

4원법과 유한요소를 이용한 유연체 동역학의 해석기법

Dynamics Analysis for Flexible Systems using Finite Elements and Algebraic Quaternions

윤 성 호†

이 동 현*

Yun, Seong-Ho

Lee, Dong-Hyun

(논문접수일 : 2004년 10월 12일 ; 심사종료일 : 2005년 5월 27일)

요 지

본 논문에서는 유연체 동역학해석을 위하여 유한회전을 표현하는데 있어, 4원법의 대수학적인 표현을 도입하여 운동방정식이 에너지보존 조건을 만족하도록 이산화된 에너지 평형식으로 정식화되었다. 여기서 사용된 유한회전의 4원법은 로드리게스 매개변수를 이용하도록 하였으며, 구속력에 대한 일이 제거되도록 하였다. 수치해석의 예를 통하여 제안된 방법이 사다리꼴 방법과 비교할 때 비선형 문제에서도 무조건적으로 안정조건을 보장함을 검증하였으며, 향후 유연한 관절로 연결된 3차원 유연다물체에 대한 동역학 해석을 확장할 수 있는 토대를 마련하였다.

핵심용어 : 유연다물체 동역학, 4원법 유한회전, 에너지보존 이론, 유연 조인트, 로드리게스 매개변수

Abstract

This paper deals with formulations of the energy equilibrium equation by an introduction of the algebraic description, quaternion, which meets conservations of system energy for the equation of motion. Then the equation is discretized to analyze the dynamics analysis of flexible multibody systems in such a way that the work done by the constrained force completely is eliminated. Meanwhile, Rodrigues parameters are used to express the finite rotation for the proposed method. This method for the initial essential step to a guarantee of developments of the 3D dynamical problem provides unconditionally stable conditions for the nonlinear problems through the numerical examples.

keywords : flexible multibody dynamics, quaternion finite rotation, energy conservation scheme, flexible joint, Rodrigues parameter

1. 서 론

비선형 유연 다물체의 동적해석은 물체에 고정된 좌표나 관성 좌표계에서 각 물체가 큰 병진운동과 회전운동을 할 때 상대적 또는 절대적으로 관측하는 것이다. 각 유연체의 변형을 관심있는 곳에서 관찰하기 위해 유한요소법을 사용하여 모델화 한다. 유연체의 거동은 물론 유연 조인트 요소들도 유한요소로 설명되어질 수 있으며, 각 노드의 위치는 관성좌표계로 표현될 수 있다. 각 요소의 단면적 회전은 동일한 관성계를 기준으로 표현된 유한 회전 텐서에 의해서 표현된다. 여러 개의 유연체들로 이루어진 구조물의

기구학적 구속들은 라그랑지 상수를 이용해 비구속의 문제로 만들 수 있다. 유연 조인트(Flexible Joint)의 거동은 수치적 강성, 비선형, 대수, 미분의 특징을 내포한 방정식에 따라 좌우된다.

일반적으로 비선형 다물체의 동적반응에 대한 신뢰성 확보를 위해서는 운동방정식의 적분과 고주파수의 수치발산(Numerical Dissipation)을 제거 할 수 있는 알고리즘을 유도하고, 해석결과가 무조건적으로 안정상태가 되는지를 보는 것이다. 사다리꼴방법으로 잘 알려진 평균가속도 방법은 선형 문제들에 적용할 때 무조건적으로 안정함(Unconditional Stability; Housholder, 1953)을 보여준다. 시

† 책임저자, 경희원·금오공과대학교 기계공학부 부교수
전화 : 054-478-7324 ; Fax : 054-478-7319
E-mail : shyun@kumoh.ac.kr

* 금오공과대학교 자동차공학과 석사과정

* 이 논문에 대한 토론을 2005년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

시스템의 안정성을 증명하는 또 다른 방법은 에너지보존법을 바탕으로 한다. 이것은 에너지 평형이론에서 정확하게 시스템의 전체에너지가 보존됨을 의미한다. 유한요소의 수가 많으면 이산화 과정에서 고주파수가 발생하고, 이로 인해 수치발산을 하게 된다(Liu 등, 2003; Antes 등, 2004; Hilber 등, 1977). 이러한 수치발산을 개선하기 위해 α -방법이 선형과 비선형문제에 대하여 성공적으로 쓰여지고 있으나, 무조건적 안정성은 선형시스템에서만 증명되었다(Simo 등, 1991). 이와 관련하여 강제동역학과 탄성동역학에 보의 문제를 에너지보존법을 이용하였다(Simo 등, 1992, 1995; Bottaso 등, 1997; Nikravesh 1998; Bauchau 등, 2001).

본 논문에서는 기존의 표현 방법과는 달리 유한회전에 의한 에너지 평형과정을 전개하기 위하여 4원법(Quaternion)(Geradin 등, 2001)을 도입하여 에너지보존 조건을 설정할 것이다. 동시에 유연체 운동방정식을 이산화하는 과정에서 로드리게스 매개변수의 특성식들을 정리하여 중간값에 사용하고 이들이 에너지보존 조건을 만족하는지를 관찰할 것이다. 이 때, 4원법을 사용하여도 총에너지보존을 만족하도록 할 것이고, 기구학적인 구속 때문에 발생하는 구속력이 수행한 일을 제거하는 방향으로 이산화가 진행되도록 할 것이다. 또한 본 논문에서는 이러한 알고리즘을 선형 및 비선형문제에 적용하여 해의 안정성을 검토할 것이다.

2. 유연체 에너지 평형 방정식

2.1 운동학적 표기법과 규약

유연체와 조인트의 운동 전후 형상은 3개의 직각좌표계를 사용함으로써 묘사 될 수 있다. 관성좌표계는 시스템의 기준좌표계로서 단위벡터 $s_I(i_1, i_2, i_3)$ 를 가진 좌표계를 사용한다. 운동 전에는 유연체에 설정된 단위벡터 $s_0(e_{01}, e_{02}, e_{03})$ 가진 좌표계로, 운동 후에는 단위벡터 $s^*(e_1, e_2, e_3)$ 를 가진 좌표계를 사용한다. 여기에서 u_0 와 u 는 각각 s_I 부터 s_0 까지의 변위를, s_0 부터 s^* 까지의 변위를 정의한다. 또한 R_0 와 R 은 각각 s_I 부터 s_0 까지의 회전텐서를, s_0 부터 s^* 까지의 회전텐서를 정의한다.

좌표계 s_I 와 s^* 에서 측정된 변위벡터를 각각 \underline{u} 와 \underline{u}^* 로 표시하면, $\underline{u}^* = R_0^T R^T \underline{u}$ 가 성립한다. 마찬가지로 회전텐서는 각각 R 과 R^* 로 표시할 수 있다. 속도 \underline{v} 를 선형속도 $\hat{\underline{v}}$ 와 각속도 $\check{\underline{v}}$ 로 식 (1)과 같이 표기한다. 또한 크기

6×6 연산자 $R_0, R, U[\cdot]$ 는 식 (2a,b,c)와 같이 정의된다. 변위벡터 \underline{u} 의 비대칭(Skew-symmetric)형렬은 $\tilde{\underline{u}}$ 로 표시한다.

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{v}} \\ \check{\underline{v}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_0 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}; U[\cdot] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [\cdot] & 0 \end{bmatrix} \quad (2a,b,c)$$

2.2 4원법과 로드리게스 매개변수

유한회전 표현법 중의 하나인 로드리게스 매개변수 $p = 2\underline{u} \tan \phi/2$ 이다(Geradin 등, 2001; Kane 등, 1983). 여기서 ϕ 는 유한회전의 크기이고, \underline{u} 는 회전축에 관한 단위벡터이다. 유한회전 ϕ 와 $\phi/2$ 에 대한 회전텐서 R 과 G 는 각각 다음과 같다.

$$R(p) = I + p_0 \tilde{p} + \frac{r_0}{2} \tilde{p} \tilde{p}$$

$$G(p) = I + \frac{\sqrt{p_0}}{2} \tilde{p} + \frac{r_0}{4(1 + \sqrt{p_0})} \tilde{p} \tilde{p} \quad (3a,b)$$

여기서 $p_0 = \cos^2 \phi/2$ 이며, p_0 와 매개변수의 3개 성분으로 구성한다. 따라서, $p_q = [p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3]$ 는 4원법 표현을 위한 새로운 벡터를 나타낸다. 이에 따른 회전텐서 R 과 G 의 추가연산자를 각각 D 와 D_G 로 다음과 같이 정의한다.

$$D(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(p) \end{bmatrix} \quad D_G(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(p) \end{bmatrix} \quad (4a,b)$$

추가연산자 D 는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$DD^T = D_G D_G^T = I_{4 \times 4} \quad D \underline{r}_q = \underline{r}_q \quad D = D_G D_G \quad (5a,b,c)$$

$$\tilde{p}_q \frac{D_G + D_G^T}{2} = \frac{D_G + D_G^T}{2} \tilde{p}_q = D_G - D_G^T \quad (6)$$

$$\left(I_{4 \times 4} + \frac{\tilde{p}_q}{2} \right)^T D_G = \left(I_{4 \times 4} + \frac{\tilde{p}_q}{2} \right) D_G^T = \left(\frac{D_G + D_G^T}{2} \right)^{-1} \quad (7)$$

D_i 와 D_j 는 각각 시간 t_i 와 t_j 에서의 추가연산자 D 를 나타낸다. 회전각의 1/2이 증분된 회전은 $D = D_G D_G$ 와 같이 두개의 같은 연산자로 나누어질 수 있다. 여기서 증분된 회전은 연산자의 변수 r_q 에 의해 표현되었다. 중간 시간 t_m 에서 연산자 D_m 은 $D_G D_i$ 로 정의된다. 다음의 관계는 유한 회전의 이산화 값을 표현한 것이다.

$$\begin{aligned} D_G &= D_m D_i^T & D_G &= D_j D_m^T \\ D &= D_f D_i^T & D_{G^*} &= D_0^T D_i^T D_m D_0 \end{aligned} \quad (8a, b, c, d)$$

$$\begin{aligned} D_{G^*} &= D_0^T D_m^T D_f D_0 \\ D^* &= D_0^T D_m^T D_f D_i^T D_m D_0 \end{aligned} \quad (9a, b)$$

추가연산자의 확장된 정의는 다음과 같다.

$$D_a = \frac{D_f + D_i}{2} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \frac{R_f + R_i}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$D_a = \begin{bmatrix} D_a & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & D_a \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} D_0 &= \begin{bmatrix} D_a & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & D_H D_G^T D_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \frac{R_f + R_i}{2} \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & H G^T R_m \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 각속도와 관련된 H 는 다음과 같다.

$$H(\underline{p}) = r_0(1 + \tilde{p}/2) \quad (13)$$

또한, 여기서 상기해야 될 점은 D 의 크기는 4×4 , D 는 8×8 이다.

2.3 운동방정식의 에너지보존식

에너지보존에 대한 운동방정식은 관성력과 탄성력에 관한 항으로 나눌 수 있다.

$$\mathbf{F}^{im} + \mathbf{F}^{em} = \mathbf{F}^{am} \quad (14)$$

여기서 \mathbf{F}^{im} 과 \mathbf{F}^{em} 은 관성력과 탄성력을 나타내며, 외력의 항은 \mathbf{F}^{am} 로 나타낸다.

식 (14)의 운동방정식을 선형 근사법을 이용하여 이산화하고, 해밀턴 정리를 이용하여 에너지의 항으로 바꾸면, 다음과 같이 에너지평형 방정식을 얻을 수 있다.

$$(\underline{v}^f - \underline{v}^i) \mathbf{M} \underline{v}^m + (\underline{\epsilon}^f - \underline{\epsilon}^i) \underline{f}^m = W^{am} \quad (15)$$

여기서 $\underline{v}^f (= \dot{\underline{u}}^f)$ 는 나중속도, $\underline{v}^i (= \dot{\underline{u}}^i)$ 는 초기속도, $\underline{\epsilon}^f$ 는 나중변형률, $\underline{\epsilon}^i$ 는 초기변형률이다. 에너지보존 원리를 이용하여 속도-변위와 힘-변형률 관계를 정의하면 다음의 식이 성립한다.

$$\underline{v}^m = \frac{\dot{\underline{u}}^f + \dot{\underline{u}}^i}{2} \quad (16a)$$

$$\underline{f}^m = \mathbf{C} \frac{\underline{\epsilon}^f + \underline{\epsilon}^i}{2} \quad (16b)$$

여기서 \mathbf{C} 는 탄성행렬이다. 식 (15)에서 일에 관한 평형방정식은 다음과 같이 된다.

$$K^f - K^i + A^f - A^i = W^a \quad (17)$$

여기서 K^f 는 변형 후, K^i 는 변형 전의 운동에너지를 나타낸다. 탄성에너지도 변형 전후 A^i 와 A^f 로 표현된다. 즉, 변형 전후의 시스템 에너지의 차이는 외력에 의한 일과 같음을 의미한다.

2.4 4원법을 적용한 에너지 평형방정식

유연체의 운동에너지 K 와 변형에너지 A 는 다음과 같이 정의된다.

$$K = \frac{1}{2} \int_V \underline{v}^T \mathbf{M}^* \underline{v}^* dV \quad (18a)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_V \underline{\epsilon}^T \mathbf{C}^* \underline{\epsilon}^* dV \quad (18b)$$

여기서 V 는 물체의 체적, \mathbf{M}^* 와 \mathbf{C}^* 는 관성 및 강성행렬, \underline{e}^* 는 변형률 벡터이다. 속도-변위, 변형-변위 관계는 다음과 같다.

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \underline{v} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \hat{\epsilon} \\ \underline{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{u}_0' + \underline{u}') - \mathbf{R} R_0^s \underline{f} \\ \underline{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (20)$$

여기서 (·)은 시간 t 에 대한 미분이고, (·)'은 공간 변수에 대한 미분이다. $\tilde{\underline{v}} = \dot{\underline{R}}\underline{R}^T$, $\tilde{\underline{e}} = \dot{\underline{R}}\underline{R}^T$, $\hat{\underline{e}}$ 는 선형변형률, $\tilde{\underline{e}}$ 는 탄성곡률이다. 해밀턴 정리를 이용하기 위해 다음의 가상속도와 가상변형률이 얻어진다.

$$\delta \underline{v}^{*T} = (\delta \underline{\dot{d}}^T - \delta \underline{d}^T \underline{U}[\tilde{\underline{u}}]) \underline{R}\underline{R}_0 \quad (21)$$

$$\delta \underline{e}^{*T} = (\delta \underline{d}'^T - \delta \underline{d}^T \underline{U}[\tilde{\underline{u}}_0 + \tilde{\underline{u}}']) \underline{R}\underline{R}_0 \quad (22)$$

$\delta \underline{d}^T = [\delta \underline{u}^T, \delta \underline{\psi}^T]$ 는 가상변위와 가상회전을 포함한 형태를 나타낸다. 가상회전은 $\tilde{\delta \underline{\psi}} = \delta \underline{R}\underline{R}^T$ 로 정의된다. 해밀턴 정리를 적용하면 식의 형태가 된다.

$$\int_{ii}^{if} \left[\int_V (\delta \underline{v}^{*T} \underline{M}^* \underline{v}^* - \delta \underline{e}^{*T} \underline{f}^* + \delta W^e) dV \right] dt = 0 \quad (23)$$

여기서 δW^e 은 외력에 의한 가상일이다. 식 (21)에 식 (19)와 (20)을 대입하고, 추가연산자 D 를 식 (4a)에서 도입하면 다음의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & (D \underline{D}_0 \underline{p}_q^*) + \underline{U}_q [\tilde{\underline{u}}] D \underline{D}_0 \underline{p}_q^* - (D \underline{D}_0 \underline{f}_q^*)' \\ & - \underline{U}_q [\tilde{\underline{u}}_0' + \tilde{\underline{u}}'] D \underline{D}_0 \underline{f}_q^* = q_q \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 \underline{p}^* 는 모멘텀, \underline{f}^* 는 탄성력이고, (·)' q 는 4원법 도입으로 인한 새로운 벡터를 나타낸다. 식 (24)는 관성력 항과 탄성력 항 두 부분으로 나눌 수 있고, 식 (14)의 형태로 이산화를 수행한다. 연산자 \underline{D}_f 와 \underline{D}_i , 그리고 \underline{D}_a 와 \underline{D}_b 는 이산화된 추가연산자로서 식 (11)과 (12)를 이용하였다.

$$\begin{aligned} & \frac{\underline{D}_f \underline{D}_0 \underline{p}_{fq}^* - \underline{D}_i \underline{D}_0 \underline{p}_{iq}^*}{\Delta t} + \underline{U}_q \left[\frac{\tilde{\underline{u}}_f - \tilde{\underline{u}}_i}{\Delta t} \right] \underline{D}_a \underline{D}_0 \frac{\underline{p}_{fq}^* + \underline{p}_{iq}^*}{2} \\ & - (\underline{D}_b \underline{D}_0 \underline{f}_{mq})' - \underline{U}_q [\tilde{\underline{u}}_0' + \tilde{\underline{u}}_m'] + \underline{D}_b \underline{D}_0 \underline{f}_{mq}^* = q_{mq} \end{aligned} \quad (25)$$

상기의 식에서 관성력에 의한 일에 증분된 병진량과 회전량을 힘의 방정식 앞에 곱하고, 유한요소 체적 V 에 대하여 적분을 다음과 같이 수행한다.

$$\begin{aligned} W_I = \int_V \left[\frac{\underline{u}_{fq} - \underline{u}_{iq}}{r_q} \right]^T \cdot \left\{ \left[\frac{\underline{D}_f \underline{D}_0 \underline{p}_{fq}^* - \underline{D}_i \underline{D}_0 \underline{p}_{iq}^*}{\Delta t} \right] \right. \\ \left. + \underline{U}_q \left[\frac{\tilde{\underline{u}}_f - \tilde{\underline{u}}_i}{\Delta t} \right] \underline{D}_a \underline{D}_0 \frac{\underline{p}_{fq}^* + \underline{p}_{iq}^*}{2} \right\} dV \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 r_q 는 증분된 회전을 표현하기 위해 사용된 로드리게스 매개변수다. 식 (7)과 (9a,b)를 이용하여 다음 식과 같이 증분된 병진과 회전으로 나뉘어 표현된다.

$$\begin{aligned} W_I = \int_V \left\{ \frac{\underline{u}_{fq} - \underline{u}_{iq}}{\Delta t} \times \underline{D}_m \underline{D}_0 \left[(D_{G^*} - \frac{\tilde{r}_q}{2} \frac{D_{G^*} + D_{G^*}^T}{2}) \hat{\underline{p}}_{fq}^* \right. \right. \\ \left. \left. - (D_{G^*} + \frac{\tilde{r}_q}{2} \frac{D_{G^*} + D_{G^*}^T}{2}) \hat{\underline{p}}_{iq}^* \right] \right. \\ \left. + \frac{r_q}{\Delta t} \underline{D}_m \underline{D}_0 (D_{G^*} \hat{\underline{p}}_{fq}^* - D_{G^*}^T \hat{\underline{p}}_{iq}^*) \right\} dV \end{aligned} \quad (27)$$

상기의 식은 4원법에 의해서 도출된 에너지식으로서 에너지보존 조건을 만족하는 평균속도 벡터 \underline{v}_{mq}^* 는 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} \underline{v}_{mq}^* &= \begin{bmatrix} D_0^T D_a^T \frac{\underline{u}_{fq} - \underline{u}_{iq}}{\Delta t} \\ D_0^T D_m^T \frac{r_q}{\Delta t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (D_a D_0)^T \frac{\underline{u}_{fq} - \underline{u}_{iq}}{\Delta t} \\ (D_m D_0)^T \frac{r_q}{\Delta t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

이산화된 관성력에 의한 일은 식 (28)의 조건을 식 (27)에 대입함으로써 아래의 형태로 된다.

$$W_I = \underline{v}_{mq}^* \underline{M}^* (\underline{v}_{fq}^* - \underline{v}_{iq}^*) \quad (29)$$

그리고 이산화된 탄성력에 의한 일은 다음 식의 형태로 표현된다.

$$\begin{aligned} W_e = \int_V \left\{ \frac{\underline{u}_{fq}' - \underline{u}_{iq}'}{r_q} \cdot \right. \\ \left. - \frac{\underline{u}_{fq} - \underline{u}_{iq}}{r_q} \underline{U}_q [\tilde{\underline{u}}_0' + \tilde{\underline{u}}_m'] \right\} \underline{D}_b \underline{D}_0 \underline{f}_{mq}^* dV \end{aligned} \quad (30)$$

탄성력에 의한 일에 추가연산자 D 를 이용해 다음 식과 같이 변형시킬 수 있다. 여기서 이산화된 추가연산자 $\underline{D}_b \underline{D}_0$ 는 식 (12)에서 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} W_e = \int_V \left\{ \hat{\underline{f}}_{mq}^* \frac{(D_{G^*} + D_{G^*}^T)}{2} \cdot \left(\underline{I} - \frac{\tilde{r}^{*q}}{2} \right) \right. \\ \left. D_0^T D_m^T (\underline{u}'_{0q} + \underline{u}'_{fq}) - \left(\underline{I} + \frac{\tilde{r}^q}{2} \right) D_0^T D_m^T (\underline{u}'_{0q} + \underline{u}'_{iq}) \right\} \\ + \hat{\underline{f}}_{mq}^* D_0^T D_m^T D_G D_H^T \underline{r}_q' dV \end{aligned} \quad (31)$$

다음 식 (32)와 식 (7)의 로드리게스 매개변수의 특성

식을 식 (31)에 대입함으로써 탄성력에 의한 일을 식 (33)과 같이 도출해 낼 수 있다.

$$(I_{4 \times 4} - \frac{\tilde{r}_q}{2})D_G = (\frac{D_G + D_G^T}{2})^{-1} \quad (32)$$

$$W_e = \int_V \{ \hat{f}_{mq}^{*T} [\hat{e}_{fq}^* - \hat{e}_{iq}^*] + \check{f}_{mq}^{*T} [\check{e}_{fq}^* - \check{e}_{iq}^*] \} dV \quad (33)$$

식 (29)와 식 (30)을 조합하면, 이산화된 운동방정식은 다음의 에너지 평형방정식으로 표현된다.

$$W_f + W_e = \int_V [v_{mq}^* M^* (v_{fq}^* - v_{iq}^*) + \check{f}_{mq}^{*T} [\check{e}_{fq}^* - \check{e}_{iq}^*]] dV = \Delta W_{mq}^a \quad (34)$$

즉, 관성력과 탄성력에 의한 일로 표현되고, 이러한 에너지 보존을 만족하기 위한 조건은 전술한 식 (16a,b)인 것과 같이 다음의 속도-변위와 힘-변형을 관계식을 만족하여야 한다.

$$v_{mq}^{*T} = \frac{v_{fq}^* + v_{iq}^*}{2} \quad (35a)$$

$$\check{f}_{mq}^* = \frac{C^* (e_{fq}^* + e_{iq}^*)}{2} \quad (35b)$$

3. 강제구속

$C=0$ 인 구속조건을 가진 시스템을 고려할 때 라그랑지 상수가 사용된다면, 이산화된 구속력에 의한 일 W^c 는 $(C^f - C^i)\lambda^m$ 이 된다. 라그랑지 상수 λ_m 은 추가적인 미지수가 되며, 비구속 문제로 변환될 때 이산화된 구속력에 의한 일은 제거되어야 한다. 즉, $\lambda^m \neq 0$ 이면, $C^f - C^i = 0$ 이 되어야 한다. 이 때, 오차누적 현상을 피하기 위해서 각 시간 단계마다 $C^f = 0$ 의 조건을 구속하면, 구속력에 의해 생기는 에너지를 제거하는 역할을 한다. 이 구속조건을 운동방정식에 포함함으로써 시스템 에너지는 보존된다.

4. 수치해석 예

본 논문에서는 3개의 예제를 가지고 4원법을 이용한 에너지보존 알고리즘과 사다리꼴 알고리즘을 비교하였다. 사용된 알고리즘을 구현하기 위하여 뉴턴의 반복법(홍준표, 1999)을 사용하였다. 첫째, 운동에너지가 $K = \dot{m}u^2/2$ 이고 변형에너지가 $A = k u^2/2$ 인 선형 스프링-질량계는 근사법을

적용해 선형화 시키고, 사다리꼴 알고리즘과 에너지 알고리즘으로 이산화 했을 때 같은 형태가 된다. 여기서, 시간간격 $h = 1.875\text{sec}$, 초기변위 $u_0 = 1.5\text{m}$, 초기속도 $v_0 = 0\text{m/s}$, 질량 $m = 1.0\text{kg}$, 스프링 상수 $k = 1.0\text{kN/m}$ 로 설정하였다. 그림 2와 그림 3은 선형 스프링-질량 문제를 사다리꼴 알고리즘과 에너지 알고리즘을 이용하여 그 응답을 나타낸 것이다. 그래프에서 볼 수 있듯이 2개의 알고리즘의 결과는 같은 형태로 되고, 시스템의 총에너지도 보존된다. 즉, 선형 시스템에서는 사다리꼴 알고리즘과 에너지 알고리즘 모두 절대적으로 안정함을 알 수 있다.

둘째, 운동에너지가 $K = \dot{m}u^2/2$ 이고 변형에너지가 $A = k u^4/2$ 인 비선형 스프링-질량계를 근사법을 적용해 선형화하고, 앞의 방법과 동일하게 사다리꼴 알고리즘과 에너지 보존 알고리즘으로 이산화하면 다음 식들과 같이 표현된다. 여기서, 시간간격 $h = 1.875\text{sec}$, 초기변위 $u_0 = 1.0\text{m}$, 초기속도 $v_0 = 0\text{m/s}$, 그리고 질량 $m = 1.0\text{kg}$, 스프링 상수 $k = 1.0\text{kN/m}$ 로 설정하였다.

에너지보존법

$$\frac{m\dot{u}_f - m\dot{u}_i}{\Delta t} + (u_f + u_i) \left(\frac{u_f^2 + u_i^2}{2} \right) = 0 \quad (36a)$$

$$\frac{u_f - u_i}{\Delta t} = \frac{\dot{u}_f + \dot{u}_i}{2} \quad (36b)$$

사다리꼴법

$$\frac{m\dot{u}_f - m\dot{u}_i}{\Delta t} + 2k \left(\frac{u_f + u_i}{2} \right)^3 = 0 \quad (37a)$$

$$\frac{u_f - u_i}{\Delta t} = \frac{\dot{u}_f + \dot{u}_i}{2} \quad (37b)$$

사다리꼴 알고리즘은 선형시스템에서 무조건적으로 안정적이지만, 비선형계에 적용될 때 안정성을 보장 할 수 없다. 그림 4는 사다리꼴 알고리즘에 대한 변위와 속도 응답을 나타낸 것이고, 그림 5는 사다리꼴 알고리즘을 이용한 비선형 스프링-질량계의 에너지 응답을 나타낸 것이다. 그림 5에서 볼 수 있듯이 에너지의 합이 발산함을 볼 수 있다. 그림 6은 비선형 스프링-질량계를 에너지 알고리즘에 적용 그 변위와 속도응답을 나타낸 그래프이다. 이 때의 변위와 속도응답은 사다리꼴 알고리즘의 응답과 유사함을 볼 수 있다. 그림 7은 에너지 알고리즘을 이용해 비선형 문제에 대한 에너지 응답을 나타낸 것이다. 총에너지 응답

은 사다리꼴 알고리즘과 달리, 무조건적으로 안정함을 알 수 있다.

셋째, 그림 1은 선형과 비선형의 성질을 동시에 가진 유연 조인트를 보여주는 그림이다. 물체 1의 운동에너지와 탄성에너지는 각각 $K_1 = m_1 \dot{u}_1^2 / 2 + J_1 \dot{\theta}_1^2 / 2$, $A_1 = k_t(u_1 - u_2)^4 / 2 + k_i(\theta_1 - \theta_2)^2 / 2$ 이다. 시간간격 $h = 0.1 \text{ sec}$, 초기변위 $u_{10} = 1.0 \text{ m}$, $u_{20} = 0.0 \text{ m}$ 초기속도 $v_{10} = 0.0 \text{ m/s}$, $v_{20} = 0.0 \text{ m/s}$ 질량 $m_1 = 1.0 \text{ kg}$, $m_2 = 2.0 \text{ kg}$, 관성모멘트 $J_1 = 10^{-3} \text{ kgm}^2$, $J_2 = 20^{-3} \text{ kgm}^2$ 선형스프링 상수 $k_t = 1.0 \text{ kN/m}$, 비틀림 스프링 상수 $k_i = 5.0 \text{ kN/rad}$ 으로 설정하였다.

에너지보존법

물체 1

$$\frac{\dot{u}_{1f} + \dot{u}_{1i}}{2} = \frac{u_{1f} - u_{1i}}{\Delta t} \quad (39a)$$

$$\frac{m\dot{u}_{1f} - m\dot{u}_{1i}}{\Delta t} + 2k_t \left\{ \left(\frac{u_{1f} + u_{1i}}{2} \right) - \left(\frac{u_{2f} + u_{2i}}{2} \right) \right\}^3 = 0 \quad (39b)$$

$$\frac{\dot{\theta}_{1f} + \dot{\theta}_{1i}}{2} = \frac{\theta_{1f} - \theta_{1i}}{\Delta t} \quad (39c)$$

$$\frac{J_1 \dot{\theta}_{1f} - J_1 \dot{\theta}_{1i}}{\Delta t} + \frac{k_i}{2} \left\{ \frac{(\theta_{1f} + \theta_{1i})}{2} - \frac{(\theta_{2f} + \theta_{2i})}{2} \right\} = 0 \quad (39d)$$

물체 2

$$\frac{\dot{u}_{2f} + \dot{u}_{2i}}{2} = \frac{u_{2f} - u_{2i}}{\Delta t} \quad (39e)$$

$$\frac{m\dot{u}_{2f} - m\dot{u}_{2i}}{\Delta t} + 2k_t \left\{ \left(\frac{u_{2f} + u_{2i}}{2} \right) - \left(\frac{u_{1f} + u_{1i}}{2} \right) \right\}^3 = 0 \quad (39f)$$

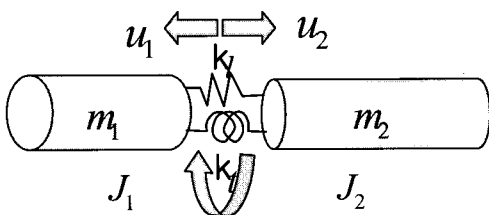


그림 1 유연 조인트 모델

$$\frac{\dot{\theta}_{2f} + \dot{\theta}_{2i}}{2} = \frac{\theta_{2f} - \theta_{2i}}{\Delta t} \quad (39g)$$

$$\frac{J_2 \dot{\theta}_{2f} - J_2 \dot{\theta}_{2i}}{\Delta t} + \frac{k_i}{2} \left\{ \frac{(\theta_{2f} + \theta_{2i})}{2} - \frac{(\theta_{1f} + \theta_{1i})}{2} \right\} = 0 \quad (39h)$$

사다리꼴법

물체 1

$$\frac{\dot{\theta}_{1f} + \dot{\theta}_{1i}}{2} = \frac{\theta_{1f} - \theta_{1i}}{\Delta t} \quad (40a)$$

$$\frac{J_1 \dot{\theta}_{1f} - J_1 \dot{\theta}_{1i}}{\Delta t} + \frac{k_t}{2} \{ (\theta_{1f} + \theta_{1i}) - (\theta_{2f} + \theta_{2i}) \} = 0 \quad (40b)$$

물체 2

$$\frac{\dot{u}_{2f} + \dot{u}_{2i}}{2} = \frac{u_{2f} - u_{2i}}{\Delta t} \quad (40c)$$

$$\frac{m\dot{u}_{2f} - m\dot{u}_{2i}}{\Delta t} + 2k_t \left\{ \left(\frac{u_{2f} + u_{2i}}{2} \right) - \left(\frac{u_{1f} + u_{1i}}{2} \right) \right\}^3 = 0 \quad (40d)$$

$$\frac{\dot{\theta}_{2f} + \dot{\theta}_{2i}}{2} = \frac{\theta_{2f} - \theta_{2i}}{\Delta t} \quad (40e)$$

$$\frac{J_2 \dot{\theta}_{2f} - J_2 \dot{\theta}_{2i}}{\Delta t} + \frac{k_i}{2} \{ (\theta_{2f} + \theta_{2i}) - (\theta_{1f} + \theta_{1i}) \} = 0 \quad (40f)$$

그림 8과 11은 유연조인트의 변위를 에너지보존법과 사다리꼴법으로 구한 것이다. 사다리꼴법으로부터 구한 변위는 시간이 지남에 따라서 발산함을 보여주고 있으나, 에너지보존법으로부터 구한 변위는 안정된 값을 유지하고 있다. 그림 9와 12은 유연조인트의 속도를 나타내는데 변위에서 관찰한 것과 유사한 거동을 하고 있음을 알 수 있다.

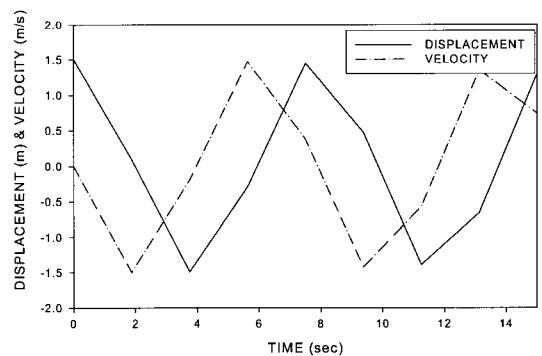


그림 2 선형 스프링-질량계의 에너지보존법과 사다리꼴법에 의한 변위와 속도 응답

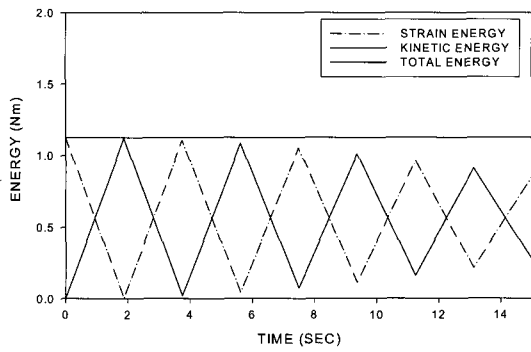


그림 3 선형 스프링-질량계의 에너지보존법과 사다리꼴법에 의한 에너지 응답

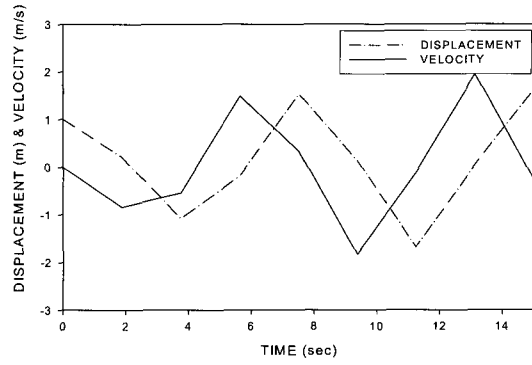


그림 4 비선형 스프링-질량계의 사다리꼴법에 의한 변위와 속도 응답

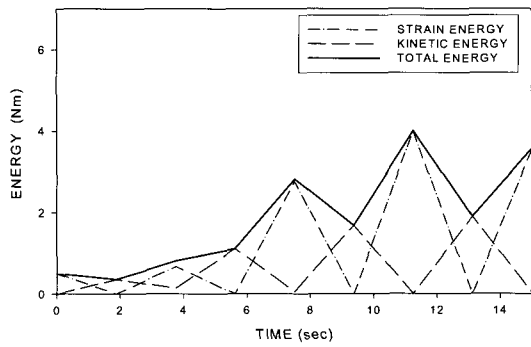


그림 5 비선형 스프링-질량계의 사다리꼴법에 의한 에너지 응답

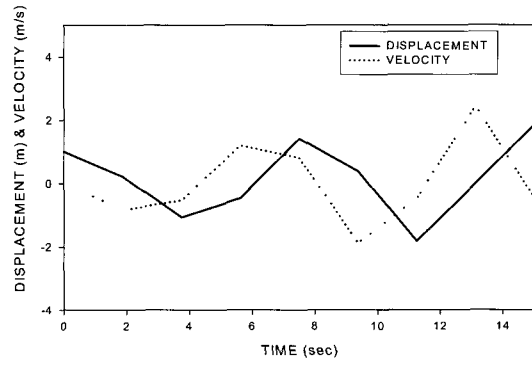


그림 6 비선형 스프링-질량계의 에너지보존법에 의한 변위와 속도 응답

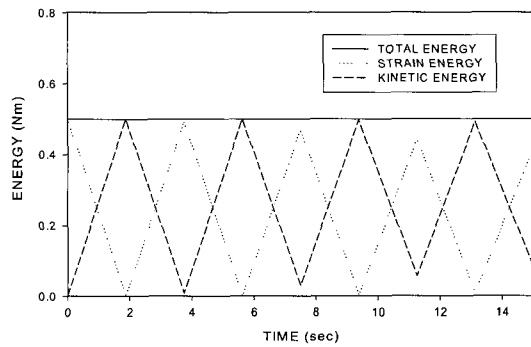


그림 7 비선형 스프링-질량계의 에너지보존법에 의한 에너지 응답

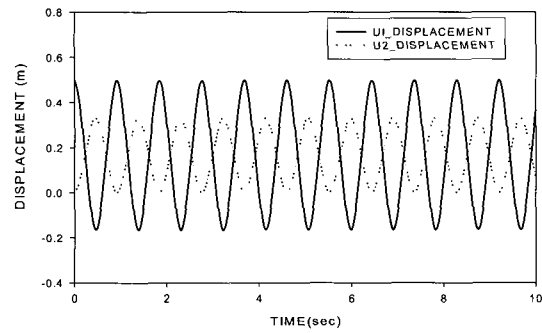


그림 8 유연조인트의 에너지보존법에 의한 변위응답

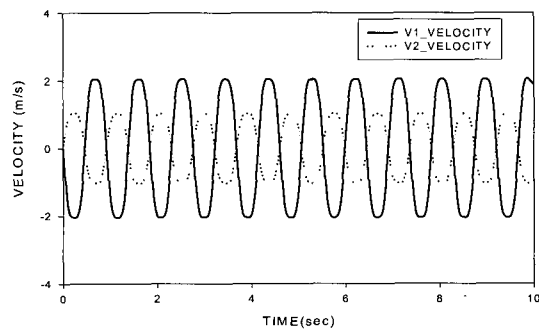


그림 9 유연조인트의 에너지보존법에 의한 속도응답

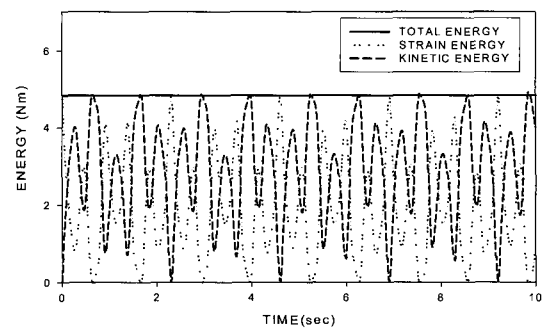


그림 10 유연조인트의 에너지보존법에 의한 에너지 응답

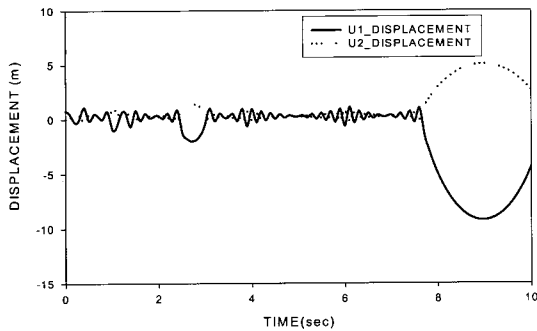


그림 11 유연조인트의 사다리꼴법에 의한 변위응답

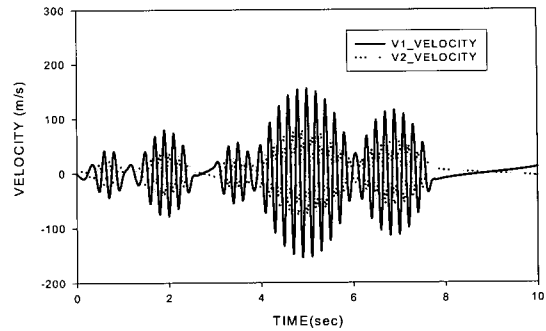


그림 12 유연조인트의 사다리꼴법에 의한 속도응답

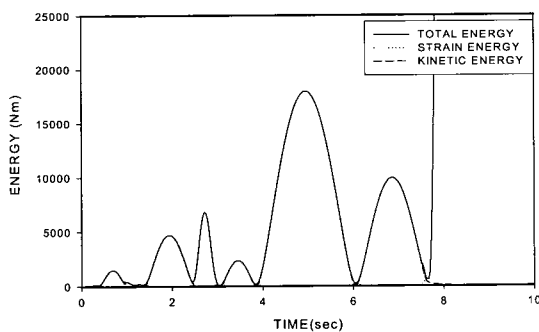


그림 13 유연조인트의 사다리꼴법에 의한 에너지 응답

이에 따른 다른 에너지의 변화를 그림 10과 13에 보여 주고 있으며, 사다리꼴법에서는 예상한 것처럼 총에너지가 발산함을 알 수 있다. 반면에 에너지보존법에 의해서 총에너지응답은 무조건적으로 보존됨을 관찰할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 유연체 동역학 해석을 위하여 유한회전을 표현하는데 있어 4원법의 대수학적인 표현을 사용하였다. 운동방정식을 에너지보존 조건이 만족되는 이산화된 에너지 평형식으로 정식화하였으며, 수치해석의 예를 통하여 제안된 방법이 비선형 문제에서도 무조건적인 안정조건을 검증하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

- 1) 유연체에 대한 운동방정식을 이산화 하는 과정에서 로드리게스 매개변수를 4원법의 대수학적 표현을 도입하여 유한회전에 사용하였다. 이 때, 구속운동 조건을 결합하여 구속력에 대한 일이 완전히 제거되도록 이산화 하였다.
- 2) 선형 및 비선형 스프링-질량계와 유연조인트 예제를 4원법에 의해 도출된 에너지보존 방법에 적용하여 기존의 사다리꼴 방법과 비교하였다. 에너지보존 알고리즘

은 비선형 문제에서도 무조건적으로 안정함을 확인 할 수 있었다.

- 3) 제안된 유연조인트에 대한 정식화를 통하여 수치해석의 안정성을 확보함으로써 유연한 관절로 연결된 3차원 유연다물체에 대한 해석으로 확장할 수 있는 토대가 마련되었다.

후 기

이 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2003-003-D00014).

참 고 문 헌

- 홍준표(1999) *C 및 FORTRAN에 의한 컴퓨터 수치 해석*, 문운당, p.458
- Antes, H., Shanz, M., Alvermann, S.(2004) Dynamic Analyses of Plane Frames by Integral Equations for Bars and Timoshenko Beams, *Journal of Sound and Vibration*, 276, pp.807~836
- Bauchau, O.A., Bottasso, C.L., Nikishkov Y.G. (2001) Modeling Rotorcraft Dynamics with Finite Element Multibody Procedures, *Mathematical and Computer Modeling*, 33, pp.1113~1137
- Bottasso, C.L., Borri M.(1997) Energy Preserving /Decaying Schemes for Nonlinear Beam Dynamics Using the Helicoidal Approximation, *Computer Mechanics in Applied Mechanics and Engineering*, 143, pp.393~415
- Geradin, M., Cardona A.(2001) *Flexible Multibody Dynamics*, John Wiley & Sons Ltd., p.327
- Hilber, H.M., Hughes, T.J.R., Taylor, R.L.(1977)

- Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5, pp.282~292
- Householder, A.S.**(1953) *Principles of Numerical Analysis*, McGraw-Hill, Inc., p.274
- Liu, J.Y., Hong, J.Z.**(2003) Geometric Stiffening of Flexible Link System with Large Overall Motion, *Computers & Structures*, 81, pp.2829~2841
- Kane T.R., Likins P.W., Levinson D.A.**(1983) *Spacecraft Dynamics*, McGraw-Hill Co., p.436
- Nikravesh, P.E.**(1988) *Computer-aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice-Hall, New Jersey, p.370
- Simo, J.C., Wong, K.**(1991) Unconditionally Stable Algorithms for Rigid Body Dynamics that Exactly Preserve Energy and Momentum, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3, pp.19~52
- Simo, J.C., Tarnow, N.**(1992) The Discrete Energy-momentum Conserving Algorithms for Nonlinear Dynamics, *ZAMP*, 43, pp.757~792
- Simo, J.C., Tarnow, N., Doblare, M.**(1995) Non-linear Dynamics of Three-dimensional Rods: Exact Energy and Momentum Conserving Algorithms, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 38, pp.1431~1473