

# 회전원판의 진동과 동적 안정성

정진태\*

(한양대학교 공학대학 기계공학과)

이 글에서는 회전원판과 관련된 연구동향에 대해서 간단히 언급하고, 회전원판의 운동방정식의 유도과정 및 선형 비선형 운동방정식의 타당성에 소개하고자 한다. 그리고 회전속도의 변화에 따른 고유진동수의 변화, 회전원판의 임계속도, 그리고 각가속도의 영향 등에 대해 언급하고자 한다.

## 1. 머리말

회전원판은 컴퓨터 하드디스크, 플로피 디스크, 광디스크와 같은 기억장치뿐만 아니라 원형톱, 자동차 원판 브레이크 등 다양한 적용분야에 이용되기 때문에, 회전원판의 진동과 동적 안정성의 연구가 오랫동안 많은 연구자에 의해 수행되어 왔다. 특히, 컴퓨터 하드디스크와 광디스크와 같은 기억장치에서 데이터를 읽고 쓰는 데 있어서 회전원판의 진동 및 동적 안정성은 매우 중요하다. 컴퓨터 하드디스크와 광디스크 드라이브에서 사용되는 회전원판은 그림 1과 그림 2와 같다.

컴퓨터 하드디스크 드라이브에서 정보는 원판 상의 자화물질을 자회시켜 정보를 동심원 형태의 트랙에 저장한다. 트랙과 트랙 사이의 거리가 매우 작기 때문에 공기역학의 원리에 의해 부상하는 슬라이더에 부착된 헤드가 정보를 정확히 읽으려면 진동의 영향이 거의 없어야 한다. 한편, CD-ROM 드라이브와 디지털 비디오 디스크(DVD) 드라이브와 같은 광디스크 드라이브에서의 정보의 기록 방법 및 재생 방법은 하드디스크와는

많은 차이가 있다. 광디스크는 자화물질을 자화하는 방법과 달리 알루미늄 원판에 피트(pit)라는 일정한 크기의 홈을 파서 정보를 저장하고, 픽업(pick-up)에서 레이저 광선의 반사되는 빛을 이용하여 정보를 재생한다. 최근에 들어서 하드디스크와 마찬가지로 기록밀도를 높이기 위해 피트의 크기가 작아지고 있기 때문에 오작동 없이 정보를 쓰고 읽으려면 진동이 없고 동적 안정성이 보장되어야 한다.

이 글에서는 회전원판과 관련된 연구동향에 대해서 간단히 언급하고, 회전원판의 운동방정식의 유도과정 및 선형 비선형 운동방정식의 타당성에 소개하고자 한다. 그리고 회전속도의 변화에 따른 고유진동수의 변화, 회전원판의 임계속도, 그리고 각가속도의 영향 등에 대해 언급하고자 한다.

## 2. 연구동향

회전원판에 대한 초기의 연구는 유연한 회전원판의 자유진동과 임계속도에 대해 초점이 맞추어졌다<sup>(1-3)</sup>. 그 후 초기 연구와는 구별되게, 움직이거나 회전하는 하중

\* E-mail : jchung@hanyang.ac.kr / Tel : (031) 400-5287

## 기초강좌

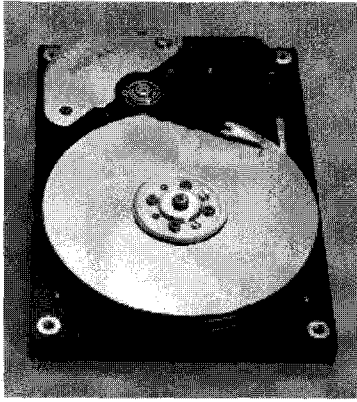


그림 1 하드디스크 드라이브

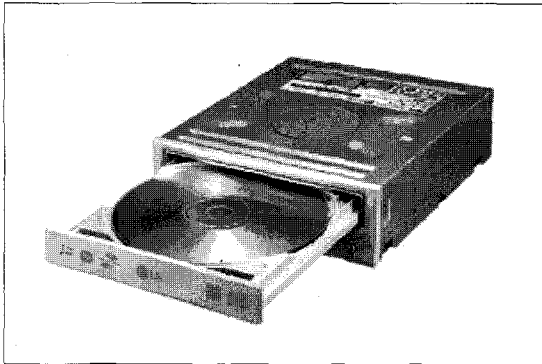


그림 2 광디스크 드라이브

을 받고 있으나 회전하지 않는 원판에 대해 동적 응답이나 안정성에 대한 연구도 진행되었다<sup>(4,5)</sup>. 컴퓨터 하드디스크에서 데이터를 읽을 때 오동작을 최소화하기 위해 헤드와 디스크면 사이의 상호작용을 고려한 회전원판의 연구가 컴퓨터산업의 발전과 더불어 중요한 테마로 등장하였다. 많은 연구자들이 하드디스크에서 헤드를 횡하중으로 취급하여 회전원판의 동적 응답 및 안정성에 대하여 연구하였다<sup>(6-9)</sup>.

근래에 들어, 따라서 광디스크 드라이브의 픽업(pick-up)이 어느 한 트랙에서 다른 트랙으로 이동할 때 원판이 각가속도를 갖는다. 이러한 이유로 광디스크의 동적

특성을 규명하기 위하여 각가속도를 갖는 회전원판의 동적 해석이 수행되었다<sup>(10)</sup>. 그리고 광디스크 드라이브의 광디스크는 하드디스크와 달리 탈착식이기 때문에 회전축과 원판의 대칭축이 정렬되지 않는 경우가 종종 발생한다. 이러한 정렬불량이 회전원판의 진동 및 정렬 불량에 미치는 영향에 대한 연구도 수행되었다<sup>(11-13)</sup>.

## 3. 운동방정식

유연한 회전원판에 대한 운동방정식을 유도하기 위해서 원판의 기하학적 비선형성을 고려하여야 한다. 기하적인 비선형은 von Karman 변형률 이론을 이용하여 표현할 수 있고, 원판 내부의 임의의 점에 대한 변형률과 원판 중립면 상의 점에 대한 변형률 사이의 관계를 Kirchhoff 평판이론으로 기술할 수 있다. 많은 연구에서 von Karman 변형률 이론과 Kirchhoff 평판이론 바탕을 두고 Hamilton 원리로부터 운동방정식을 유도한다. 그림 3에 도시한 회전원판은 내경이  $a$ , 외경이  $b$ , 두께가  $h$ 이며, 내륜이 고정되어 있으나 외륜은 구속되어 있지 않다. 그리고  $X-Y$  좌표계는 공간상에 고정된 관성 좌표계를 나타내고  $r\theta$  좌표계는 원판에 고정되어 원판과 함께 회전하는 좌표계이다.

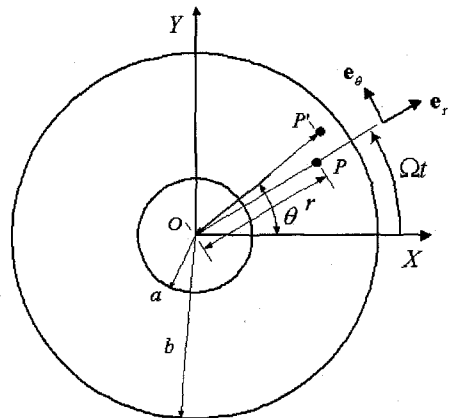


그림 3 회전원판의 모델

축대칭인 회전원판 내부의 임의의 점에 대한 변위를 Kirchhoff 평판이론에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_r = u - z \frac{\partial w}{\partial r}, \quad u_\theta = v - z \frac{\partial w}{r \partial \theta}, \quad u_z = w \quad (1)$$

여기서  $u_r, u_\theta, u_z$ 는 각각 원판 내부 임의의 점에서  $r, \theta, z$  방향의 변위를 나타내고,  $u, v$ 는 각각 중앙면 상에 있는 점에 대한 면내 변위를 나타내고  $w$ 는 면외 변위를 나타낸다.

회전원판의 기하학적 비선형성을 고려하기 위하여 von Karman의 변위-변형을 관계식을 사용하였다. 변위와 변형율의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \right)^2, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

선형화된 변위-변형을 관계식을 사용하여 지배방정식을 유도하면 면내 변위와 면외 변위는 서로 연성되지 않으나, 면내 응력이 면외 변위에 미치는 영향을 고찰할 수 없다.

응력-변형을 관계는 Hook의 법칙을 따르고 원판의 두께가 반경에 비하여 매우 작기 때문에 응력 상태가 평면응력 상태라고 가정하여 원판의 변형에너지를 구한다. 그리고 회전원판의 운동에너지를 계산하기 위하여 변형된 원판 내의 각 질점의 속도가 필요하다. 회전원판을 구성하고 있는 질점은 회전에 의한 강체운동과 진동에 의한 횡방향 변위를 동시에 갖고 있기 때문에 관성좌표계에서의 속도벡터는 물질 미분(material derivative)을 이용하여 유도하여야 한다.

회전원판에 대한 변형에너지와 운동에너지를 가지고 Hamilton 원리로부터 회전원판의 운동방정식을 구할 수 있다. 각속도  $\Omega$ 인 회전원판의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \rho h (\partial^2 u / \partial t^2 - 2\Omega \partial v / \partial t - \Omega^2 u) \\ - [\partial q_r / \partial r + (q_r - q_\theta) / r] = \rho h \Omega^2 r \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho h (\partial^2 v / \partial t^2 + 2\Omega \partial u / \partial t - \Omega^2 v) \\ - (\partial q_{r\theta} / \partial r + 2q_{r\theta} / r) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho h (\partial^2 w / \partial t^2 + 2\Omega \partial^2 w / \partial t \partial \theta + \Omega^2 \partial^2 w / \partial \theta^2) + D \nabla^4 w \\ - \partial (r q_r \partial w / \partial r + q_{r\theta} \partial w / \partial \theta) / r \partial r \\ - \partial (q_{r\theta} \partial w / \partial r + q_\theta \partial w / r \partial \theta) / r \partial \theta = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $\rho$ 는 원판의 밀도를,  $q_r, q_\theta, q_{r\theta}$ 는 당위길이 당 응력 즉, 박막응력이다. 그리고  $D$ 는 원판의 굽힘강성이고  $\nabla^4$ 은 Bi-harmonic 연산자이며 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} D &= Eh^3 / 12(1 - \nu^2), \\ \nabla^4 &= (\partial^2 / \partial r^2 + \partial / r \partial r + \partial^2 / r^2 \partial \theta^2) \end{aligned} \quad (6)$$

박막응력  $q_r, q_\theta, q_{r\theta}$ 가 변위  $u$ 와  $v$ 의 함수이므로, 면내 변위에 대한 지배방정식 식 (3)과 (4)는 면내 변위  $u$ 와  $v$ 만이 서로 연성되어 있으나 식 (5)에는 면외 변위  $w$ 와 면내 변위  $u$ 와  $v$ 에 서로 연성되어 있다. 이 말은 면외 변위가 면내 변위의 거동에는 영향을 주지 않으나, 면내 변위는 면외 변위에 영향을 끼침을 보여 준다.

#### 4. 고유진동수와 위험속도

원판의 회전속도의 변화에 따른 회전원판의 고유진동수의 변화를 살펴 보도록 하자. 회전원판의 비선형을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 두 가지 운동방정식으로부터 얻어진 회전원판의 고유진동수가 차이가 난다는 사실은 흥미롭다. 실제로 비선형 방정식인 식 (5)로부터 구한 고유진동수는 식 (5)를 선형화한 방정식으로부터 구한 고유진동수와 상당한 차이를 보인다.

비선형 방정식으로부터 고유진동수를 구하는 방법은 다음과 같다. 회전원판의 면내 변위가 정상상태에

## 기초강좌

도달했다고 가정하면 식 (3)과 (4)로부터 정상상태의 면내변위  $u$ 와  $v$ 를 구할 수 있고, 이를 바탕으로 박막응력  $q_r, q_\theta, q_{r\theta}$ 를  $r$ 의 함수로 표현할 수 있다.  $r$ 의 함수로 표현된 박막응력을 식 (5)에 대입하면 식 (5)는 에 대한 선형 방정식이 되어 고유진동수를 구할 수 있다. 선형화된 방정식은 식 (5)에서 비선형 항을 제거하면 손쉽게 얻을 수 있다.

원판의 회전속도를 증가시켰을 때 고유진동수의 변화가 그림 4에 도시되어 있다. 그림에서 실선은 비선형 방정식으로부터 구한 고유진동수이고 파선은 선형 방정식으로부터 구한 고유진동수이다. 그리고 그림에서 모드 ( $m, n$ )는  $m$ 개의 절점원과  $n$ 개의 절점직경을 갖는 모드를 나타낸다. 고유진동수의 계산에 사용된 물성치는  $E=65.5 \text{ Mpa}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\rho=1200 \text{ kg/m}^3$ ,  $h=0.0012 \text{ m}$ ,  $a=0.0325 \text{ m}$ ,  $b=0.0650 \text{ m}$ 이다. 그림에서 볼 수 있듯이 비선형 방정식을 이용했을 때와 선형 방정식을 사용했을 때의 고유진동수 차이와 원판의 회전속도가 증가할수록 커짐을 알 수 있다. 원심력으로 인해 발생하는 박막응력이 면의 변위에 강성을 부과하기 때문에 비선형 방정식을 사용하여야 한다. 실생활에서 찾아볼 수 있는 박막응력에 의한 강성 부과는 밀가루 반죽의 피자에서 볼 수 있다. 원형의 피자 밀가루 반죽은 회전하지 않을 때 면의 방향으로의 강성이 매우 작으나 회전하는 상태

에서는 면의 방향의 강성이 커지게 된다.

정지하고 있는 원판의 고유진동수가 회전을 하면 두 개로 나뉘어 하나는 증가하고 다른 하나는 감소함을 그림 4에서 볼 수 있다. 이러한 현상은 원판에 고정되어 있는 질점의 운동의 관점이 아니라 관성좌표계에 고정되어 있는 한 점을 지나가는 원판의 질점들의 운동 관점에서 고유진동수를 계산하기 때문에 발생한다. 하드 디스크 혹은 광디스크에서 헤드 혹은 픽업이 관성좌표계에 고정되어 있고 헤드와 픽업을 스쳐 지나가는 회전 원판의 질점의 상대운동이 중요하기 때문에 이와 같은 고유진동수의 계산이 실용적인 의미를 갖는다. 두 개로 나뉘어지는 고유진동수 중에서 큰 것을 순진행파(forward wave)의 고유진동수, 그리고 작은 것을 역진행파(backward wave)의 고유진동수라고 부른다.

역진행파의 고유진동수가 0이 되는 원판의 회전속도가 중요한데, 이를 임계속도라고 부른다. 임계속도에 이르게 되면 헤드 혹은 픽업과 회전원판 사이의 거리의 변화, 즉 진폭이 계속 커지게 되어 데이터를 읽거나 쓸 수 없는 불안정 상태에 이르게 된다. 그림 4에서의 임계속도는 약  $152 \text{ rad/s}$ 이다.

## 5. 각가속도의 영향

각가속도를 갖는 경우의 회전원판의 동적 응답을 관찰하여 보자. 정지상태에 있는 원판을 1초 동안 일정한 각가속도를 갖고 가속시킨 후 각속도를  $300 \text{ rad/s}$ 와  $500 \text{ rad/s}$ 로 유지한 경우의 자유단에서의 면내 변위를 그림 5에 도시하였다. 그림 5에서 볼 수 있듯이 각가속도가 존재할 때 시간에 대해 반경 방향의 면내 변위가 증가하나 각가속도가 존재하지 않을 때 반경 방향의 면내 변위에 변화가 없다. 그리고, 원주 방향의 면내 변위는 0에 가깝다는 사실을 알 수 있다. 이는 각속도가 일정한 회전원판의 면내 변위 및 응력에 대한 기존 연구의 가정과 일치한다.

각가속도가 회전원판의 면의 변위에 끼치는 영향을 고찰하기 위하여 각속도를 갖는 회전원판의 비선형 지

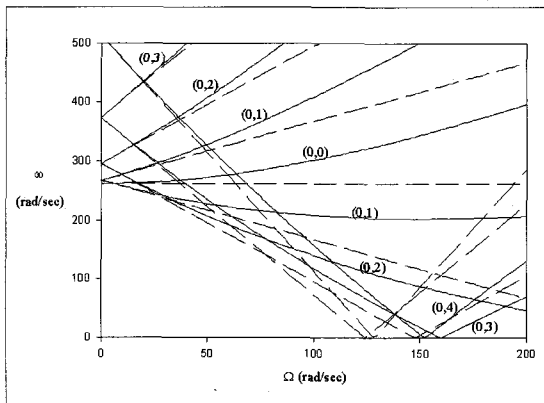


그림 4 회전속도에 대한 회전원판의 고유진동수 변화

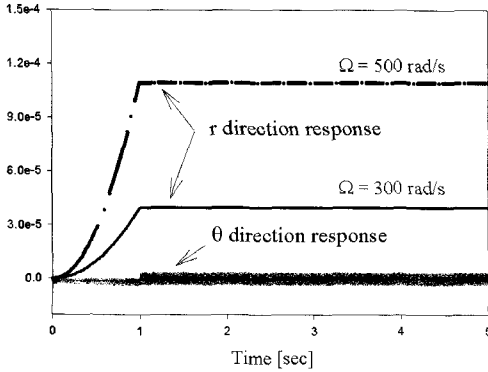


그림 5 회전속도를 1초 동안 가속시킨 후 일정하게 유지했을 때 자유단에서의 면내 변위

배방정식으로부터 동적 응답을 고찰하였다. 회전원판의 초기 속도와 변위를 모두 0으로 가정하고 면의 변위의 방향으로 단위 충격력(unit impulse)을 자유단에 가하여, 자유단에서의 면의 변위에 관한 시간응답을 구하여 그림 6과 그림 7에 도시하였다. 그림 6은 각가속도가  $3 \text{ rad/sec}^2$ 일 때의 면의 변위의 시간응답이며, 그림 7은 각가속도가  $30 \text{ rad/sec}^2$ 일 때의 면의 변위의 시간응답이다. 그림 6과 그림 7의 시간응답은 각가속도가 면의 변위의 진폭을 증가시키고 각가속도의 크기가 클수록 면의 변위에 대한 진폭의 증가율이 커짐을 보여 준다. 결론적으로 회전원판에서 각가속도의 존재는 회전원판의 동적 불안정을 야기한다.

## 6. 맺음말

이 글에서는 회전원판에서 발생되는 진동 및 동적 안정성, 그리고 각가속도의 영향에 대하여 소개하였다. 이 글에서 언급한 주요내용을 정리하면 다음과 같다.

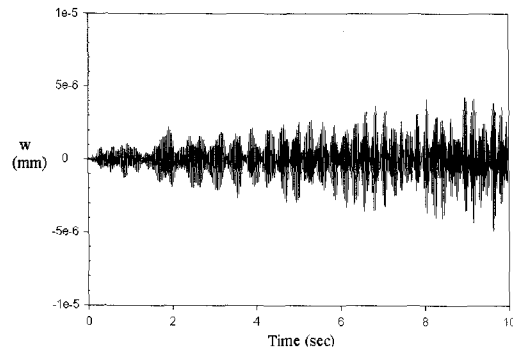


그림 6  $\dot{\Omega} = 3 \text{ rad/sec}^2$ 의 각가속도를 갖는 회전원판에 단위 충격을 가했을 때 자유단에서의 면의 변위

- (a) 회전원판에 대한 운동방정식을 유도할 때는 반드시 원심력에 의해 발생하는 박막응력의 영향을 고려하여 면의 변위에 대한 운동방정식을 유도하여야 한다.
- (b) 원판이 정지하고 있을 때의 고유진동수가 원판이 회전하면서 순진행파와 역진행파의 고유진동수로 분리된다. 그리고 순진행파의 고유진동수는 회전속도가 증가함에 따라 커지나, 역진행파의 고유진동수는 회전속도의 증가에 따라 작아진다.
- (c) 역진행파의 고유진동수가 0이 될 때의 원판의 회전속도를 임계속도라고 부르며, 원판의 회전속도가 임계속도와 같게 되면 회전원판이 불안정하게 되기 때문에 임계속도를 피해야 한다.
- (d) 회전원판의 각가속도는 면의 변위의 진폭을 증가시키고 각가속도의 크기가 클수록 면의 변위에 대한 진폭의 증가율이 커진다. 따라서 회전원판의 동적 불안정을 줄이기 위해서 각가속도의 크기를 제한할 필요가 있다.

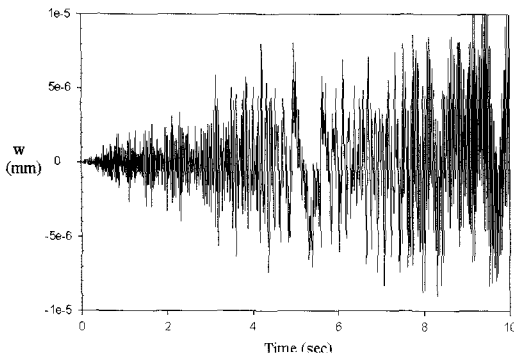


그림 7  $\dot{\Omega} = 30 \text{ rad/sec}^2$ 의 각가속도를 갖는 회전원판에 단위 충격을 가했을 때 자유단에서의 면의 변위

## 기초강좌

## 참고문헌

- (1) Mote, C. D., 1965, "Free Vibration of Initially Stressed Circular Disks", ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 89, pp. 258~265.
- (2) Eversman, W. and Dodson, R. O., 1969, "Free Vibration of Centrally Clamped Spinning Circular Disk," AIAA Journal, Vol. 7, No. 10, pp. 2010~2012.
- (3) Adams, G. G., 1987, "Critical Speed for a Flexible Spinning Disk", International Journal of Mechanics, Vol. 29, pp. 525~531.
- (4) Mote, C. D., 1970, "Stability of Circular Plates Subjected to Moving Loads", Journal of the Franklin Institute, Vol. 290, No. 4, pp. 329~344.
- (5) Shen, I. Y., 1993, "Response of a Stationary, Damped, Circular Plate under a Rotating Slider Bearing System", ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 115, pp. 65~69.
- (6) Iwan, W. D. and Moller, T. L., 1976, "The Stability of a Spinning Elastic Disk with a Transverse Load System", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, pp. 485~490.
- (7) Benson, R. C. and Bogy, D. B., 1978, "Deflection of a Very Flexible Spinning Disk due to a Stationary Transverse Load", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 636~641.
- (8) Ono, K., Chen, J.-S., Bogy, D. B., 1991, "Stability Analysis for the Head-Disk Interface in a Flexible Disk Drive", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 1005~1014.
- (9) Chen, J. S. and Bogy, D. B., 1992, "Effects of Load Parameters on the Natural Frequencies and Stability of a Flexible Spinning Disk with a Stationary Load System", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 59, pp. 230~235.
- (10) Chung, J., Oh, J. E. and Yoo, H. H., 2000, "Non-linear Vibration of a Flexible Spinning Disc with Angular Acceleration", Journal of Sound and Vibration, Vol. 231, pp. 375~391.
- (11) Chung, J., Heo, J. W. and Han, C. S., 2003, "Natural Frequencies of a Flexible Spinning Disk Misaligned with the Axis of Rotation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 260, pp. 763~775.
- (12) Heo, J. W., Chung, J. and Choi, K., 2003, "Dynamic Time Responses of a Flexible Spinning Disk Misaligned with the Axis of Rotation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 262, pp. 25~44.
- (13) Heo, J. W. and Chung, J., 2004, "Vibration Analysis of a Flexible Rotating Disk with Angular Misalignment", Journal of Sound and Vibration, Vol. 274, pp. 821~841.

[기획 - 편집위원 이수일 : leesooil@uos.ac.kr]