

Ritz법을 이용한 쐐기형 봉의 진동 해석

박 석 주†

(원고접수일 : 2005년 5월 16일, 심사완료일 : 2005년 11월 4일)

Vibration Analysis of Wedge Type Bar by Ritz Method

Sok-Chu Park†

Abstract : This paper discusses the lateral vibration of a bar which has its tip free. The uniform bar has a solution by summation of some simple exponential functions. But if its shape is not uniform, its solution could be by Bessel's function, or mathematical solution could not be existed. Even if the solution of Bessel's function exists, as Bessel function is a series function, we must get the solution by numerical method.

Hereby the author proposes the ununiform beam solution of the matrix method by Ritz's method, and proposes a new deflection shape function.

Key words : Lateral vibration of bar(봉의 횡진동), Ritz method(Ritz 법)

1. 서 론

균일 단면봉의 횡진동 해는 간단한 지수함수의 합으로 구할 수 있다. 그러나 단면이 균일하지 않으면 수학적 해를 구할 수 없는 경우가 많고, 구해지더라도 급수해의 형태로 구하여 진다. 급수해의 경우에는 결국 수치해석법에 의하여 그 값을 구하여야 한다.

원추형 봉의 횡진동 해는 1879년 Kirchhoff^[1]가 한쪽단은 고정되어 있고, 다른 단은 자유인 경계조건에 대하여 처음 구하였고, 1922년에 D. Wrinch^[2]에 의하여 Bessel 함수의 형태로 10차까지의 고유진동수를 구하였다. 또 쐐기형의 봉에 대하여서도 1879년 Kirchhoff^[1]가 고유진동수를 구하였다.

본 논문에서는 Ritz의 방법을 이용한 근사해를 구하는 방법을 행렬을 이용하여 일목요연하게 정리하고, 또 이 방법을 이용하여 원추형 봉에 대하여 고유진동수를 구하고자 한다

2. Ritz 법에 의한 봉의 횡진동 고유진동수

봉의 횡진동 운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

여기에서 x 는 봉의 축방향, v 는 횡방향 변위,

† 책임저자(한국해양대학교 해양시스템공학부), E-mail:poseidon@mail.hhu.ac.kr, Tel: 051)410-4305

EI는 강성, ρ 는 밀도, A는 봉의 단면적을 나타낸다.

봉이 특정의 고유진동수로 진동한다고 가정하면 임의의 점에서의 변위는 정현파 진동으로 나타난다.

$$v(x, t) = V(x) \cos(\omega t - \phi) \tag{2}$$

최대운동에너지 U_{\max} 와 최대위치에너지 T_{\max} 는 서로 같아야 한다는 에너지보존법칙으로부터 고유진동수를 구할 수 있다.

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \rho AV^2 dx \tag{3}$$

$$\omega^2 = \frac{E \int_0^l I \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)^2 dx}{\rho \int_0^l AV^2 dx} \tag{4}$$

Ritz의 근사해를 얻기 위하여 진동형을 다음과 같은 급수형태로 표시할 수 있다고 하자.

$$V = \sum_{k=1}^n a_k v_k(x)$$

$$= \mathbf{a} \mathbf{v}^t \tag{5}$$

단,

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

$$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \tag{6}$$

여기에서 모든 함수 v_k 는 봉의 경계조건을 만족해야 하고, a_k 는 임의의 상수이다. 식 (4)를 최소화하는 V를 구하면 고유진동수를 구할 수 있는데 이를 Ritz법이라 한다.

$$\frac{\partial \int_0^l I \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)^2 dx}{\partial a_k \int_0^l AV^2 dx} = 0 \tag{7}$$

이를 정리하면

$$\frac{\partial Z}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{8}$$

단,

$$Z = \frac{\partial}{\partial a_k} \int_0^l \left[I \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)^2 - \frac{\omega^2 \rho A}{E} V^2 \right] dx \tag{9}$$

여기에서 적분을 쉽게 할 수 있도록 각 요소들을 구하여 보면 다음과 같다.

$$V^2 = \mathbf{v}_2 \mathbf{a}_2^t \tag{10}$$

단,

$$\mathbf{v}_2 = [v_1^2 \ v_1 v_2 \ \dots \ v_1 v_n \ v_2^2 \ v_2 v_3 \ \dots \ v_n^2]$$

$$\mathbf{a}_2 = [a_1^2 \ 2a_1 a_2 \ \dots \ 2a_1 a_n \ a_2^2 \ 2a_2 a_3 \ \dots \ a_n^2] \tag{11}$$

또 연산자 $D = \frac{d}{dx}$ 를 도입하면

$$\frac{dV}{dx} = D \mathbf{v} \mathbf{a}^t \tag{12}$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = D^2 \mathbf{v} \mathbf{a}^t \tag{13}$$

$$\left(\frac{dV}{dx^2} \right)^2 = \mathbf{v}_4 \mathbf{a}_2^t \tag{14}$$

단,

$$\mathbf{v}_4^t = \left\{ \begin{array}{c} (D^2 v_1)^2 \\ (D^2 v_1 D^2 v_2) \\ M \\ (D^2 v_1 D^2 v_n) \\ (D^2 v_2)^2 \\ (D^2 v_2 D^2 v_3) \\ M \\ (D^2 v_n)^2 \end{array} \right\} \tag{15}$$

식 (14), (10)를 식 (9)에 대입하여 정리하면 다

음과 같이 된다.

$$Z = \left[C - \frac{\omega^2 \rho}{E} D \right] a_2 \quad (16)$$

여기에서,

$$\begin{aligned} C &= [k_{11} \ k_{12} L \ k_{1n} \ k_{22} L \ k_{nm}] \\ D &= [m_{11} \ m_{12} L \ m_{1n} \ m_{22} L \ m_{nn}] \end{aligned} \quad (17)$$

이고, 또,

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_0^l I \left(\frac{d^2 v_i}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 v_j}{dx^2} \right) dx \\ m_{ij} &= \int_0^l A v_i v_j dx \end{aligned} \quad (18)$$

이다.

식 (16)에 식(8)을 적용하면 다음과 같은 고유값 문제로 귀결된다.

$$Ka - \frac{\omega^2 \rho}{E} Ma = 0 \quad (19)$$

단,

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} L & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} L & k_{2n} \\ M & M & M \\ k_{1n} & k_{2n} L & k_{nn} \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} L & m_{1n} \\ m_{12} & m_{22} L & m_{2n} \\ M & M & M \\ m_{1n} & m_{2n} L & m_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

이다.

3. 고정-자유단을 가진 봉의 횡진동

균일 단면봉의 횡진동은 식 (1)에 식 (2)를 대입하여 풀면 다음의 형태의 해가 얻어진다.

$$V(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \quad (21)$$

여기에서 상수 β 와 C_i 는 경계조건으로부터 구할 수 있다.

3.1 균일 단면 외팔보의

왼쪽단 ($x=0$)이 고정되어 있고, 오른쪽단 ($x=l$)이 자유인 균일 단면봉의 경계조건과 고유진동수 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (V)_{x=0} &= 0, \quad \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=0} = 0 \\ (EI \frac{d^2 V}{dx^2})_{x=l} &= 0, \quad \frac{d}{dx} (EI \frac{d^2 V}{dx^2})_{x=l} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\cos \beta l \cosh \beta l = -1 \quad (23)$$

한편, Ritz의 방법을 적용하기 위하여 다음과 같이 잘 알려진 진동곡선과

$$V(x) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{x}{l} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^{k-1} \quad (24)$$

저자가 제안하는 다음의 진동곡선에 대하여 살펴보기로 한다.

$$V(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sinh px \sin \left(\frac{k\pi}{2} x \right) \quad (25)$$

위 두 곡선은 식 (22)의 경계조건을 만족한다. 위 두 식이 진동형함수로 적당한 이유는 수학적으로는 경계조건을 만족하기 때문이지만, 기하학적인 이유는 식 (24)의 경우 $(n+1)$ 차 다항식이기 때문에 계수만 잘 선택하면 $(n+1)$ 개의 실근을 갖는 함수가 될 수 있고, 더 적절히 계수를 선택하면 그 실근을 갖는 점이 진동절이 되고 그 곡선이 고유진동형이 될 수 있기 때문이다. 실제로는 차수가 1차의 높은 정도로는 진동형을 완전히 표현할 수 없기 때문에 저차의 몇 개의 고유진동수만을 구하고자 할 때는 구하고자 하는 고유진동수보다 2항 정도를 더 추가하여야 하고, 더 많은 고유진동수를 구하고자 할 때는 3항 정도를 추가하여야 한다. 예를 들어 식 (24)에서 $n=1$ 이면 이는 y

축에 대한 대칭인 2차식이 되어 고정-자유단을 갖는 봉의 1차 고유진동형과 비슷한 형태를 나타낸다. 그러나 이 곡선이 정확히 1차 고유진동형이 되지 않기 때문에 여기에 2 항 정도를 더 부가하여야 정확한 1차 고유진동형을 나타낼 수 있다.

식 (25)는 sin 함수와 sinh 함수의 곱으로 표시되어 있는데 이 경우도 비슷한 이유로 sin 항에 의하여 진동절을 나타낼 수 있고, sinh 항에 의하여 고정단은 고정시키고 자유단은 진폭을 크게 하여 적절한 계수를 선택함으로써 고유진동형을 나타낼 수 있다. 그런데 sinh 항은 실제로는 지수 함수이기 때문에 p값이 커지면 자유단이 급격하게 커져서 고유진동형을 나타낼 수 없게 되고, 너무 적으면 직선과 비슷하게 되어 또 고유진동형을 나타낼 수 없게 된다. 따라서 p값은 해석 대상에 따라서 적절히 선택할 필요가 있다.

함수 (24)와 (25)을 이용하여 β_l 의 값을 구하여 본다. x/l 을 다른 변수로 치환하여 적분하면 길이에 관계없이 정규화 되어 편리하다. 식 (18)의 적분은 컴퓨터를 이용한 수치적분으로 하였다. Table 1에 그 결과를 보인다.

Table 1 β_l for the various deflection functions

ord	exact	poly-10	error	sin-10	error	sin-13	error
1	1.8751	1.8751	0.00	1.8752	0.00	1.8751	0.00
2	4.6941	4.6941	0.00	4.6961	0.04	4.6950	0.02
3	7.8548	7.8548	0.00	7.8638	0.12	7.8589	0.05
4	10.9955	10.9956	0.00	11.0207	0.23	11.0070	0.10
5	14.1372	14.1382	0.01	14.1926	0.39	14.1617	0.17
6	17.2788	17.4119	0.77	17.3919	0.65	17.3241	0.26
7	20.4204	20.7538	1.63	20.7879	1.80	20.4978	0.38
8	23.5619	27.8327	18.1	25.8724	9.81	23.6910	0.55
9	26.7035	33.2271	24.4	39.3843	47.5	26.9142	0.79
10	29.8451	74.8923	150.	94.9811	219.	30.4667	2.08
11	32.9867	N.A	N.A	N.A	N.A	37.3283	13.16
12	36.1283	N.A	N.A	N.A	N.A	56.6389	56.77
13	39.2699	N.A	N.A	N.A	N.A	133.174	239.1

표에서 정해(exact)의 값은 식 (23)을 풀어 얻은 것이고, poly-10은 식 (24)에서 $n=10$ 인 경우이고, sin-10은 식 (25)에서 $n=10$ 인 경우이고, sin-13은 식 (25)에서 $n=13$ 인 경우에 대하여 저자가 수치 계산하여 얻은 값이다. 앞에서 설명한 이유로 $n=10$ 이든 $n=13$ 이든 뒤에서 3항 정도는 정확도가 떨어지는 것을 알 수 있다. 오차는 퍼센트로 나타낸 값이다. W. Weaver 등^[3]은 정해에 대하여 6차까지의 해를 제시하고 있다.

$n=10$ 일 때는 어느 경우든 7차까지는 상당히 좋은 정확도를 가진다. 그러나 식 (24)를 사용하면 n 이 10보다 큰 경우에는 식 (19)의 행렬 M이 정정치(positive definite)인 성질을 상실하게 되어 해석이 불가능하게 되는 단점이 있다. 식 (25)를 사용하면 $n=13$ 까지는 상당히 안정적인 해가 구하여지나, 식의 p값에 따라 n 이 더 커지면 불안정해져 해인지 아닌지 주의 깊게 살펴야 한다. 해의 불안정성은 중근의 존재와 두 해 사이의 간격이 갑자기 점프하는지의 여부에 의하여 판단할 수 있다.

위에서 정해를 알고 있는 균일 단면 외팔보에 대하여 저자가 제안한 방법이 유효함을 확인하였으므로 이 방법을 비균일 단면을 가지는 봉에 대하여 확장 적용하여 본다.

3.2 썩기형 봉의 진동해석

여기에서는 Kirchhoff가 해석한 바 있는 썩기형 봉의 진동해석에 대하여 살펴본다.

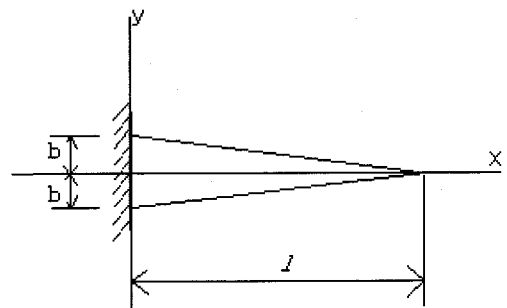


Fig. 1 Wedge bar

위에서와 마찬가지로 왼쪽단이 고정되어 있고, 오른쪽단이 자유로운 경계조건을 가지며, Fig. 1에 보인 왼쪽단의 높이가 2b이고 오른쪽단의 높이가 0인 사각 단면의 썸기형 봉의 횡진동에 대하여 고찰한다.

이 봉의 단면적과 면적관성모멘트는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$A(x) = 2b(1 - \frac{x}{l}) \quad (26)$$

$$I(x) = \frac{(2b)^3}{12} (1 - \frac{x}{l})^3$$

마찬가지로 식 (24)과 (25)의 진동형 방정식을 사용하여 다음과 같은 형식으로 고유진동수를 표시한다.

$$\omega_k = \frac{\beta_k r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (27)$$

다항식 (24)를 이용한 결과와 3.1에서 저자가 제안한 식 (25)를 이용한 결과를 Table 2에 표시한다. 다항식을 이용한 경우에는 n이 12까지의 계산이 가능하였고, 저자가 제안한 식으로는 13까지의 계산이 가능하였으나 신뢰성이 떨어져 12까지의 계산 결과만을 보인다. n이 커지면 식 (24)에서 알 수 있듯이 거듭 제곱의 횟수가 증가하므로, 값이 굉장히 커지고 되고, 행렬의 요소간에 자리수가 많이 다르게 되어 전자계산기의 유효숫자 취급의 한계 등으로 계산 신뢰성이 떨어진다. 이에 비하여 저자가 제안한 식은 고차다항식이 아니므로 이러한 단점이 없다. 따라서 저자가 제안한 식을 이용한 결과를 기준으로 취급하여 비교하였다. 식 (27)의 형태로 여러 경우의 β_k 값과 비교한 것을 Table 2에 표시하였다.

Kirchhoff^[1]가 계산한 제 1차 고유진동수에 대한 고유진동수값은 다음과 같다.

$$\omega_1 = \frac{3.069b}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (28)$$

이 결과도 저자가 제안한 결과와 아주 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 2 β_k for the various deflection functions

ord	sin-12	p-12	error
1	3.0687	3.0687	0.00
2	8.7799	8.7799	0.00
3	17.3322	17.3319	0.00
4	28.7328	28.7309	-0.01
5	42.9841	42.9780	-0.01
6	60.0873	60.0741	-0.02
7	80.0448	80.0823	0.05
8	102.3478	104.8271	2.42
9	123.6307	145.4659	17.66
10	144.2666	228.1680	58.16

4. 결 론

본 논문에서는 봉의 횡진동에 대한 Ritz법을 행렬을 이용하여 일목요연하게 정리하였다. 이를 이용하면 차수가 높아져도 간결한 고유값 문제로 표시할 수 있다.

저자가 제안한 진동형 식이 전통적인 고차다항식보다 더 고차의 고유진동수까지 구할 수 있음을 보였다. 이는 고차다항식의 경우 독립변수가 조금만 변하여도 종속변수가 크게 변하여 수치해석적인 방법으로는 수렴점을 찾기 어렵기 때문이다.

균일 단면봉의 정해진 진동수방정식 (23)을 이용하여 고유진동수를 구하는 경우에도 10차가 넘으면 지수함수항의 지수의 값이 커짐에 따라 오차가 급격히 커져서 수치해석법으로는 정확한 해를 구하기 어렵다. 그러나 저자가 제안한 식으로도 10차까지는 실용상 문제가 없을 정도의 정확도로 구할 수 있다. 균일 단면봉의 경우는 차수가 높아지면 차수간의 해의 간격이 π 로 수렴하는 성질이 있어 이를 이용하여 고차고유진동수를 구할 수 있다.

제안한 방법을 이용하여 썸기형 봉에 적용하여서도 정도 높은 해석 결과를 얻을 수 있었다

참고문헌

[1] G. R. Kifchhoff, Monatsberichte, Berin, 1897, p. 815.

- [2] D. Wrinch, Proc. Roy. Soc. London, 1922, p. 493.
- [3] W. Weaver, Jr, S. P. Timoshenko, D. H. Young, Vibration Problems in Engineering 5th ed., John Wiley & Sons, 1990, p. 427.

저 자 소 개



박석주 (朴錫柱)

1976년 한국해양대학교 항해학과 졸업(공학사), 1983년 부산대학교 조선공학과 졸업(공학석사), 1989년 동경공업대학 기계공학과 졸업(공학박사), 현 한국해양대학교 해양시스템공학부 교수