective moduli of randomly oriented composites," *Composites Science and Technology*, Vol. 27, 1986, pp. 111-132.
  - 10) Zhao, Y.H. and Weng, G.J., "Effective elastic moduli of ribbon-reinforced composites," *Trans. ASME*, Vol. 57, 1990, pp. 158-166.
  - 11) 정현조, "방향분포를 가진 다상 금속복합재료의 탄성 및 전도 해석에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제19권 제9호, 1995, pp. 2181-2193.
  - 12) 김용수, MATLAB 입문과 활용, 서울, 2002, 높이깊이.