

## 유한 물체 거리를 갖는 2 반사경계의 곡률 선형 방정식

이정기<sup>†</sup> · 임천석

한남대학교 이과대학 광·전자물리학과  
☎ 306-791 대전광역시 대덕구 오정동 133번지

(2005년 7월 20일 받음, 2005년 9월 13일 수정본 받음)

본 연구는, 원리적인 다양한 장점에도 불구하고 현실적인 제약으로 인해 실제 설계과정에서 잘 적용되지 않는, 자이델 3차 수차를 간편하게 다룰 수 있는 방안을 제안한다. 먼저 유한 물체거리를 갖는 2 반사경계에 대해 자이델 3차의 구면수차계수를 유도한다. 여기서, 유도된 구면수차계수는 고차의 비선형 방정식으로 표현되는데, 그 구성은 설계변수(물체거리, 주경 및 부경의 곡률, 주경과 부경 사이의 거리)와 유효초점거리로 이루어진다. 해석적으로 표현된 고차의 비선형 구면수차 방정식은 컴퓨터를 이용한 수치기법에 의해 근사적인 제로조건을 만족하도록 풀려진다. 이렇게 구해진 다양한 수치 해들을 주의 깊게 통찰하면 주경과 부경의 곡률 간에 선형성이 존재함을 파악할 수 있다. 즉, 결과적으로 주경과 부경의 곡률들을 선형맞춤(linear fitting)하면 곡률선형방정식이 얻어지는데, 이의 의미는 약간의 대수적인 계산으로 최적화의 초기 입력 데이터를 손쉽게 얻을 수 있는 가능성을 제시한 것이다. 한편, 응용의 의 순수 수차론적인 관점에서 본다면, 본 연구의 특징은 유한 물체거리를 갖는 2 반사경계의 주경 및 부경의 곡률들이 구면수차가 거의 제로가 되는 조건 하에서 상호간에 선형 관계가 존재하였다는 것이다.

주제어 : Two mirror system, Seidel third order aberration, Spherical aberration, Initial design, Curvature linear equation.

### I. 서 론

최적화를 위한 초기 입력데이터를 구하는 방법 중 자이델 3차 수차를 이용하는 해석적인 접근법은, 원리적으로 볼 때는 가장 통찰적이고 체계적인 방식이지만, 설계과정에서 현실적으로는 잘 적용되지 않는다. 왜냐하면 이 방식은 복잡한 수차식들을 유도 및 정리해야하는 어려움이 있을 뿐만 아니라, 설계변수들이 상호간에 복잡하게 조합(coupling)되어 있어 고차의 비선형 방정식을 풀어야만 하기 때문이다.<sup>[1,2]</sup>

하지만 이와 같은 난점에도 불구하고, 자이델 3차 수차이론의 장점으로 인해 종종 간단한 렌즈계 또는 렌즈모듈의 초기 설계에 자이델 3차 수차이론에 의한 해석적인 접근법이 제안되어지고 있다. 이런 연구들에 있어서는 얇은 렌즈 근사와 가우스 팔호의 사용, 그리고 강력한 컴퓨터의 연산기능으로 난점들을 극복하고자 하지만, 여전히 간단한 렌즈계일지라도 해석적으로 다루는 것이 쉽지 않음을 오히려 보여주곤 한다.

한편, 굴절계에 비해 훨씬 간단한 2 반사경계의 자이델 3차 수차론에 의한 해석적인 취급은 이미 오래전에 다루어졌고, 또 광학설계 관련 전문서적에도 많이 소개되어 있다. 하지만 간단한 2 반사경계에서도 자이델 3차 수차론적인 접근은 그리 간단하지만은 않다는 것이 현실이다.

최근에 자이델 3차 수차계수를 간편하고 쉽게 효과적으로 활용 할 수 있는 방안에 대한 연구가 심도 있게 이루어져 발표된바 있는데<sup>[3]</sup>, 본 논문의 연구와 상통하는 주제로써 무한 물체 거리를 갖는 2 반사경계에 관한 것이다. 이 연구 결과

는 무한 물체거리를 갖는 2 반사경계에서 주경과 부경곡률 간에, 구면수차 또는 코마수차가 거의 제로가 되는 조건을 만족하면서, 선형성이 있다는 것이다.

본 논문은 위 연구결과에서 한발 더 나아가 유한 물체거리를 갖는 2 반사경계에 대해 주경과 부경의 곡률 간에 선형성이 있는지를 검토하였고, 결과적으로 곡률선형방정식이라고 하는 다루기 쉬운 단순한 형태의 표현식을 얻었다. 본 논문의 곡률선형방정식은 우선 자이델 3차의 구면수차가 거의 제로가 되는 조건에 한정하여 연구되었고, 이의 의미는 약간의 대수적인 계산으로 최적화의 초기 입력 데이터를 손쉽게 얻을 수 있는 가능성을 제시한 것이다.

결론적으로 본 논문의 학문적인 의미는, 이제까지 통상 진행해 오던 자이델 3차 수차를 다루는 방법과는 달리, 새로운 개념의 수차 활용법인 곡률선형방정식을 도입하였다는 것이고, 다양한 광학계에 대해서도 그 가능성을 제시한 것이라고 생각한다.

### II. 유한 물체거리를 갖는 2 반사경계에 대해 자이델 3차의 구면수차계수 유도

연속적인 여러 개의 면이 있을 때 근축광선 추적 식은 다음과 같이 주어진다.<sup>[8-11]</sup>

$$\begin{aligned} n'_i u'_i - n_i u_i &= k_i h_i \\ n'_i &= n_{i+1} \\ u'_i &= u_{i+1} \\ h_{i+1} &= h_i - d_i u'_i \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>†</sup>E-mail: azavictory@naver.com

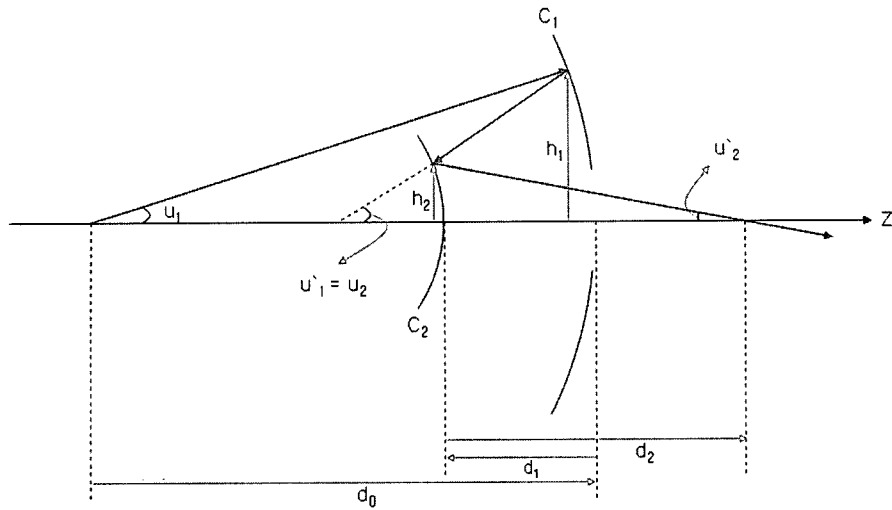


그림 1. 유한 물체거리를 갖는 2 반사경계에 대한 광선추적.

(1) 식을 사용하여 1면(주경)과 2면(부경)에 대해 광선추적을 실시하면 다음과 같이 표현되어질 수 있다.

1면(주경)에 대한 광선 추적 :

$$\begin{aligned}
 n'_1 u'_1 - n_1 u_1 &= k_1 h_1 \\
 \text{여기서,} \\
 n'_1 &= -1, \quad n_1 = 1, \quad k_1 = c_1(n'_1 - n_1) = -2c_1, \\
 u_1 &= h_1/d_0 \text{ 이다.} \\
 -u'_1 - h_1/d_0 &= -2c_1 h_1 \\
 u'_1 &= 2c_1 h_1 - h_1/d_0 \tag{2}
 \end{aligned}$$

$$h_2 = h_1 - d_1 u'_1 = h_1 - d_1(2c_1 h_1 - \frac{h_1}{d_0}) = h_1(1 - 2c_1 d_1 + \frac{d_1}{d_0}) \tag{3}$$

2면(부경)에 대한 광선 추적 :

$$\begin{aligned}
 n'_2 u'_2 - n_2 u_2 &= k_2 h_2 \\
 \text{여기서,} \\
 u_2 &= u'_1, \quad n_2 = n'_1 = -1, \quad n'_2 = 1, \quad k_2 = c_2(n'_2 - n_2) \\
 &= 2c_2 \text{ 이다.} \\
 u'_2 + u'_1 &= 2c_2 h_1(1 - 2c_1 d_1 + d_1/d_0) \\
 u'_2 &= -2c_1 h_1 + h_1/d_0 + 2c_2 h_1(1 - 2c_1 d_1 + d_1/d_0) \\
 &= -2c_1 h_1 + h_1/d_0 + 2c_2 h_1 - 4c_1 c_2 d_1 h_1 + 2c_2 h_1 d_1/d_0 \\
 &= 2h_1(c_2 - c_1 - 2c_1 c_2 d_1 + c_2 d_1/d_0) + h_1/d_0 \tag{4}
 \end{aligned}$$

(3)과 (4)식에서  $d_0 = -\infty$ 로 두면 2 반사경계의 유효초점거리(EFL)를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$EFL = \frac{n'_2}{K} = \frac{h_1}{u'_2} = \frac{1}{2(c_2 - c_1 - 2c_1 c_2 d_1)} \tag{5}$$

여기서, K는 총 굴절능이다.

앞으로 전개될 계산의 편의를 위해 식 (5)는 다음과 같이 치환한다.

$$c_2 - c_1 - 2c_1 c_2 d_1 = 1/2EFL \equiv E \tag{6}$$

$$c_2 = (E + c_1)/(1 - 2c_1 d_1) \tag{7}$$

그러면 식 (2)~(7)을 활용하여 구면수차 계수를 표현하면 다음과 같다.

구면수차 계수<sup>[13-15]</sup> :

$$S_I \equiv \sum A_i^2 h_i \Delta(\frac{u}{n})_i = A_1^2 h_1 \Delta(\frac{u}{n})_1 + A_2^2 h_2 \Delta(\frac{u}{n})_2 \tag{8}$$

여기서,  $A_i$ 는 각 면에서의 축 상의 근축광선에 대한 반사(또는 굴절)불변량이고,  $\Delta$ 는 반사전후의 변화를 의미한다.

$$A_1 \equiv n_1(c_1 h_1 - u_1) = n_1(c_1 h_1 - h_1/d_0) = h_1(c_1 - 1/d_0) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &\equiv n_2(c_2 h_2 - u_2) = -c_2 h_1(1 - 2c_1 d_1 + d_1/d_0) + (2c_1 h_1 - h_1/d_0) \\
 &= h_1(c_1 - E - c_2 d_1/d_0 - 1/d_0) \tag{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta(u/n)_1 &\equiv (u/n)'_1 - (u/n)_1 \\
 &= -2c_1 h_1 + h_1/d_0 - h_1/d_0 = -2c_1 h_1 \tag{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(u/n)_2 &\equiv (u/n)'_2 - (u/n)_2 = u'_2 + u_2 = u'_2 + u'_1 \\ &= 2h_1(c_2 - c_1 - 2c_1c_2d_1 + c_2d_1/d_0) + h_1/d_0 \\ &\quad + 2c_1h_1 - h_1/d_0 \\ &= 2h_1(c_2 - 2c_1c_2d_1 + c_2d_1/d_0) \\ &= 2h_1(E + c_1 + c_2d_1/d_0) \end{aligned} \tag{12}$$

위의 (9) ~ (12)식을 (8)식에 대입하면, 다음과 같이 구면 수차 계수의 표현식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} S_I &= h_1^2(c_1 - 1/d_0)^2 h_1(-2c_1h_1) + \\ &\quad 2h_1^2(c_1 - E - c_2d_1/d_0 - 1/d_0)^2 h_1^2(1 - 2c_1d_1 + d_1/d_0) \\ &\quad (E + c_1 + c_2d_1/d_0) \end{aligned} \tag{13}$$

또는,

$$\begin{aligned} \frac{S_I}{h_1^4} &= -2c_1(c_1 - \frac{1}{d_0})^2 + 2(c_1 - E - \frac{c_2d_1 + 1}{d_0})^2 \\ &\quad (1 - 2c_1d_1 + \frac{d_1}{d_0})(E + c_1 + \frac{c_2d_1}{d_0}) \end{aligned} \tag{14}$$

향후, 전산수치해석을 용이하게 하기 위해 식 (14)의 변수의 수를 줄이고자 하는데, 방법적으로 부경의 곡률에 대한 표현식 식 (7)을 식 (14)에 대입하면 된다.

$$\begin{aligned} \frac{S_I}{h_1^4} &= -2c_1(c_1 - \frac{1}{d_0})^2 + \\ &\quad [1 - 2c_1d_1 + \frac{d_1}{d_0}][E + c_1 + \frac{d_1}{d_0}(\frac{E + c_1}{1 - 2c_1d_1})] \end{aligned} \tag{15}$$

(15)식에서 보듯이 최종적으로 표현된 구면수차 계수는 설계변수인 물체거리( $d_0$ ), 주경의 곡률( $c_1$ ), 주경과 부경 사이의 거리( $d_1$ )와 결정상수인 유효초점거리(EFL 또는 E)로 구성되어진다.

### III. 유한물체거리를 갖는 2 반사경계에서 구면수차가 보정된 해

앞 절에서는 지루한 근축광선추적을 통하여 구면수차계수를 유도하였다. 그 이유는 구면수차계수 (1/8)이 곧 자이델 3차의 구면수차가 되므로, 구면수차 계수 SI이 거의 제로가 되는 해를 찾으면 구면수차가 보정되기 때문이다.

그러면 실제적으로 구면수차가 보정되는 해, 즉, 식 (15) = 0를 만족하는 해를 구하기 위해, 물체거리( $d_0$ )는 유효초점거리(EFL)로 두고 유효초점거리는 1로 둔 후, 주경의 곡률( $c_1$ )을 -7에서 +7까지 0.5 간격으로 변화시킨다. 주어진 각각의 주경 곡률에 대해 수치적으로 식 (15) =  $S_I/h^4 < 10^{-6}$  조건을 만족하도록 전산수치해석을 실시하면 주경과 부경 사이의

거리 $d_1$ 이 구해진다.  $d_1$ 이 구해지면 2 반사경계의 초점거리에 대한 식 (7)을 사용하여 부경의 곡률( $c_2$ )을 구한다. 이로부터 설계변수인 주경 및 부경의 곡률( $c_1, c_2$ )과 거울 사이의 거리( $d_1$ )가 모두 결정된다. 단, 설계변수인 물체거리( $d_0$ )와 결정상수인 유효초점거리는 고정된 값으로 두고 연구를 진행했다. 이전의 연구인 무한 물체거리를 갖는 2 반사경계에서는 다양한 초점거리에 따른 수치해들을 전반적으로 다루었지만, 본 연구에서는 유한 물체거리를 갖는 2 반사경계에서 주경과 부경의 곡률들 간에 선형성이 존재하는지를 검토하는 것이 우선이 되었음을 밝혀두고자 한다. 다음 표 1에 구해진 다양한 2 반사경계의 데이터들이 제시되어 있다.

표 1에서 살펴보면 주경의 곡률이 -1.5, -1.0과 +1.0인 2 반사경계의 데이터는 부경의 위치가 주경보다 뒤쪽에 있기 때문에 물리적인 적절한 해에서 제외되어야 하고, 주경의 곡률이 -0.5와 +0.5인 경우는 물체의 위치와 부경의 위치가 같은 지점에 위치하기 때문에 물리적인 적절한 해에서 제외되어야 한다. 즉, 주경의 곡률이 -1.5에서 +1.0 사이에 있는 2 반사경계의 데이터는 광학구조적인 문제로 인해 해에서 제외된다.

표 1. 유한물체거리를 갖는 2 반사경계에서 구면수차가 보정된 설계변수들의 값. (단, 물체거리는 유효초점거리로 두고 유효초점거리는 1로 두었다.)

$c_1$	$d_1$	$c_2$
-7.0	-0.0031811002	-6.80297
-6.5	-0.0035432002	-6.28971
-6.0	-0.0039633002	-5.77464
-5.5	-0.0044508002	-5.25740
-5.0	-0.0050135002	-4.73752
-4.5	-0.0056531002	-4.21442
-4.0	-0.0063527002	-3.68740
-3.5	-0.0070443002	-3.15560
-3.0	-0.0075191002	-2.61812
-2.5	-0.0071549002	-2.07420
-2.0	-0.0039666002	-1.52418
-1.5	0.0096201000	-0.97195
-1.0	0.0774621000	-0.43293
-0.5	-0.9999999400	0.00000
0.5	-1.0000000000	0.50000
1.0	1.0000000000	-1.50000
1.5	-0.3881161003	0.92407
2.0	-0.1800555003	1.45330
2.5	-0.0992381003	2.00509
3.0	-0.0614445003	2.55723
3.5	-0.0412570002	3.10366
4.0	-0.0293871002	3.64344
4.5	-0.0218876002	4.17715
5.0	-0.0168787002	4.70573
5.5	-0.0133824002	5.23010
6.0	-0.0108530002	5.75101
6.5	-0.0089683002	6.26910
7.0	-0.0075287002	6.78486

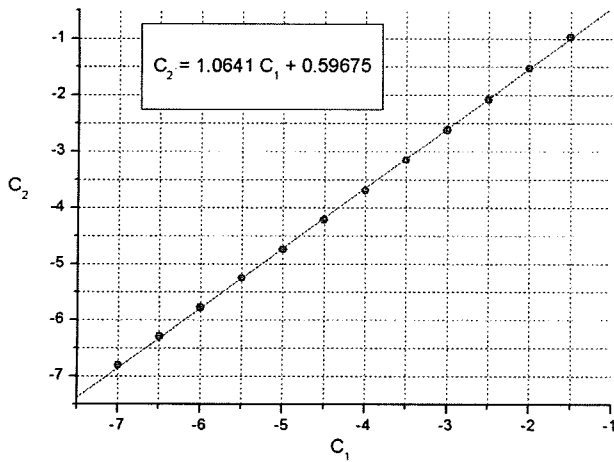


그림 2. Cassegrain 형 데이터들의 선형성.

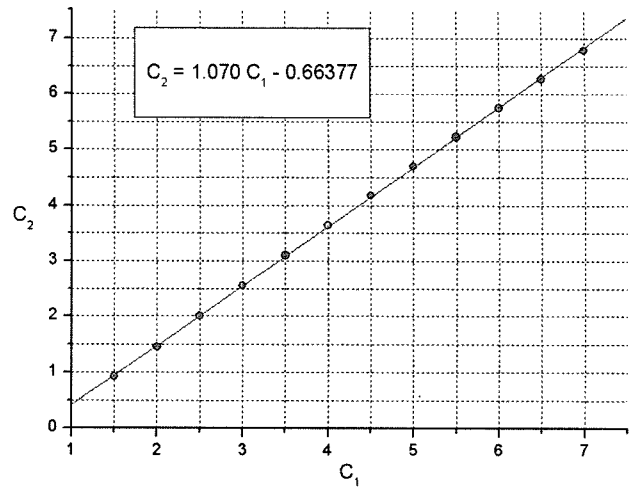


그림 3. Inverse-Cassegrain 형 데이터들의 선형성.

#### IV. 유한물체거리를 갖는 2 반사경계의 곡률선형방정식

본 연구에서 탐색하고자 하는 목표인 주경과 부경간의 선형성을 검토하기 위해 표 1에서 주어진, 구면수차가 보정된 유한 물체거리를 갖는 2 반사경계의, 데이터들을 사용하여 주경과 부경을 선형 맞춤(linear fitting) 한다. 선형맞춤은 해의 유형에 따라 두 종류의 2 반사경계에 대해 실시되는데, 광학적으로 Cassegrain 형과 Inverse-Cassegrain 형이다. 즉, 주경의 곡률이 음수인 경우에는 부경의 곡률 역시 음수가 되어 Cassegrain 형이 되고, 주경의 곡률이 양수인 경우에는 부경의 곡률 역시 양수가 되어 Inverse-Cassegrain 형이 된다.

먼저, Cassegrain 형의 데이터들에 관한 선형성을 살펴보면 그림 2와 같이 주어지는데, 시각적으로도 선형적인 경향이 확연히 드러난다.

즉, 그림 2에서 보듯이 구면수차가 보정된 유한 물체거리를 갖는 2 반사경계의 주경과 부경 간의 선형성은 곡률선형방정식이라고 명명되는 다음 식 (16)을 통해 정의된다.

$$c_2 = \alpha \cdot c_1 + \beta \tag{16}$$

여기서,  $\alpha = 1.0641$ ,  $\beta = 0.59675$ , 그리고 상관계수(correlation coefficient)<sup>[5-7]</sup>는 0.9999 이다.

식 (16)은 주경과 부경의 곡률간의 선형성을 나타내는 단순한 방정식이지만, 이제까지 진행해 온 복잡한 여러 계산과 논의를 통해 얻어진 의미 있는 결과라고 생각된다. 유한 물체거리를 갖는 2 반사경계의 구면수차를 다루는 과정은 상당한 노력과 전문적인 계산을 필요로 했지만, 그 결과적인 현상으로써의 “곡률선형방정식”은 대수적으로 취급이 간단하고 누구나 쉽게 이해할 수 있는 단순명료함을 제공한다. 설계관점에서 본다면, 이의 실용적인 의미로는 최적화의 초기입력 데이터를 약간의 대수적인 계산만으로 손쉽게 얻을

수 있다는 것이지만, 이의 응용방안에 대해서는 추후 보완연구가 필요할 것으로 생각된다.

표 2에 제시된 Inverse-Cassegrain 형의 데이터들에 관해서도 선형성을 조사하면, Cassegrain 형과 마찬가지로, 기울기  $\alpha = 1.0700$ , 절편  $\beta = -0.66377$ , 그리고 상관계수는 1에 가까운 0.9997로 주어진다. 다음 그림 3에 선형 맞춤된 데이터들을 제시한다.

#### V. 결 론

본 연구의 의의는, 복잡한 계산과 전문적인 지식을 필요로 하는 현실적인 제약으로 인해 실제 설계과정에서 잘 적용되지 않는 자이텔 3차 수차를 간편하게 다룰 수 있는, 새로운 개념의 수차 활용법인 곡률선형방정식을 유한 물체거리를 갖는 2 반사경계에 대해 확인하였다는 것이다. 또, 한발 더 나아가 반사 및 굴절의 여러 광학계에 대해서도 이와 같은 접근법에 대한 가능성을 제시한 것이라고 생각한다. 즉, 실제의 설계적인 응용을 위해서는 보완적인 연구가 좀 더 진행되어야 하겠지만, 최적화를 위한 초기 입력데이터를 구하는 방법 중 가장 통찰적이고 체계적인 자이텔 3차 수차 접근법에 대한 새로운 가능성을 제시하였다는 것에 큰 의미를 부여하고 싶다.

#### 감사의 글

본 논문은 2005년도 한남대학교 교비학술연구비로 이루어졌으며, 이에 감사합니다.

#### 참고문헌

- [1] 임천석, 기하광학(테크 미디어, 서울, 2003), Chap. 4.
- [2] 이상수, 기하광학(교학연구사, 서울, 1995), Chap. 4.
- [3] Rim Cheon Seog, "Curvature Linear Equation of a Two-

- Mirror System with an infinite Object Distance” *Journal of the Korean Physical Society*, Vol. 46, No. 2, pp. 448~454. February (2005)
- [4] 류재명, “Gaussian bracket을 이용한 반도체 부품 검사용 다중배치 현미경 광학계의 설계 및 수차분석”, pp 152~172, (2005)
- [5] 구자홍, 김진경, 박현진, 이재준, 전홍석, 최지훈, 황진수, 통계학(자유 아카데미, 서울, 1997), Chap 13.
- [6] 이용구, 통계학의 이해(울곡출판사, 서울, 2002), Chap 12.
- [7] 김태호, 심현철, 이청림(청목출판사, 서울, 2000), Chap 11.
- [8] Warren J. Smith, *Modern Optical Engineering*(Mc Graw Hill Companies, Inc., Boston, 2001), Chap. 3.
- [9] Sung Chan Park and Sang Soo Lee, *Opt.Eng.* 30, 1023, (1990)
- [10] R. Kingslad, *Lens Design Fundamentals*(Academic Press, New York, 1978), p. 322.
- [11] K. Tanaka, *Paraxial Theory in Optical Design in Terms of Gaussian Brackets, in Progress in Optics XXIII*, edited by E. Wolf(North-Holland, Amsterdam, 1986), p.63
- [12] Jong Tae Kim, Hong Jin Kong and Sang Soo Lee, *Opt. Eng.* 32, 536 (1993)
- [13] H. A. Buchdahl, *Optical Aberration Coefficients*(Oxford University Press, London, 1954)
- [14] P. Mouroulis and J. Macdonald, *Geometrical Optics and Optical Design*(Oxford University Press, New York, 1997), Chap. 8
- [15] Jurgen R. Meyer-Arendt, *Introduction to Classical and Modern Optics*(Prentice-Hall, Inc., New jersey, 1995)

## Curvature Linear Equation of a Two-Mirror System with a Finite Object Distance

Jung Gee Lee<sup>†</sup> and Cheon Seog Rim

*Department of Applied Optics and Electro-magnetics, Hannam University, Daejeon 306-791, Korea*

<sup>†</sup>*E-mail: azavictory@naver.com*

(Received July 20, 2005, Revised manuscript September 13, 2005)

In this paper, we propose easily tooling method for Seidel third order aberration, which are not well utilized in actual design process due to the complication of mathematical operation and the difficulty of understanding Seidel third order aberration theory, even though most insightful and systematic means in pre-designing for the initial data of optimization. First, using paraxial ray tracing and Seidel third order aberration theory, spherical aberration coefficient is derived for a two-mirror system with a finite object distance. The coefficient, which is expressed as a higher-order nonlinear equation, consists of design parameters(object distance, two curvatures, and inter-mirror distance) and effective focal length(EFL). Then, the expressed analytical equation is solved by using a computer with numerical analysis method. From the obtained numerical solutions satisfying the nearly zero coefficient condition( $< 10^{-6}$ ), linear fitting process offers a linear relationship called the curvature linear equation between two mirrors. Consequently, this linear equation has two worthy meanings: the equation gives a possibility to obtain initial design data for optimization easily. And the equation shows linear relationship to a two-mirror system with a finite object distance under the condition of corrected third order spherical aberration.

OCIS Codes : 080.1010, 080.3620, 220.3620, 220.1010.