

## 개폐균열이 존재하는 유연 회전체의 진동해석

### Vibration Analysis of Flexible Rotor Having a Breathing Crack

전 오 성†

Oh Sung Jun

(2005년 4월 14일 접수 : 2005년 9월 23일 심사완료)

**Key Words** : Cracked rotor(균열 회전체), Transverse Crack(횡방향 균열), Unbalance(불평형 질량), Additional Slope(추가 기울기), Stress Intensity Factor(응력집중계수)

#### ABSTRACT

The dynamic response due to the unbalance and crack and the quasi-static response due to gravity are analytically derived based on the complex transfer matrix. The additional slope is expressed as function of the bending moment at crack position based on the fracture mechanics concept, and inversely the bending moment is expressed as function of the additional slope at the crack position. At each angle step during the shaft revolution, the additional slope and bending moment are calculated by an iterativemethod. The transient behavior is considered by introducing Fourier series expansion concept for the additional slope. Simulation is carried out for a simple rotor similar to those available in the literature and comparison of the basic crack behavior is shown. Using the additional slope, the cracked rotor behavior is explained with the crack depth increased: the magnitude of the additional slope increases and the closed crack duration during a revolution decreases as the crack depth increases. The direction of unbalance is also shown as a factor to affect the crack breathing. Whirl orbits are shown near the sub-critical speed ranges of the rotor.

#### 1. 서 론

수평 회전체에 존재하는 횡방향 균열은 중력의 영향으로 인하여 축이 회전하면서 개폐를 반복한다. 이렇게 반복되는 균열의 개폐 운동은 균열선단에 피로 응력을 일으켜 균열 진전의 원인이 된다. 이러한 균열은 큰 사고를 일으킬 위험을 낳는다.

균열은 직접적으로 강성에 영향을 미치며, 시스템의 강성이 비선형 특성을 갖게 한다. Dimarogonas와 Paipetis<sup>(1~3)</sup>는 균열에 대한 국부 컴플라이언스를 계산하였으며, 이들이 사용한 모형과 교차 강성의 개념

을 이용하여 Jun 등<sup>(4)</sup>은 균열의 개폐를 설명하였다. 그러나 질량, 감쇠, 스프링의 요소로 구성된 단순한 모형으로 제한되었다.

전달행렬 방법(transfer matrix method)<sup>(5~7)</sup>을 통하여 정확한 운동방정식으로부터 직접 변형 곡선을 구해서 사용할 수 있다면, 경계조건과 함께 연립방정식을 푸는 방법이기에 때문에 정확한 해를 얻을 수 있게 된다.

Jun<sup>(8)</sup>은 탄성회전체에 대하여 복소수전달행렬법(complex transfer matrix method)을 제안하고, 양단에 탄성 베어링이 있는 일반적 회전체에 이를 적용하여 영향계수를 유도하였다. 이러한 방법은 임의의 위치에서의 응답을 해석적으로 풀 수 있게 하였다.

일반적으로 과거의 연구들은 균열에 의한 시간 증속 또는 응답 증속의 특성을 갖는 강성을 고려함으로써, 국부 강성의 모형화나 복잡한 비선형 운동방정식

† 책임저자 : 정희원, 전주대학교 기계자동차공학과  
E-mail : junos@jeonju.ac.kr  
Tel : (063) 220-2614, Fax : (063) 220-2056

을 푸는 문제 등에 관심을 가졌었다. 그러나 이 연구에서는 시스템의 선형 전달함수를 사용하고, 균열 위치에서의 추가 기울기(additional slope)를 자려 진동원으로 표현하여 이를 운동방정식에 함유시켰다. 균열 회전체의 진동을 시뮬레이션(simulation)하기 위하여, 응답과 균열에 의한 추가 기울기를 연성시킨 반복기법(iterative method)을 제안하였다. 균열 위치에서의 응답은 영향계수<sup>(8)</sup>를 사용하여 표현하였으며, 회전 중인 균열에서의 추가 기울기는 응답의 하나인 굽힘 모멘트로 표현하였다. 이 방법을 단순한 회전체 모형에 적용하였다.

## 2. 균열 개폐 현상의 모형화

이 연구에서는 회전체 양단에 있는 스프링의 수직 및 수평 강성 성분이 동일하다고 가정하였다. 수평회전체에 존재하는 횡방향 균열은 회전체가 회전하면서 개폐를 반복하는데, 회전체 거동은 중력에 의한 축의 정적 처짐 곡선을 중심으로 하여 균열 개폐에 따른 진동을 하게 된다. 이 정적 처짐 때문에, 균열과 불평형 질량이 공존할 때 이들의 상대적 방위각에 따라서 회전축의 회전 시 균열이 항상 닫혀있거나 항상 열려 있는 경우도 발생한다.

### 2.1 균열 개폐와 요소의 변형

중양에 균열을 갖는 보 요소는 양단에 가해지는 굽힘 모멘트에 의해 거동이 결정된다. 균열선단에서의 균열 개폐유무는, Fig.1의 회전좌표계 ( $\xi, \eta$ ) 상에서 표현된 굽힘 모멘트  $M_\xi$ 와  $M_\eta$ 에 의한 모드 I의 응력집중계수(stress intensity factor)의 부호에 따라 결정된다. 즉 균열에 의한 추가 기울기(additional slope)는, 양의 응력집중계수를 갖는 균열선단을 따라 적분함으로써 구할 수 있다.

Fig.2와 같이 두께  $dw$ 의 얇은 판 요소의 양단에

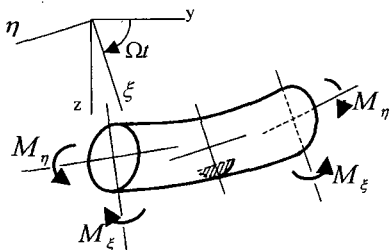


Fig. 1 Moments on a shaft having a crack

양의 굽힘 모멘트 ( $-M_\eta$ )가 작용하면 균열선단에 나타나는 응력집중계수는 아래와 같다.<sup>(9)</sup>

$$K'_{M_\eta}(w) = \sigma_1(w) \cdot \sqrt{\pi\alpha} \cdot F(\alpha/\alpha') \quad (1)$$

여기서

$$\sigma_1(w) = \frac{(-M_\eta) \cdot \alpha' / 2}{\pi D^4 / 64}$$

$$F(\alpha/\alpha') = \sqrt{\frac{2\alpha'}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2\alpha'}} \cdot \frac{0.923 + 0.199(1 - \sin \frac{\pi\alpha}{2\alpha'})^4}{\cos \frac{\pi\alpha}{2\alpha'}}$$

$$\alpha' = \sqrt{D^2 - 4w^2} \text{ 이며,}$$

$\alpha'$ 와  $\alpha$ 는 각각 얇은 판 요소의 총 넓이와 균열깊이를 나타낸다. 또  $D$ 는 보 요소의 지름을,  $w$ 는  $\xi$ 축으로부터 양의  $\eta$  방향을 따라 판 요소까지의 거리를 나타낸다.

같은 방법으로, 양의 굽힘 모멘트 ( $-M_\xi$ )에 의해 균열선단에 나타나는 응력집중계수  $K'_{M_\xi}$ 는 아래와 같다.

$$K'_{M_\xi}(w) = \sigma_2(w) \cdot \sqrt{\pi\alpha} \cdot F'(\alpha/\alpha') \quad (2)$$

여기서

$$\sigma_2(w) = \frac{(-M_\xi) \cdot w}{\pi D^4 / 64}$$

$$F'(\alpha/\alpha') = \sqrt{\frac{2\alpha'}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2\alpha'}} \cdot \frac{0.752 + 2.02(\alpha/\alpha') + 0.37(1 - \sin \frac{\pi\alpha}{2\alpha'})^3}{\pi\alpha}$$

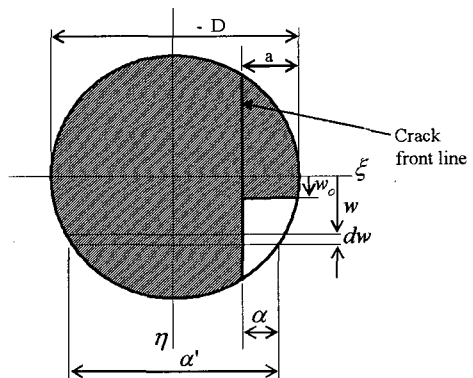


Fig. 2 Cross section of shaft at crack

굽힘 모멘트에 의한 총 응력집중계수는 다음과 같이 되며,

$$K^I(w) = K_{M_\eta}^I(w) + K_{M_\xi}^I(w) \quad (3)$$

Castigliano정리<sup>(9)</sup>를 사용하면  $\eta$  및  $\xi$ 축에 대한 추가 기울기는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta\alpha_{\eta,crack} = \frac{1}{2E} \int_A (K_{M_\eta}^I + K_{M_\xi}^I) \frac{\partial K_{M_\eta}^I}{\partial M_\eta} dA \quad (4)$$

$$\Delta\alpha_{\xi,crack} = \frac{1}{2E} \int_A (K_{M_\eta}^I + K_{M_\xi}^I) \frac{\partial K_{M_\xi}^I}{\partial M_\xi} dA \quad (5)$$

여기서 편미분항들은 다음과 같다.

$$\frac{\partial K_{M_\eta}^I}{\partial M_\eta} = \frac{\alpha'/2}{\pi D^4/64} \cdot \sqrt{\pi\alpha} \cdot F(\alpha/\alpha')$$

$$\frac{\partial K_{M_\xi}^I}{\partial M_\xi} = \frac{w}{\pi D^4/64} \cdot \sqrt{\pi\alpha} \cdot F'(\alpha/\alpha')$$

균열이 완전 열린 상태를 가정하면 위의 적분구간은 아래와 같이 표현된다.

$$\int_A f dA = \int_{-\sqrt{a(D-a)}}^{\sqrt{a(D-a)}} \int_0^{a-(D/2-\sqrt{(D/2)^2-w^2})} f d\alpha dw \quad (6)$$

### 2.2 균열 절점(node)에서의 전달함수

축 요소에 대한 상태변수인 변위, 기울기, 굽힘 모멘트, 전단력을 Fig. 3과 같은 부호와 방향으로 정의하기로 한다. Fig. 3의 (a)와 (b)는 각각 수직과 수평면을 나타내는 X-Z 평면과 X-Y 평면을 보여준다. 이 그림의 상태변수를 복소수로 표현하여 다음과 같이 변위, 기울기, 굽힘 모멘트, 전단력으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U_i &= Y_i + jZ_i \\ \alpha_i &= \phi_i + j\theta_i \\ M_i &= M_{z,i} + jM_{y,i} \\ V_i &= V_{y,i} + jV_{z,i} \end{aligned} \quad (7)$$

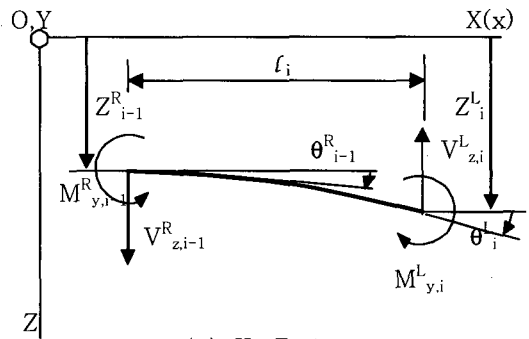
절점  $i$ 와  $i+1$  사이의 요소에 대한 상태벡터는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\begin{pmatrix} U_{i+1} \\ \alpha_{i+1} \\ M_{i+1} \\ V_{i+1} \end{pmatrix}^L = [F] \begin{pmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{pmatrix}^R$$

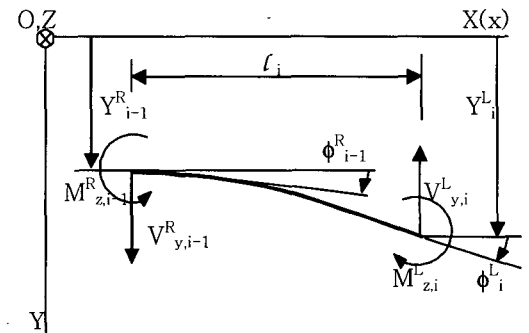
여기서  $[F]$ 는  $i$ 번째 축 요소의 전달행렬을 보여준다.

균열을 중앙에 갖는 요소를 고려한다면, 위의 전달행렬에 균열의 개폐에 따른 변화를 고려하여야 한다. 그러나 식 (1)과 식 (2)로 표현되는 파괴역학에서의 실험식은 시편의 양단에 동일 크기의 굽힘 모멘트가 작용하는 경우에 적용하고 있다. 이 연구에서는 이러한 가정과 모순이 없도록 균열 위치를 절점으로 선택하여 취급하고자 한다. 균열이 있는 판 요소의 추가 기울기를 절점 양쪽의 상태벡터에 다음과 같이 고려하였다.

$$\begin{pmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{pmatrix}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{pmatrix}^L + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$



(a) X-Z plane



(b) X-Y plane

Fig.3 State variables of  $i$ -th shaft element

추가 기울기를 결정하는 굽힘 모멘트는 절점 양쪽에서 크기가 동일하다. 기울기를 제외한 다른 상태변수들, 즉 변위와 전단력도 절점 양쪽이 동일하다. 이 식을 상태벡터를 나타내는 간단한 표기방법을 사용하면 다음과 같다.

$$\{s\}_i^R = \{s\}_i^L + \{c\}_i \quad (9)$$

### 3. 회전체 거동

#### 3.1 동적 해석을 위한 전달행렬

회전관성과 전단변형을 고려한 회전하는 굽은 축에 대한 운동방정식은 아래와 같다.<sup>(4,10)</sup>

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{EI\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - jT \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + j \frac{T\rho}{\kappa G} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho A r_o^2 \left[ \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) - j2\Omega \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right) \right] = 0 \quad (10)$$

여기서  $E$ 와  $\rho$ 는 각각 Young 상수와 질량밀도를,  $T$ 는 축 양단의 토크를,  $A$ 와  $I$ 는 단면의 면적과 면적관성모멘트를,  $r_o$ 는 회전반경(radius of gyration)을,  $\kappa$ 는 일반적으로 사용되는 형상계수(form factor)의 역수를,  $G$ 은 전단탄성계수를,  $\Omega$ 는 회전속도를,  $\omega$ 는 고유진동수를 나타낸다. 운동방정식의 변수  $u$ 는 시간과 공간의 함수로복소수 변위를 나타낸다.

$$u(x, t) = y(x, t) + jz(x, t) \quad (11)$$

이 식을 아래와 같이 변수분리하고

$$u(x, t) = U(x) \cdot e^{j\omega t} = \{Y(x) + jZ(x)\} \cdot e^{j\omega t} \quad (12)$$

이로부터 유한한 길이의축 요소에 대한 상태벡터와 전달행렬을 표현하면 아래와 같다.<sup>(8)</sup>

$$\{s\}_{i+1}^L = [F]_i \{s\}_i^R \quad (13)$$

여기서  $[F]_i$ 는  $i$ 번째 축 요소의 전달행렬이고,  $\{s\}$ 는 복소수 상태벡터를, 이의 하첨자(subscript)  $i$ 는 절점의 번호를, 상첨자(superscript)  $L$ 과  $R$ 은 각각 절점의 좌측과 우측을 나타낸다. 전달행렬  $[F]_i$ 는 축의

기하학적 제원, 재질 특성, 회전수 및 고유진동수의 함수로 표현되는데,<sup>(8)</sup> 여기서는 전개과정과 자세한 표현을 생략하고 아래와 같이 형태만 표현하였다.

$$[F]_i = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (14)$$

한편 디스크 요소의 좌우축상태벡터 사이의 전달행렬은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{pmatrix}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega\Omega J_p - \omega^2 J_i) & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 - j c \omega & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{pmatrix}^L + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_i e_i \Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta_i)} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\text{또는 } \{s\}_i^R = [S]_i \{s\}_i^L + \{u\}_i \quad (16)$$

여기서  $J_i$ 와  $J_p$ 는 각각 디스크의 질량관성모멘트와 질량관성 모멘트를,  $c$ 는 감쇠계수를 나타낸다.  $m_i e_i$ 와  $\beta_i$ 는 각각 질량 불평형량의 크기와 균열방향인  $\xi$ 축으로부터의 방위각이다.

#### 3.2 중력응답 해석을 위한 전달행렬

균열 회전체에서의 진동해석을 위해서는, 중력이 균열의 개폐에 중요한 역할을 하기 때문에 중력에 의한 축의 처짐을 고려해야 한다. 중력의 영향은 시간에 무관하므로 축의 운동방정식은 아래와 같이 변위  $U_g$ 에 대한 상미분방정식이 된다.

$$EI \frac{d^4 U_g}{dx^4} - jT \frac{d^3 U_g}{dx^3} = j\rho A g \quad (17)$$

여기서  $g$ 는 중력가속도를 나타낸다. 토크를 무시하면, 중력 응답은 다음과 같고,

$$U_g = j \frac{\rho A g}{24EI} x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \quad (18)$$

축 양단의 경계조건을 도입하여 다음의 전달행렬을

만들 수 있다.

$$\begin{pmatrix} U_g^R \\ \alpha_g^R \\ M_g^R \\ V_g^R \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_g^L \\ \alpha_g^L \\ M_g^L \\ V_g^L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\rho Agl^4}{24EI} \\ \frac{\rho Agl^3}{6EI} \\ \frac{\rho Agl^2}{2} \\ \rho Agl \end{pmatrix} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (19)$$

또는 절점번호와 축 요소의 번호를 일반화하여 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\{s_g\}_{i+1}^L = [F_g]_i \{s_g\}_i^R + \{g\}_i \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (20)$$

한편 디스크 요소의 좌우축상태벡터 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} U_g^R \\ \alpha_g^R \\ M_g^R \\ V_g^R \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_g^L \\ \alpha_g^L \\ M_g^L \\ V_g^L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (21)$$

또는

$$\{s_g\}_i^R = \{s_g\}_i^L + \{d_g\}_i \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (22)$$

### 3.3 단순회전체 모형에 대한 동응답

앞에서 소개한 전달행렬은 회전체의 동적 특성을 해석하기 위하여 영향계수(influence coefficient)를

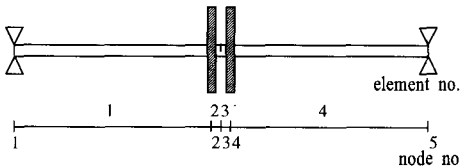


Fig. 4 Simple rotor having a breathing crack ( $E=2.12 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\rho=0.0078 \text{ kg/cm}^3$  and  $k=1 \cdot 1010 \text{ N/m}$ )

유도하는데 사용할 수 있다.<sup>(8)</sup> 이를 위하여 Fig. 4와 같은 단순회전체 모형을 사용하고자 한다.

이 모형은 참고문헌 (2)에서 디스크 질량과 축 강성만을 고려하여 사용한 단순회전체 모형의 실제 모형이다. 축 직경은 1.5 cm이고 전체 길이는 70 cm이다. 4개의 축 요소 길이는 각각 33.5 cm, 1.5 cm, 1.5 cm, 33.5 cm이다. 동일한 2개의 디스크의 질량은 각각 1.4 kg이며, 각 디스크의 질량관성모멘트(transverse moments of inertia) 및 질량극관성모멘트(polar moments of inertia)는 각각  $12.8 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$ 와  $25.6 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$ 이다.

동 해석을 위하여 절점 1부터 절점 5까지의 관계식을 상태벡터와 전달행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{s\}_2^L &= [F]_1 \{s\}_1^R, \{s\}_2^R = [S]_2 \{s\}_2^L + \{u\}_2 \\ \{s\}_3^L &= [F]_2 \{s\}_2^R, \{s\}_3^R = \{s\}_3^L + \{c\}_3 \\ \{s\}_4^L &= [F]_3 \{s\}_3^R, \{s\}_4^R = [S]_4 \{s\}_4^L + \{u\}_4 \\ \{s\}_5^L &= [F]_4 \{s\}_4^R \end{aligned} \quad (23)$$

이 식들을 연결하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{s\}_5^L &= [F]_4 [S]_4 [F]_3 [F]_2 [S]_2 [F]_1 \{s\}_1^R \\ &+ [F]_4 [S]_4 [F]_3 [F]_2 \{u\}_2 + [F]_4 [S]_4 [F]_3 \{c\}_3 \\ &+ [F]_4 \{u\}_4 \\ &= T \{s\}_1^R + Q^{2-5} \{u\}_2 + Q^{3-5} \{c\}_3 + Q^{4-5} \{u\}_4 \end{aligned}$$

양단의 베어링 강성을 양단의 상태벡터에 아래와 같이 고려하면

$$\{s\}_1^R = \begin{Bmatrix} U_1 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ -k_1 U_1 \end{Bmatrix}, \{s\}_5^L = \begin{Bmatrix} U_5 \\ \alpha_5 \\ 0 \\ k_5 U_5 \end{Bmatrix}$$

절점 1에서의 기울기와 전단력을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} U_1^R &= c_{B2}^U (m_2 e_2 \Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta_2)}) \\ &+ c_{B4}^U (m_4 e_4 \Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta_4)}) + c_{C3}^U \Delta \alpha_3(t) \\ \alpha_1^R &= c_{B2}^\alpha (m_2 e_2 \Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta_2)}) \\ &+ c_{B4}^\alpha (m_4 e_4 \Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta_4)}) + c_{C3}^\alpha \Delta \alpha_3(t) \end{aligned}$$

여기서 표현된 변수들은 다음과 같다.

$$c_{Bi}^U = \frac{\begin{vmatrix} -(q_{14}^{Ui-5}k_N - q_{44}^{Ui-5}) & (t_{12}k_N - t_{42}) \\ -q_{34}^{Ui-5} & t_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (t_{11}k_N - t_{14}k_1k_N - t_{41} + t_{44}k_1) & (t_{12}k_N - t_{42}) \\ (t_{31} - t_{34}k_1) & t_{32} \end{vmatrix}}$$

$$c_{Ci}^U = \frac{\begin{vmatrix} -(q_{12}^{Ci-5}k_N - q_{42}^{Ci-5}) & (t_{12}k_N - t_{42}) \\ -q_{32}^{Ci-5} & t_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (t_{11}k_N - t_{14}k_1k_N - t_{41} + t_{44}k_1) & (t_{12}k_N - t_{42}) \\ (t_{31} - t_{34}k_1) & t_{32} \end{vmatrix}}$$

$$c_{Bi}^\alpha = \frac{\begin{vmatrix} (t_{11}k_N - t_{14}k_1k_N - t_{41} + t_{44}k_1) & -(q_{14}^{Ui-5}k_N - q_{44}^{Ui-5}) \\ (t_{31} - t_{34}k_1) & -q_{34}^{Ui-5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (t_{11}k_N - t_{14}k_1k_N - t_{41} + t_{44}k_1) & (t_{12}k_N - t_{42}) \\ (t_{31} - t_{34}k_1) & t_{32} \end{vmatrix}}$$

$$c_{Ci}^\alpha = \frac{\begin{vmatrix} (t_{11}k_N - t_{14}k_1k_N - t_{41} + t_{44}k_1) & -(q_{12}^{Ci-5}k_N - q_{42}^{Ci-5}) \\ (t_{31} - t_{34}k_1) & -q_{32}^{Ci-5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (t_{11}k_N - t_{14}k_1k_N - t_{41} + t_{44}k_1) & (t_{12}k_N - t_{42}) \\ (t_{31} - t_{34}k_1) & t_{32} \end{vmatrix}}$$

이를 사용하여 균열이 있는 절점3에서의 응답을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{s\}_3^U &= F^{23}S^2F^{12}\{s\}_1^R + F^{23}\{u\}_2 \\ &= Q^{1-3}\{s\}_1^R + Q^{2-3}\{u\}_2 \end{aligned} \quad (24)$$

### 3.4 단순회전체모형에 대한 중력응답

Fig. 4 모형에 대하여 중력응답에 대한 절점 1부터 절점 5까지의 관계식을 상태벡터와 전달행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{s\}_2^U &= [F_g]_1 \{s\}_1^R + \{g\}_1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ \{s\}_2^R &= \{s\}_2^U + \{d\}_2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ \{s\}_3^U &= [F_g]_2 \{s\}_2^R + \{g\}_2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ \{s\}_3^R &= \{s\}_3^U + \{c\}_3 \\ \{s\}_4^U &= [F_g]_3 \{s\}_3^R + \{g\}_3 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ \{s\}_4^R &= \{s\}_4^U + \{d\}_4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\{s\}_5^U = [F_g]_4 \{s\}_4^R + \{g\}_4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (25)$$

위의 7개 식을 연결하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{s\}_5^U &= [F_g]_4 [F_g]_3 [F_g]_2 [F_g]_1 \{s\}_1^R \\ &\quad + [F_g]_4 [F_g]_3 [F_g]_2 (\{g\}_1 + \{d\}_2) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + [F_g]_4 [F_g]_3 \{g\}_2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} + [F_g]_4 [F_g]_3 \{c\}_3 \\ &\quad + [F_g]_4 (\{g\}_3 + \{d\}_4) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} + \{g\}_4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &= T_g \{s\}_1^R + (Q_g^{2-5} (\{g\}_1 + \{d\}_2) + Q_g^{3-5} \{g\}_2 \\ &\quad + Q_g^{4-5} (\{g\}_3 + \{d\}_4) + \{g\}_4) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} + Q_g^{3-5} \{c\}_3 \end{aligned}$$

동 해석과 동일한 방법으로 베어링에서의 아래의 경계조건을 사용하여

$$\{s\}_1^R = \begin{Bmatrix} U_{g,1} \\ \alpha_{g,1} \\ 0 \\ -k_1 U_{g,1} \end{Bmatrix}, \quad \{s\}_5^U = \begin{Bmatrix} U_{g,5} \\ \alpha_{g,5} \\ 0 \\ k_5 U_{g,5} \end{Bmatrix}$$

절점 1에서의 상태변수  $U_{g,1}^R$ 와  $\alpha_{g,1}^R$ 에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$U_{g,1}^R = \sum_{i=1}^4 c_{g,i}^U \{g\}_i^U \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} + c_{g,C3}^U \Delta\alpha_3(t)$$

$$\alpha_{g,1}^R = \sum_{i=1}^4 c_{g,i}^\alpha \{g\}_i^U \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} + c_{g,C3}^\alpha \Delta\alpha_3(t)$$

여기서

$$c_{g,i}^U = \frac{\begin{pmatrix} (q_{g,11}^{(i+1)-5}k_5 - q_{g,41}^{(i+1)-5}) & (q_{g,31}^{(i+1)-5}) \\ (q_{g,12}^{(i+1)-5}k_5 - q_{g,42}^{(i+1)-5}) & (q_{g,32}^{(i+1)-5}) \\ (q_{g,13}^{(i+1)-5}k_5 - q_{g,43}^{(i+1)-5}) & (q_{g,33}^{(i+1)-5}) \\ (q_{g,14}^{(i+1)-5}k_5 - q_{g,44}^{(i+1)-5}) & (q_{g,34}^{(i+1)-5}) \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} (t_{g,11}k_5 - t_{g,14}k_1k_5 - t_{g,41} + t_{g,44}k_1) & (t_{g,12}k_5 - t_{g,42}) \\ (t_{g,31} - t_{g,34}k_1) & t_{g,32} \end{vmatrix}}$$

$$c_{g,C3}^\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -(q_{g,12}^{3-5}k_5 - q_{g,42}^{3-5}) & (t_{g,12}k_5 - t_{g,42}) \\ -q_{g,32}^{3-5} & t_{g,32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (t_{g,11}k_5 - t_{g,14}k_1k_5 - t_{g,41} + t_{g,44}k_1) & (t_{g,12}k_5 - t_{g,42}) \\ (t_{g,31} - t_{g,34}k_1) & t_{g,32} \end{vmatrix}}$$

$$C_{g,i}^\alpha = \frac{\begin{pmatrix} (t_{g,11}k_5 - t_{g,14}k_1k_5 - t_{g,41} + t_{g,44}k_1) \begin{Bmatrix} q_{g,31}^{(i+1)-5} \\ q_{g,32}^{(i+1)-5} \\ q_{g,33}^{(i+1)-5} \\ q_{g,34}^{(i+1)-5} \end{Bmatrix} \\ - (t_{g,31} - t_{g,34}k_1) \begin{Bmatrix} (q_{g,11}^{(i+1)-5}k_5 - q_{g,41}^{(i+1)-5}) \\ (q_{g,12}^{(i+1)-5}k_5 - q_{g,42}^{(i+1)-5}) \\ (q_{g,13}^{(i+1)-5}k_5 - q_{g,43}^{(i+1)-5}) \\ (q_{g,14}^{(i+1)-5}k_5 - q_{g,44}^{(i+1)-5}) \end{Bmatrix} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} (t_{g,11}k_5 - t_{g,14}k_1k_5 - t_{g,41} + t_{g,44}k_1) & (t_{g,12}k_5 - t_{g,42}) \\ (t_{g,31} - t_{g,34}k_1) & t_{g,32} \end{pmatrix}}$$

$$C_{g,C3}^\alpha = \frac{\begin{pmatrix} (t_{g,11}k_5 - t_{g,14}k_1k_5 - t_{g,41} + t_{g,44}k_1) & -(q_{g,12}^{3-5}k_5 - q_{g,42}^{3-5}) \\ (t_{g,31} - t_{g,34}k_1) & -q_{g,32}^{3-5} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} (t_{g,11}k_5 - t_{g,14}k_1k_5 - t_{g,41} + t_{g,44}k_1) & (t_{g,12}k_5 - t_{g,42}) \\ (t_{g,31} - t_{g,34}k_1) & t_{g,32} \end{pmatrix}}$$

또한  $\{g\}_1 = \{g\}_1 + \{d\}_2$ ,  $\{g\}_2 = \{g\}_2$ ,  
 $\{g\}_3 = \{g\}_3 + \{d\}_4$ ,  $\{g\}_4 = \{g\}_4$ .

이를 사용하여 균열이 있는 절점3에서의 중력 응답을 구하면 다음과 같다.

$$\{g\}_{j_3}^k = Q_g^{1-3} \{g\}_{j_1}^k + (Q_g^{2-3} \{g\}_{j_1} + Q_g^{3-3} \{g\}_{j_2}) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (26)$$

#### 4. 균열회전체 거동 해석방법

균열 위치에서의 굽힘 모멘트는 균열의 개폐에 직접적 영향을 미친다. Fig. 1에서 정의한 굽힘 모멘트 방향을 사용하면, 음의  $M_\eta$ 는 균열 선단에서 양의  $K^I_{M_\xi}$ 를 발생시키며, 음의  $M_\xi$ 도 양의  $\eta$ 축 상에서 양의  $K^I_{M_\xi}$ 를 생성한다. 굽힘 모멘트를 다음의 관계식을 사용하여 좌표 변환함으로써 회전 좌표계 상에서의 굽힘 모멘트로 표현할 수 있다.

$$M_\eta + jM_\xi = (M_z + jM_y)e^{-j\Omega t} \quad (27)$$

여기서  $(M_z + jM_y)$ 는 균열 위치에서의 동응답과 중력응답의 합으로부터 추출한 것이다. 동응답과 중력응답에 의한, 균열 절점 3에서 고정좌표계로 표현

되는, 굽힘 모멘트는 다음과 같다.

$$M_3 = \dots + F_C(\Omega)\Delta\alpha_3(t) + F_{U,2}(\Omega)e^{j\Omega t} + F_{U,4}(\Omega)e^{j\Omega t} + F_g \quad (28)$$

여기서

$$F_C(\Omega) = ((q_{31}^{1-3} - q_{34}^{1-3}k_1)c_{C3}^U + q_{32}^{1-3}c_{C3}^\alpha)$$

$$F_{U,2}(\Omega) = ((q_{31}^{1-3} - q_{34}^{1-3}k_1)c_{B2}^U + q_{32}^{1-3}c_{B2}^\alpha + q_{34}^{2-3})m_2e_2\Omega^2e^{j\beta_2}$$

$$F_{U,4}(\Omega) = ((q_{31}^{1-3} - q_{34}^{1-3}k_1)c_{B4}^U + q_{32}^{1-3}c_{B4}^\alpha)m_4e_4\Omega^2e^{j\beta_4}$$

$$F_g = \sum_{i=1}^4 ((q_{g,31}^{1-3} - q_{g,34}^{1-3}k_1)c_{g,i}^U + q_{g,32}^{1-3}c_{g,i}^\alpha) \{g\}_i \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} + \left( \sum_{i=1}^2 \begin{Bmatrix} q_{g,31}^{(i+1)-3} \\ q_{g,32}^{(i+1)-3} \\ q_{g,33}^{(i+1)-3} \\ q_{g,34}^{(i+1)-3} \end{Bmatrix}^T \{g\}_i \right) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

이 식에서 보는 바와 같이 굽힘 모멘트는 균열의 개폐에 의해 결정적으로 영향을 받는다. 또한 균열의 개폐는 식 (1)~식 (5)에 보는 바와 같이 균열 부근의 굽힘 모멘트에 의해 결정된다. 따라서 이들 두 변수는 서로 연성되어(coupled) 있다.

식 (28)에서  $F_C$ 와  $F_g$ 는 각각 균열과 중력이 절점3에서의 굽힘 모멘트에 미치는 영향계수를 나타내며,  $F_{U,2}$ 와  $F_{U,4}$ 에서  $m_2e_2\Omega^2e^{j\beta_2}$ 와  $m_4e_4\Omega^2e^{j\beta_4}$ 를 제한 부분이 각각 두 불평형질량이 절점3에서의 굽힘 모멘트에 미치는 영향계수를 나타낸다.

Fig. 5는 균열 회전체의 거동을 시뮬레이션하는 절차를 보여준다. 회전체가 회전하면서 균열의 열림상태가 계속 변화하며, 이에 따라서 축의 거동도 변화한다. 이를 고려하여, 회전체를 매우 작은 각도로 회전시키면서 매 각 위치에서 굽힘 모멘트와 균열에 의한 추가 기울기를 반복적으로 계산하며 서로 계산에 활용하는 것이다. 이러한 반복에 의해서 1회전에서의 거동이 안정상태에 도달하면 반복 계산을 종료한다.

그러나 균열이 존재하는 회전체는 응답에 종속하는 비선형 특성을 나타낸다. 이 연구에서 사용한 변수들을 사용하여 표현한다면, 이는 시간에 따라 (응답에 따라) 변화하는 균열 위치에서의 추가 기울기

$\Delta\alpha_c(t)$ 가 그 원인이다. 이 연구에서는 비선형 거동의 원인이 되는 이 변수를 식에 명시적으로(explicitly) 표현하였다. 응답에 따라 변화하는 이 추가 기울기는 균열의 개폐 거동 중 과도적인 운동 특성으로 인하여 고조파 진동성분을 만들어 낸다.

이 연구를 통하여는 비선형 운동에 의한 고조파 진동을 고려하기 위하여 균열 개폐에 기인한 추가 기울기를 고조파 성분의 합으로 표현하기 위하여 다음과 같은 푸리에(Fourier) 급수전개를 시뮬레이션에 포함시켰다.

$$\Delta\alpha_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\Omega_n t} \quad (29)$$

여기서  $\Omega_n = n\Omega$  이고

$$c_n = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Omega}}^{\frac{\pi}{\Omega}} \Delta\alpha_c(t) e^{-j\Omega_n t} dt$$

계수는

비선형 운동을 고려하기 위하여 균열 위치에서의 굽힘 모멘트 식 (28)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_3 = & \dots + F_C(\Omega_{-3})c_{-3}e^{j\Omega_{-3}t} \\ & + F_C(\Omega_{-2})c_{-2}e^{j\Omega_{-2}t} + F_C(\Omega_{-1})c_{-1}e^{j\Omega_{-1}t} \\ & + F_g + F_{U,2}(\Omega)e^{j\Omega t} + F_{U,4}(\Omega)e^{j\Omega t} \\ & + F_C(\Omega)c_{+1}e^{j\Omega t} + F_C(\Omega_2)c_{+2}e^{j\Omega_2 t} \\ & + F_C(\Omega_3)c_{+3}e^{j\Omega_3 t} + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

### 5. 시뮬레이션 및 토의

참고문헌 (4)에서 사용한 Fig.4의 단순회전체와 특성을 비교할 목적으로, 매우 큰 강성인  $1.0 \times 10^{10}$  N/m로 양단 베어링의 강성을 가정하였다. 분포질량이 고려된 이 모형은 영향계수를 이용한 분석 결과, 작은 값부터 149 rad/s, 2590 rad/s, 8490 rad/s의 주파수에서 위험속도를 가지며, 응답해석을 통한 중앙에서의 정적 처짐은  $494 \mu\text{m}$ 이었다.

참고문헌 (4)에서는 회전체를 질량이 없는 축과 질량만 있는 디스크로 구성된 회전체로 가정하고, 파괴역학의 개념을 도입하여 회전체의 진동 시스템을 해석하는데 직 강성과 교차 강성을 사용하였다. Fig.6은 참고문헌에서 직 강성과 교차 강성을 고려한 균열 회전체의 해석 결과로서, 균열이 열리면서 과도적으로 교차 강성이 출현하였다가 균열이 완전히 열리면 직 강성만이 존재하는 현상을 보여준다. 이 그림은 균열이 상부를 향하는 방향을 기준으로 회전체의 회전각도를 표시하고 있다.

이 연구는 파괴역학 개념을 도입하여 분포하중을 고려한 일반 회전체에 적용할 수 있는 방법을 제시한 것으로서, 추가 기울기(additional slope)를 계산하기 위하여 참고문헌과 동일 개념을 사용하였다. Fig.7은 양의 응력집중계수를 갖는 균열선단을 따라 적분하기 위하여 축의 1회전 중의 응력집중계수 변화를 나타낸 것이다. 균열선단을 10개의 균일 구간으로 나누어 각 구간의 중앙에서 응력집중계수 값을 관찰해 보면, 균

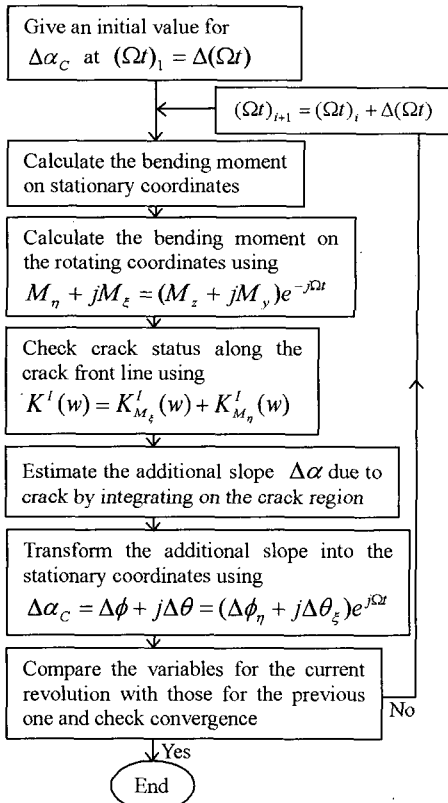


Fig. 5 Iterative simulation procedure

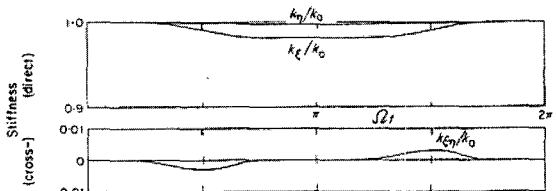


Fig. 6 Stiffness change with shaft rotation(no unbalance, crack depth(a/D): 0.2)<sup>(4)</sup>



열이 가장 먼저 열리는 구역부터 양의 값을 갖기 시작하며, 닫힐 때도 동일 순서에 의하는 것을 확인할 수 있다.

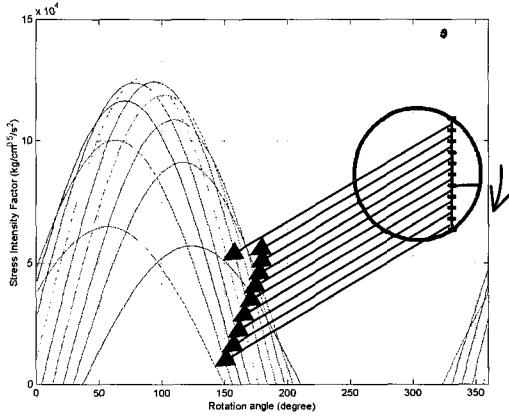
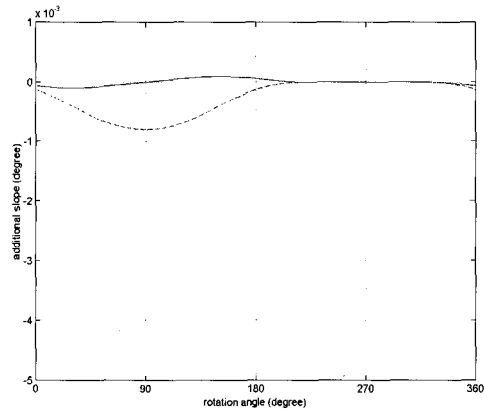
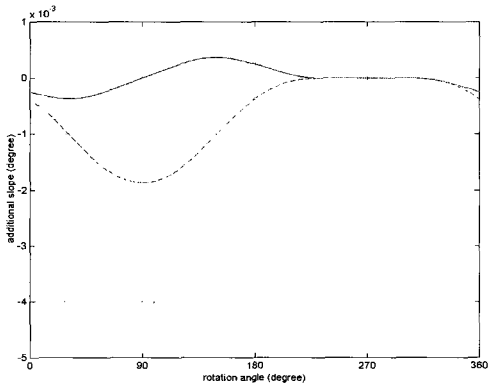


Fig. 7 Change of stress intensity factor with shaft rotation (crack depth: 0.1,  $\Omega$ : 100 rad/s)

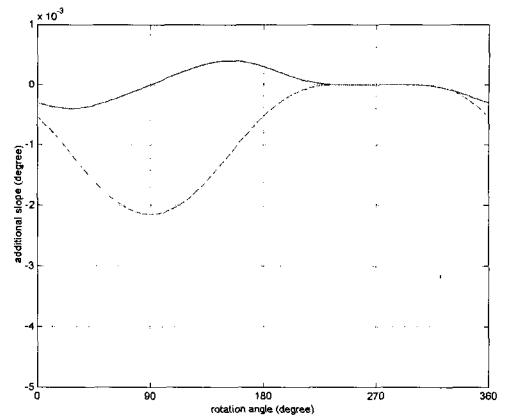


(a) Crack depth: 0.2

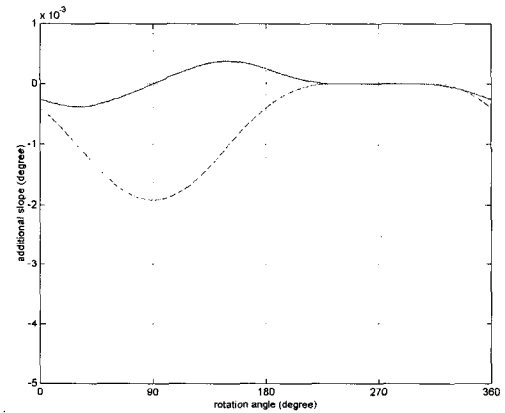


(b) Crack depth: 0.3

Fig. 8 Additional slope change with shaft rotation (no unbalance,  $\Omega$ : 1 rad/s) (solid line:  $\Delta\theta_\xi$ , dotted line:  $\Delta\phi_\eta$ )



(a)  $\beta = 0^\circ$



(b)  $\beta = 180^\circ$

Fig. 9 Additional slope change with shaft rotation ( $m_2 e_2 = m_4 e_4 = 0.001$  kg·cm, crack depth: 0.3,  $\Omega$ : 135 rad/s) (solid line:  $\Delta\theta_\xi$ , dotted line:  $\Delta\phi_\eta$ )

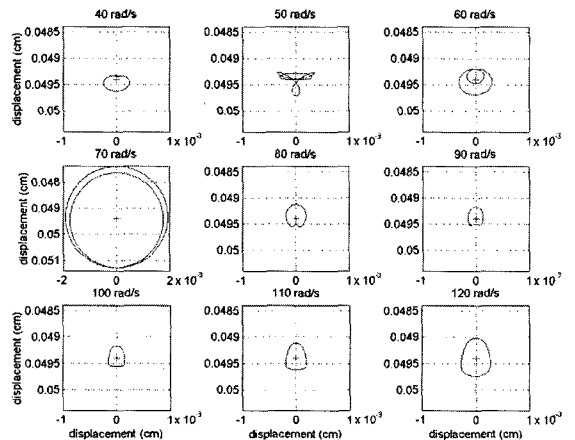


Fig. 10 Orbits with rotation speed increased (without unbalance, crack depth: 0.2)

균열 깊이가 증가하면 균열의 추가 기울기 크기가 증가하며, 균열의 열려 있는 구간은 증가하고 닫혀 있는 구간은 감소함을 Fig. 8에서 보여주고 있다. 이 경우는 불평형 질량이 없는 경우이며 회전체는 매우 낮은 속도인 1 rad/s로 회전하는 경우이다. 그림에서 실선은  $\xi$ 축을 기준으로 한 기울기인데, 균열이 수평을 향한 방향부터 회전할 때 양의  $\eta$ 축 방향부터 균열이 열리는 것을 나타낸다. 그림에서 음의 값은 Fig. 1에서 굽힘 모멘트에 대하여 나타낸 방향과 동일 방향의 기울기를 사용하였기 때문이다.

불평형 질량이 공존하는 경우에는 이의 방향이 회전체 거동에 영향을 미친다. Fig. 9는 1차 위험속도의 아래인 135 rad/s에서 회전할 때 균열과 동일 방향에 있는 불평형 질량이 균열의 열림을 도와주며 반대 방향의 불평형 질량은 그 반대로 작용하는 것을 보여준다. 이와 같은 현상은 위험속도를 상회하면 반대의 효과를 나타낸다.

Fig. 10은 1차 위험속도보다 낮은 회전속도 구간에서 위험속도의 1/3 및 1/2 속도 구간을 거치면서 나타내는 축 중심에서의 선화 모양을 나타낸 것이다. 이들 속도를 지나면서 회전체에 고조파 성분이 크게 지배하는 현상을 보여준다.

## 6. 결 론

균열 회전체 진동해석을 위하여 균열 위치에서의 추가 기울기를 자력진동원으로 표현하여 운동방정식에 포함시켰다. 전달행렬방법을 도입하여, 불평형 질량과 균열에 의한 동 영향계수와 중력에 의한 응답을 계산하기 위한 영향계수를 해석적으로 유도하였다. 추가 기울기는 파괴역학 개념에 기초하여 균열 위치에서의 굽힘 모멘트의 함수로 표현하였으며, 역으로 굽힘 모멘트는 추가 기울기의 함수로 표현하였다.

굽힘 모멘트와 추가 기울기는 회전체를 작은 각도로 회전시키면서 반복적으로 계산하였다. 추가 기울기는 매 순간 양의 응력집중계수를 갖는 균열 영역에서 적분을 하여 구하였으며, 균열 위치에서의 굽힘 모멘트는 추가 기울기를 입력 자료의 하나로 사용하여 계산하였다. 균열 개폐 거동은 시스템에 비선형 가진을 제공하기 때문에, 추가 기울기에 대한 푸리에 변환 개념을 도입하여 과도 거동을 고려하였다. 추가

기울기의 시간 종속(응답 종속) 고조파 성분이 고조파 진동을 발생시킴을 보였다.

이 연구에서 제안된 방법을 사용하여 단순한 회전체 모형의 진동 해석을 수행하였다. 균열선단에서의 응력집중계수가 축 회전과 함께 변화하는 것을 보였고, 추가 기울기가 역시 균열의 개폐와 함께 변화되는 것을 보였다. 균열 깊이가 증가하면서 균열의 추가 기울기 크기가 증가하며, 균열의 열려 있는 구간은 증가하고 닫혀 있는 구간은 감소함을 확인하였다. 불평형 질량이 공존하는 경우에는 이의 방향이 회전체 거동에 영향을 미침을 보였는데, 1차 위험속도의 아래에서 회전할 때 균열과 동일 방향에 있는 불평형 질량이 균열의 열림을 도와주는 것을 보였다.

## 후 기

이 연구는 2004년도 전주대학교 해외파견 연구비 지원에 의해 이루어졌음.

## 참 고 문 헌

- (1) Dimarogonas, A. D. and Paipetis, S.A., 1983, *Analytical Methods in Rotor Dynamics*, London: Applied Science Publishers Ltd, Chapter 6.
- (2) Dimarogonas, A. D. and Papadopoulos, C. A., 1983, "Vibration of Cracked Shafts in Bending," *Journal of Sound and Vibration*, 91, pp. 583~593.
- (3) Choi, S. -H., Hong, S. -W. and Lee C. -W., 2003, "An Efficient Dynamic Model of General Rotor Systems with Open Cracks," *KSNVE 2003 Spring Conference*, pp. 88~93.
- (4) Jun, O. S., Eun, H. J., Earmme, Y. Y. and Lee, C. -W., 1992, "Modelling and Vibration Analysis of a Simple Rotor with a Breathing Crack," *Journal of Sound and Vibration*, 155(2), 273~290.
- (5) Prohl, M. A., 1945, "A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors," *ASME Journal of Applied Mechanics*, 67, A-142-A-148.

(6) Lund, J. W., 1974, "Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-film Bearings," ASME Journal for Engineering for Industry, pp.509~517.

(7) Rao, J. S., 1996, Rotor Dynamics, 3rd ed., New Age International Ltd., Chapter 8.

(8) Jun, O. S., 2004, "Influence Coefficients on Rotor Having Thick Shaft Elements and Resilient

Bearings," Journal of Sound and Vibration, 272, pp.657~673.

(9) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., 2000, The Stress Analysis of Cracks Handbook, 3rd ed., ASME Press.

(10) Lee, C. -W., 1993, Vibration Analysis of Rotors, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, Chapter 8.