

범례 제시를 통한 도형 개념 지도 방안

김 수 미* · 정 은 숙**

이 연구는 새롭게 전달될 내용이 학습자의 기존 도식을 상회하는 고차적인 경우, 예와 반례를 통해 학습되는 것이 효과적이라는 영국의 수학교육자 Skemp의 이론을 근간으로 하여, 우리나라의 실정에 맞는 도형 개념 지도방안을 구안하고자 한다. 이를 위해 범례 제시법에 관련된 선행 연구가 고찰되었으며, 개념 학습을 위한 원형 모형 이론이 고찰되었다. 또한 우리나라 7차 수학과 교과서의 도형 단원이 분석되었다. 이러한 고찰을 토대로 이 연구에서는 예와 반례를 통한 6단계 수업 모형을 고안하였으며, 4학년 아동을 대상으로 도형 영역의 수업을 실시하였다. 수업 결과, 예와 반례를 통한 지도는 아동의 성취 수준에 관계없이 도형 개념을 형성하고, 개념 간의 위계 관계를 이해하는 데 적합하였으며, 의사소통을 촉진시키는 것으로 나타났다.

1. 들어가며

수학 학습의 어려움을 가중시키는 요인 가운데 하나는 수학교과를 이루는 개념들이 추상적이라는 것이다. 영국의 수학교육자 Skemp(1989)는 개념을 우리의 감각 경험으로부터 직접 추출되는 1차 개념과 1차 개념으로부터 추출되는 2차 개념으로 구분하였으며, 수학교과를 이루는 대부분의 개념을 2차 개념, 즉 추상적 개념으로 분류하였다. 물리적 대상으로부터 추출된 1차 개념은 해당되는 예를 일상생활에서 쉽게 구할 수 있는 반면, 심적 대상으로부터 추출된 2차 개념은 적합한 예를 찾기가 쉽지 않다. 이러한 이유에서 개념 학습의 중요성을 알고 있으면서도, 수학지도에서 개념 학습이 구현되기가 쉽지 않다.

개념은 어떤 대상들이 주어졌을 때, 그 각각의 차이점을 무시하고, 그것의 공통 성질을 추상하는 사고 활동의 결과로 발생한다. 따라서 개념을 형성하기 위해서는 여러 가지 다양한 경험을 하고, 경험의 다양성 가운데 변하지 않는 본질을 추상하는 경험이 요구된다. 그러나 도형 개념 지도와 관련하여 우리나라 교과서의 기술 방식이나 교사의 지도 방식을 보면, 정의나 속성을 일방적으로 전달한 후 성질을 분석하거나 응용하는 식으로 전개되어, 도형 개념 형성을 위한 자연스러운 추상화 과정을 거치지 못하고, 정의나 성질을 암기하는 것에 그치는 경우가 많다.

이 연구는 이러한 문제점을 바탕으로, 영국의 수학교육자 Skemp가 제안한 범례 제시법을 도형 개념 지도에 적용하기 위한 방안을 마련하고자 한다. Skemp는 학습자의 도식을 상회하

* 경인교대, smkim@gin.ac.kr

** 안산초교, dfamily@hanmail.net

는 고차의 개념을 형성하기 위해서는 적절한 예와 반례를 충분히 경험해야 함을 강조하였으나, 구체적인 제시 방법 및 그 효과성에 대해 선 언급하지 않았다. 이에 본 연구에서는 수학교수·학습에서의 범례 제시와 관련된 선행연구를 고찰하고, 우리나라 수학 교과서의 도형 단원을 분석하여, 현장에서 효과적으로 적용할 수 있는 실제적인 도형 개념 지도 방안을 구안하여 제시하고자 한다.

II. 도형 개념 지도에서의 범례 제시법

1. 범례 제시법의 의미

일반적으로 개념은 대상 자체가 갖는 내포개념과 다른 대상과의 관련성을 의미하는 외연개념으로 분류할 수 있다. 따라서 하나의 개념이 제대로 정착되기 위해서는 그 개념의 속성이 내포된 ‘정례(正例)’와 더불어 개념의 속성이 내포되어 있지 않은 ‘반례(反例)’도 충분히 경험할 필요가 있다. 특히 도형 개념 형성의 초보 단계라 할 수 있는 초등학교 학생들에게는 예와 반례의 다양한 경험이 요구된다. 따라서 이 연구에서는 ‘범례’를 ‘정례’와 ‘반례’를 포괄하는 의미로 사용하기로 한다.

수학을 학습하는 모든 학습자들은 자신의 마음속에서 새로운 개념을 형성해야 한다. 이 때 교사들이 해야 할 일은 학습자들이 새로운 개념을 잘 형성할 수 있도록 도움을 주는 것이다. 개념을 전달하는 방법에는 범례 제시 방법과 설명·정의 방법이 있다. Skemp(1987)에 의하면, 이 두 가지 방법 중 어느 것이 더 효과적인가의 문제는 이해해야 할 새로운 개념이 학습자의 기존 도식과 어떤 위치 관계에 있는

가에 달려있다. 즉 새 개념이 현재 학습자가 가진 도식과 같거나 더 낮은 수준일 때와 현재 학습자가 가진 도식보다 더 높은 수준일 때가 있으며, 이 두 가지 경우는 구분이 되어야 한다는 것이다.

일상생활에서 볼 수 있는 대부분의 예들은 첫 번째 경우에 해당된다. 새 개념은 우리 모두가 공유하는 물리적 환경에서 직접 추출된 일차 개념에 의존하거나 혹은 우리 모두 공유하는 사회적 환경, 독서, TV나 라디오 등을 통해 추출된 저차원의 2차 개념에 의존한다. 한 아동이 타조가 무엇이나고 물으면, ‘긴 다리와 짧은 날개를 지닌 큰 새다, 그래서 빨리 달릴 수는 있어도 날 수는 없다’라고 설명한다. ‘새’, ‘날개’, ‘다리’, ‘난다’, ‘달리다’와 같은 개념은 대부분의 아동들에게 친숙하기 때문에, 이 설명은 비교적 성공적이다. 이처럼 일상생활에서는 설명 방법이 아주 많이 활용되기 때문에 교사는 학생을 가르치는데도 이 방법을 사용하며, 과목에 따라서는 이 방법이 효과적이기도 하다.

그러나 수학은 그렇지 않다. 해가 거듭함에 따라 학생들은 그들이 이미 알고 있는 것보다 더 고차원의 새로운 개념을 학습해야 한다. 그래서 수학을 가르치는 교사는 첫 번째의 학습 상황, 즉 설명으로 가능할 때와 두 번째 학습 상황, 즉 설명으로 통하지 않을 때를 구별해야 한다. Skemp(1989)는 두 번째 학습 상황이라 판단되면, 적절한 예를 통해 새로운 개념을 전달해야 하며, 이 때 교사는 고차원의 개념에 필요한 저차원의 보조 개념을 학습자가 이해하고 있는지 확인해야 한다. 특히 예를 제시할 때는 다음 두 가지 사항을 고려해야 한다 : (1) 개념에 속하는 것과 속하지 않는 것을 분명히 해야 하며, (2) 매우 밀접하거나 서로 다른 개념들을 구별할 줄 알아야 한다. 즉 새로운 개념을 예

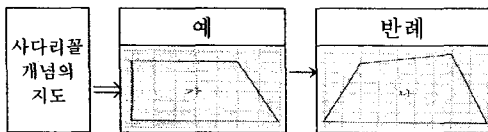
로써 전달할 경우, 예와 더불어 반례를 제시하는 것이 개념을 명확하게 이해하는 데 도움이 된다는 것이다.

2. 범례 제시법의 유형

범례 제시법은 계시적(繼時的) 제시법, 초점(焦點) 제시법, 동시 제시법의 3가지 방법으로 나누어 생각해 볼 수 있다(박성택, 1996).

가. 계시적(繼時的) 제시법(successive presentation)

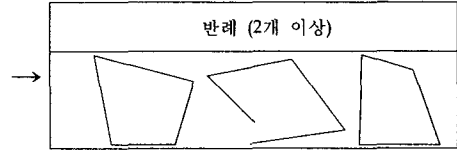
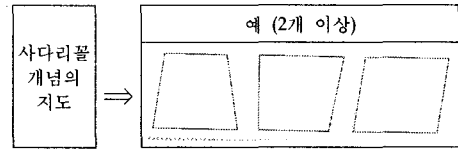
계시적 제시법은 개념에 해당하는 예와 반례를 하나씩 차례대로 보여주는 방법이다. 이 방법은 한 번에 하나의 자료가 제공되기 때문에, 비교적 방해 요소 없이 개념을 자세하게 관찰할 수 있다. 또한 학생들이 연속적으로 자료들의 성질을 비교하기 위해서는 앞에서 제시된 자료들의 특징을 머릿속에 기억해야 하기 때문에, 학생들 스스로의 탐구 활동을 고무할 수 있다.



[그림 II-1] 사다리꼴 개념의 지도에서 계시적 제시법의 활용의 예

나. 초점(焦點) 제시법(focus presentation)

초점 제시법은 정례를 모아 보여주고 난 뒤 반례를 보여주는 방법이다. 이 방법은 계시적 제시법과는 달리 정례에 해당하는 자료를 무더기로 보여주고 반례에 해당하는 자료를 무더기로 보여주게 된다. 이 때 학생들은 정례에 해당하는 자료들의 공통적인 특징을 제시된 정례 및 반례를 통해 추상하게 된다.



[그림 II-2] 사다리꼴 개념의 지도에서 초점 제시법의 활용의 예

다. 동시 제시법(simultaneous presentation)

동시 제시법은 정례와 반례를 혼합하여 동시에 제시하고, 일정한 속성에 해당하는 것을 찾거나 분류하게 하는 방법이다. 현행 7차 교육과정의 도형 영역의 교과서에서 범례 제시는 모두 동시 제시법을 사용하고 있다.

예와 반례 동시 제시 (제시 비율 → 3 : 1)	사다리꼴
	가, 나, 라

[그림 II-3] 사다리꼴 개념의 지도에서 동시 제시법의 활용의 예

3. 범례 제시 학습의 효과성

범례 제시를 통한 수학 지도의 효과성은 몇몇 연구자들에 의해 논의되거나 검증되었지만, 이 논문에서 제시한 세 가지 범례 제시법의 효과성을 비교 분석한 연구는 매우 드물다. Dewey(1933)는 「사고하는 방법」에서 개념 형성을 위해 유사(likeness)한 것과 비유사(unlikeness)한 것을 동시에 제시하여 그 차이점을 검토시키면 보다 명확한 개념을 형성시킬 수 있고 유력한 논증도 할 수 있다고 하였다(박성택, 1996). Skemp(1989) 역시 개념의 속성의 정도에

따라 계열성을 지키고, 정례와 반례를 동시에 제시하여 찾아내게 하는 연습을 하면 보다 효과적인 개념형성학습을 할 수 있다는 점을 주장하고 있다. 그러나 여기서 말하는 동시성이란 것이 이 논문에서 제시한 동시 제시법이라고 보기는 어렵다. 이 두 학자들이 말하는 동시성이란 하나의 개념을 제공할 때, 예와 더불어 반드시 반례를 제시하라는 의미로 해석하는 것이 타당할 것이다.

개념 지도에 있어 예와 반례를 모두 제시하는 것에 대한 효과성은 심리학자 Hutten Locker에 의해서도 입증되었다. 그녀는 연산의 교환성을 이해시키는 실험수업에서 정례와 반례의 제시방법에 따른 학습 효과를 비교하여, 다음과 같은 결과를 도출했다(박성택, 1996).

<표 II-1>를 보면, 정례만 또는 반례만 제시하는 것보다는 정례와 반례를 모두 제시하는 것이 효과적임을 알 수 있다. Hutten Locker는 이에 덧붙여 범례는 반드시 구체적인 실례일 필요가 없으며, 너무 많은 범례를 제시할 필요 없이 수학적 개념 형성에 꼭 필요한 정선된 범례만 제시하는 것이 바람직하다고 했다. 이상의 내용을 통해 수학의 개념 형성에 있어 예를 통해 지도하는 경우, 반드시 반례를 포함시키는 것이 효과적임을 알 수 있다.

계시적 제시법, 초점 제시법, 동시 제시법의 효과성에 대해서는 아직까지 어떤 결론을 내릴 정도의 연구 성과가 축적된 것은 아니다. 박성택(1996)의 연구에서는 국내외의 연구가 대체로

동시 제시법을 지지하며, 동시 제시법의 경우 정례와 반례의 비가 3:1이 적당하다고 기술되어 있으나, 뒷받침 자료가 명확하지 않다.

한편 미국의 수학교육 관련 책자에서는 초점 제시법을 소개하는 경우가 많다. 미국 여학생을 위한 책자 「Math for Girls and Other Problem Solvers」(Downie, Slesnick, & Stenmark, 1981)와 초등교사 교육용 책자인 「Helping Children Learn Mathematics」(Reys, Suydam, Lindquist, & Smith, 1999)에서는 도형 개념 도입에 있어 초점 제시법을 사용하고 있다.

이상의 논의를 통해 예와 반례를 모두 제시하는 것은 도형 개념 학습에 있어 매우 효과적이지만, 예와 반례를 어떤 방식으로, 어느 정도 제시하는가에 대한 문제는 앞으로 체계적인 연구가 필요한 부분이라 생각된다.

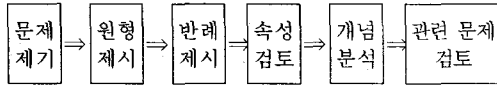
4. 범례 제시법을 도형 개념 지도에 적용하기 위한 수업 모형

개념 학습 모형은 일반적으로 속성 모형, 원형 모형, 상황 모형으로 구분되며, 이 가운데 원형 모형이 범례 제시법과 맥을 같이 한다. 원형 모형은 속성 모형의 대안으로 등장했다. 개념은 대상의 속성에 의해 표현되는 것이 아니라 가장 대표적인 예에 의해서 표현된다고 주장한다. 고전 모형은 개념의 속성을 제시함으로써 개념을 이해하지만 원형 모형은 개념의 대표적인 예를 추상적으로 구성해서 제시한

<표 II-1> 범례 제시 방법에 따른 연산의 교환성 학습 결과

범례 제시 방법	M(12점 만점)	SD
정례 → 정례	9.3	2.4
정례 → 반례	11.4	1.8
반례 → 정례	11.0	1.8
반례 → 반례	8.0	2.5

다는 점에서 다르다. 또한 원형 모형은 속성을 잘 찾아내기 힘든 범주를 효과적으로 표상할 수 있다는 장점이 있다. 따라서 추상적인 개념을 지도하기에 적합하며, 다음과 같은 6단계로 진행된다(윤기옥 외, 2002).



[그림 II-4] 원형 모형(윤기옥 외, 2002).

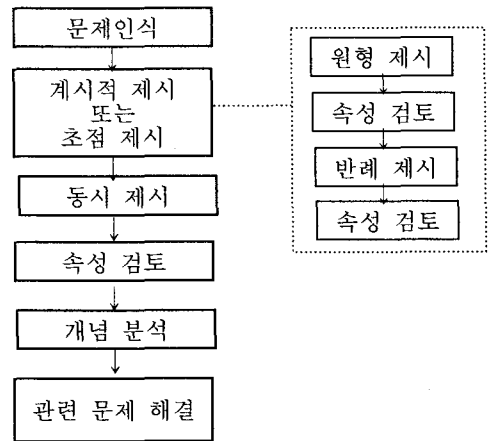
이 모형에서는 원형과 반례가 두 단계에 걸쳐 제시된다. 즉 동시에 제시되지 않기 때문에, 제시된 원형과 반례의 수에 따라 계시적 제시법이나 초점 제시법을 적용하기에 적합하다. 그러나 기존의 연구가 대체로 동시 제시법을 지지할 뿐만 아니라 계시적 제시법의 경우 단 하나의 원형과 단 하나의 반례를 통해 개념을 도출하도록 되어있어, 자칫 오개념을 유발할 소지가 있다. 따라서 이 연구에서는 이러한 문제점을 극복하기 위해, 개념 도입의 전반부에는 계시적 제시법과 초점 제시법을 주제에 따라 택일하고, 후반부에는 동시 제시법을 제공함으로써, 학습자들이 다양한 예와 반례를 제공받을 기회를 가지도록 계획하였다.

한편 Hilda Taba는 개념형성과 관련된 교수 전략으로 (ㄱ)목록과 열거, (ㄴ)집단화, (ㄷ)명명, 범

주화를 구분하고, 각각에 적합한 발문을 <표 II-2>와 같이 제안하였다(윤기옥 외, 2002).

목록과 열거, 집단화의 내용을 보면, 주어진 자료의 속성을 찾는 데 도움이 되는 것이며, 명명, 범주화의 내용은 자료의 속성을 찾은 이후, 개념을 정착하거나 개념간의 위계를 세우는 데 도움이 되는 것이다. 앞서 제시한 원형 모형의 단계와 비교해 보면, 속성 검토 단계에서는 목록과 열거, 집단화가, 개념 분석 단계에서는 명명, 범주화의 활동이 요구된다 하겠다.

이상의 고찰을 바탕으로 본 연구에서는 도형 개념 지도를 위한 6단계 수업 모형을 [그림 II-5]와 같이 설정하였다.



[그림 II-5] 본 연구의 예와 반례를 통한 도형개념 지도 모형

<표 II-2> Taba의 개념형성 교수 전략

표면적 활동	내면적인 지적 조작	유도 질문
1. 목록과 열거	변별	무엇을 보았나? 들었나? 주목했나?
2. 집단화	공통성질 확인하기 추상화하기	어떤 것을 함께 묶을 수 있나? 어떤 기준에서?
3. 명명, 범주화	위계 결정하기	이 집단을 무엇이라 부르겠나? 무엇이 무엇에 속할까?

이 모형은 기본적으로는 원형 모형에 근간을 두고 있으나 다음 세 가지 측면에서 원형 모형과 구별된다. 첫째, 개념형성 전반부에는 예와 반례가 차례로 제시되는 계시적 제시법이나 초점 제시법을 사용하고, 개념형성 과정 후반부에는 예와 반례가 동시에 제시되는 동시 제시법을 사용하도록 고안하였다. 즉 하나의 개념 전달에 있어 두 가지 범례 제시 방법을 적절하게 혼합하여 활용함으로써, 제시 방법에 따른 효과성을 극대화하고자 하였다. 둘째, 예나 반례 등이 제시될 때마다 속성을 검토하는 단계를 설정하여, 학습자로 하여금 주어진 자료의 공통점과 차이점을 추측하고 반성할 수 있는 탐구 기회를 충분히 제공하고자 하였다. 셋째, 개념의 용어를 처음부터 제공하지 않고, '가 도형', '나 도형'과 같은 식으로 사용하다가 수업의 후반부인 '개념 분석' 단계에서 아동으로 하여금 용어를 직접 만들어 보도록 하는 경험을 제공하도록 계획하였다.

III. 교과서 분석

예와 반례 제시를 통한 도형 개념 지도 방안을 마련하기 위해 선행되어야 할 부분은 교

과서 분석이다. 따라서 이 장에서는 현행 초등학교 4학년 교과서의 도형 영역을 분석해 보고, 그에 따르는 시사점을 도출해 보고자 한다.

1. 교과서 분석 증거

가. 개념 전달 방법

이 연구에서는 개념 전달 방법으로 (1)설명과 정의의 통한 방법과 (2)예와 반례를 통한 방법으로 나누었으며, 현행 교과서의 도형 영역이 이 가운데 어떤 방식에 해당하는지 분석하기로 한다.

나. 범례 제시 유형

개념을 전달하는 방식이 예와 반례를 통한 방법이라면, 이 연구에서 제시한 범례 제시법의 세 가지 유형인 계시적 제시법, 초점 제시법, 동시 제시법 가운데 어떤 유형에 해당되는지 분석하기로 한다.

다. 예와 반례의 비율

개념 도입을 위해 교과서에 제시된 예와 반례의 개수를 살펴보고, 그 비율이 어떻게 구성되었는지 분석하기로 한다.

<표 III-1> 4학년 교과서 도형 단원 전개 방식

단계	주제	전개방식
4-가	이등변삼각형, 정삼각형, 예각과둔각, 예각삼각형, 둔각삼각형	활동1⇒약속하기⇒익히기⇒활동2⇒익히기
4-나	사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 다각형, 정다각형	생활에서 알아보기⇒활동1⇒약속하기⇒활동2⇒익히기

2. 교과서 분석의 실제

가. 개념 전달 방법

4학년 교과서는 단계별로 내용 전개 방식이 다음과 같이 두 가지로 정형화되어 있는 것으로 나타났다.

<4-가>와 <4-나>는 공통적으로 ‘약속하기’에 앞서 ‘활동’을 통해 해당 개념의 예와 반례를 제시하고 있다. 따라서 순수하게 배열의 관점에서 보면 예와 반례를 통한 방법이라 생각하기 쉽지만, 활동의 구체적인 내용을 살펴보면 오히려 설명과 정의에 의한 방식에 더 가까움을 알 수 있다. 예를 들어 4학년 나단계에 제시되는 평행사변형 개념의 경우, ‘약속하기’에 바로 앞서 제시되는 활동 1에서 ‘마주보는 두 쌍의 변이 서로 평행인 사각형을 찾아보시오’와 같은 식으로, 평행사변형의 속성이 직접 제시되고, 그 속성에 해당하는 도형을 찾아보도록 하고 있다. 즉 학습자가 찾아야 할 속성을 직접적으로 그리고 명시적으로 제시해 줌으로써, 학습자 스스로 개념의 속성을 탐구할 기회를 주지 못하고 있다. 4학년 교과서의 도형 단원에서 제시된 거의 모든 ‘활동’이 ‘약속하기’와 마찬가지로 개념의 속성을 명시적으로 기술하고 있다는 점에서 볼 때, 교과서는 설명과 정의에 의한 방식이라 하겠다.

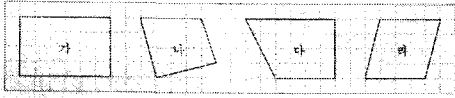

나. 범례 제시 유형 및 예와 반례의 비율
우리의 교과서가 설명과 정의에 의한 방법보다 가깝지만, ‘약속하기’에 앞서 제시된 활동에서는 반드시 개념에 해당하는 범례를 제시하고 있다. 따라서 교과서의 ‘활동1’에 제시된 범례를 유형과 비율의 관점에서 분석하였다(<표 III-3>).

분석 결과, 교과서의 ‘활동 1’의 범례 제시 방법은 모두 동시 제시법에 해당되었으며, 예와 반례의 비율은 개념에 따라 매우 다양하게 나타나 교과서 제작 시 비율이 고려되지 않았음을 알 수 있었다. 7차시 분량을 분석한 결과, 예가 반례보다 많이 제시된 경우는 예각 삼각형과 둔각 삼각형(3:1), 마름모(2:1), 다각형(7:3)이었으며, 나머지는 1:1, 1:2, 1:3으로 예보다 반례가 같거나 많게 제시된 것으로 나타났다. 또한 제시된 범례의 개수도 매우 제한적인 것으로 나타났다. 예각 삼각형과 둔각 삼각형(5개), 다각형(10개)을 제외한 대부분의 개념이 3-4개의 제한된 범례를 통해 도입되는 것으로 나타났다.

다. 시사점

교과서 분석 결과, 우리 교과서는 도형 개념 전달시 예와 반례를 제공하긴 하나, 개념의 속성을 초반부터 명시적으로 지시하는 것으로 나

<표 III-2> 4-나 평행사변형 개념 도입을 위한 활동과 약속하기

<p>활동 1</p>	<p>활동 1 마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행인 사각형을 찾아보시오.</p> 
<p>약속하기</p>	<p>약속하기</p> <p>마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행인 사각형을 평행사변형이라고 합니다.</p> 

타났다. 이러한 방식으로는 학습자가 개념의 속성을 스스로 추상하는 것을 기대하기 어렵기 때문에, 범례를 제시하되, 가급적 범례들의 공통점이나 차이점을 학습자가 스스로 탐구할 수 있는 기회를 제공하는 방식으로 교과서 및 수업이 편성되는 것이 바람직 할 것이다.

범례를 제시하는 방법에 있어서도 우리의 교과서는 친편일률적으로 동시 제시법을 사용하고 있으며, 범례에 포함된 정례의 비중도 낮은 것으로 나타났다. 따라서 이 연구에서는

제시적 제시법, 초점 제시법, 동시 제시법을 다양하게 활용해 보고 그 효과성을 살펴보기로 한다.

IV. 지도의 실제

1. 예비 수업 : 4-가 단계 『삼각형』

아동들이 수업 분위기에 적응하는 데 연습이

<표III-3> 4학년 도형 영역의 '활동 1' 범례 분석

	차시	주제	예와 반례	제시 방법	범례 수	정례 : 반례
4 가	1	이등변삼각형		동시 제시 법	4	1 : 1
	2	정삼각형			4	1 : 3
	3	예각삼각형과 둔각삼각형			5	3 : 1
4 나	1	사다리꼴		동시 제시 법	3	1 : 2
	2	평행사변형			4	1 : 1
	3	마름모			3	2 : 1
	4	다각형			10	7 : 3

필요하다고 판단되어 4-가 단계 『삼각형』을 소재로 3차시 수업을 실시하였다. 연구 대상은 경기도 안산시 A초등학교 4학년 42명 아동으로, 6명씩 7개의 이질 모둠으로 구성하여 협동 학습을 실시하였다.

수업을 실시해 본 결과, 학생들이 의외로 적은 수의 범례를 통해서도 충분히 개념의 속성을 파악하는 것으로 나타났으며, 계시적 제시법이나 초점 제시법을 동시 제시법과 아울러 사용하면 더 효과적인 것으로 나타났다.

또한 한 차시에 하나의 개념을 지도하는 경우는 계시적 제시법이 효과적이며, 예각과 둔각과 같이 상보적인 개념을 한 차시에 다루는 경우는 초점 제시법이 효과적인 것으로 나타났다.

본 차시 수업에서는 이러한 결과를 반영하여, 계시적 제시법과 초점 제시법을 주제에 따라 편성하였다.

2. 본 수업 : 4-나 단계 『사각형』과 『다각형』

본 수업은 예비 수업을 실시했던 학급 어린이를 대상으로 실시하였으며, 주제는 4-나 단계의 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 다각형과 정다각형 등 4차시 분량으로 구성하였다. 범례 제시 방법은 예비 수업 결과에서 도출된 사실에 근거하여, 정다각형은 초점 제시법과 동시 제시법을 병행하였으며, 나머지 주제는 계시적 제시법과 동시 제시법을 병행하였다. 예비 수업과 본 수업의 주제 및 범례 제시방법을 표로 정리하면 다음과 같다.

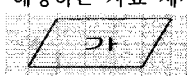
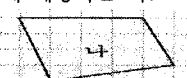
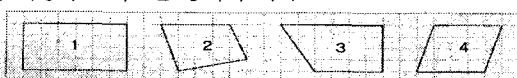
가. 교수-학습 과정안

다음은 본 수업 중 계시적 제시법으로 출발한 평행사변형 수업(<표 IV-2>)과 초점 제시법으로 출발한 다각형 수업(<표 IV-3>)의 교수-학습 과정안이다.



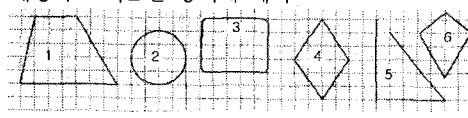
<표 IV-1> 예비 수업과 본 수업의 주제 및 범례 제시방법

단계	차시	학습 주제	범례 제시 방법
4-가	1	이등변 삼각형	계시적 ⇒ 동시
	2	정삼각형	계시적 ⇒ 동시
	3	예각 삼각형, 둔각 삼각형	초점 ⇒ 동시
4-나	1	사다리꼴	계시적 ⇒ 동시
	2	평행사변형	계시적 ⇒ 동시
	3	마름모	계시적 ⇒ 동시
	4	정다각형(정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형 등)	초점 ⇒ 동시

<표 IV-2> 계시적 제시법에 의한 평행사변형 교수-학습 과정안

학습주제	평행사변형 알아보기		차시	2/10
평행 사변형의 성질	<ul style="list-style-type: none"> · 마주보는 변의 길이가 같다. · 마주보는 변은 서로 평행이다. · 마주보는 각의 크기는 같다. · 두 대각선의 중점이 일치한다. · 점대칭 도형이다. 			
수업의 단계	교수-학습			비고
	교사	아동		
문제 인식	<생활에서 알아보기> · 계단 난간과 그 주변에서 본 사각형의 모양 그려보기	- 계단 난간과 그 주변에서 본 사각형의 모양을 그려보고 어떤 특징이 있는지 알아보기		*계단 난간의 사진
원형 제시	· 예에 해당하는 자료 제시 	- 도형 탐구하기		*준비물 : 자, 각도기
속성 검토 1	· 위에서 보여주고 있는 도형은 '가' 도형입니다. 이 도형은 우리가 이번에 공부하려고 하는 학습 목표에 해당하는 도형입니다. 이 도형이 가지고 있는 성질은 무엇인가요?	- 네 개의 변을 가지고 있다. - 네 개의 각을 가지고 있다. - 네 개의 꼭지점을 가지고 있다. - 마주보는 변끼리 서로 평행하다. - 마주보는 각끼리 서로 같다.		*제시된 자료에 대한 성질을 탐구
반례 제시	· 반례에 해당하는 자료 제시 	- 도형 탐구하기		*준비물 : 자, 각도기
속성 검토 2	· 이 도형은 '나' 도형이다. 이 도형은 우리가 배우려는 '가' 도형과는 다른 성질을 가지고 있다. 그 성질 무엇일까요?	- 평행인 변이 하나도 없다. - 마주 보는 각의 크기가 다르다.		*제시된 자료에 대한 성질을 탐구
동시 제시	· 예와 반례에 해당하는 자료를 동시에 제시 			*준비물 : 자, 각도기
속성 검토 3	· 위의 4개의 도형 중에서 우리가 배우려고 하는 도형은 어떤 것인가요? 그리고 왜 그렇게 생각하나요?	- 1번과 4번 도형입니다. - 마주보는 두 쌍의 변이 모두 평행이기 때문입니다. - 마주보는 두 각이 서로 같기 때문입니다.		
개념 분석	· 우리가 배우려는 '가' 도형은 가지고 있지만 '나' 도형은 갖지 않은 성질이 무엇일까요?	- '가' 도형은 마주보는 변끼리 서로 평행합니다. - '가' 도형은 마주보는 각끼리 같습니다.		
	· '가' 와 같은 도형은 무엇이라고 이름 지을까요?	- ○○ 사각형 - △△ 사각형 등		*도형 이름 짓기
	· 마주보는 두 쌍의 변이 서로 평행인 사각형을 『평행사변형』이라고 합니다.			*약속하기
관련문제 해결	모눈종이에 여러 가지 평행사변형을 그려보세요.			*준비물 : 모눈종이, 점종이

<표 IV-3> 초점 제시법에 의한 다각형 교수-학습 과정안

학습주제	다각형 알아보기		차시	3/10
다각형의 성질	<ul style="list-style-type: none"> · 선분으로만 둘러싸인 도형을 다각형이라고 한다. · 변의 수에 따라 다각형의 이름이 주어진다. 			
정다각형의 성질	<ul style="list-style-type: none"> · 변의 수와 꼭지점의 수 및 내각의 수는 모두 같다. · 내각의 크기가 모두 같다. · 변의 길이는 모두 같다. 			
수업의 단계	교수-학습			비고
	교사	아동		
문제 인식	<p><생활에서 알아보기></p> <ul style="list-style-type: none"> · 우리 주변의 건물 모양에서 여러 가지 도형 알아보기 	<ul style="list-style-type: none"> - 주변의 건물을 관찰하고 도형 탐구해 보기 		*여러 건물 모양이 담긴 사진
원형 제시	<ul style="list-style-type: none"> · 예에 해당하는 자료 제시 	<ul style="list-style-type: none"> - 도형 탐구하기(다각형) 		*준비물 : 자, 각도기
속성 검토1	<ul style="list-style-type: none"> · 위에서 보여주고 있는 도형들은 우리가 이번에 공부하려고 하는 학습 목표에 해당하는 도형입니다. 이 도형들이 가지고 있는 공통된 성질은 무엇인가요? 	<ul style="list-style-type: none"> - '가'도형과 '다'도형은 삼각형입니다. - '나'도형은 사다리꼴입니다. - 직선으로 둘러싸여 있습니다 등 		*제시된 자료에 대한 성질을 탐구
반례 제시	<ul style="list-style-type: none"> · 반례에 해당하는 자료 제시 	<ul style="list-style-type: none"> - 도형 탐구하기 		*준비물 : 자, 각도기
속성 검토2	<ul style="list-style-type: none"> · 위에서 보여주고 있는 도형들은 우리가 배우려는 도형과는 다른 성질을 가지고 있습니다. 이 도형들이 가지고 있는 성질은 무엇인가요? 	<ul style="list-style-type: none"> - 둥근 부분이 있습니다. - 곡선이 있습니다. - 도형 전체가 직선으로 둘러싸여 있지 않습니다. 등 		*제시된 자료에 대한 성질을 탐구
동시 제시	<ul style="list-style-type: none"> · 예와 반례에 해당하는 자료를 동시에 제시 			*준비물 : 자, 각도기 *동시 제시법
속성 검토3	<ul style="list-style-type: none"> · 위의 도형 중에서 우리가 배우려고 하는 도형은 어떤 것인가요? 그리고 왜 그렇게 생각하나요? 	<ul style="list-style-type: none"> - 1, 4, 6번 도형입니다. - 도형 전체가 직선으로 둘러싸여 있기 때문입니다. 		*동시 제시법
개념 분석	<ul style="list-style-type: none"> · '가', '나', '다' 도형은 가지고 있지만 '라', '마', '바' 도형은 가지고 있지 않은 성질이 무엇일까요? 	<ul style="list-style-type: none"> - '가', '나', '다' 도형은 도형 모두가 선분으로 둘러싸여 있지만 '라', '마', '바' 도형은 그렇지 않습니다. 		*다각형의 이해
	<ul style="list-style-type: none"> · '가', '나', '다' 와 같은 도형의 이름을 무엇이라고 지을 수 있을까요? 	<ul style="list-style-type: none"> - ○○ 도형 - △△ 도형 		*도형 이름 짓기
	<ul style="list-style-type: none"> · 선분으로만 둘러싸인 도형을 「다각형」이라고 합니다. 다각형은 변의 수에 따라 「삼각형, 사각형, 오각형, 육각형」 등으로 부릅니다. 			*약속하기
관련문제 해결	<p>서로 다른 다각형을 5가지 그려 보고, 다각형이 되는 이유를 설명해 보세요. / 다각형이 아닌 도형을 5가지 그려 보고, 다각형이 아닌 이유를 설명해 보세요.</p>			

V. 수업 과정 분석 및 결과

1. 분석 대상

수업 분석은 본 수업에 참여한 A조 아동 6명을 대상으로 녹취한 자료를 분석하였으며, 각 아동들의 특성을 간단히 정리하면 <표 V-1> 과 같다.

2. 수업 분석의 근거

도형에 대한 아동의 지식과 이해 정도를 분석하기 위한 준거로는 NCTM(1989)이 제시한 수학적 개념 이해에 대한 준거 7가지가 있다. 이 중 본 연구에서 설계한 수업에서 도출될 수 있는 내용으로 다음 4가지를 선정하였다.

- ① 개념의 성질 및 개념을 결정짓는 조건 인식
- ② 예와 반례의 확인
- ③ 개념의 비교·대비
- ④ 개념의 정의·언어화·분류

3. 분석 결과

가. 개념의 성질 및 개념을 결정짓는 조건 인식

예와 반례를 통한 도형 개념 학습은 아동들

의 성취 수준에 관계없이 각, 변, 수직과 평행 등 도형의 여러 가지 기본 성질들을 적극적으로 탐구하는 기회를 제공한 것으로 나타났다. 학생들은 주어진 예나 반례에 대해 평균 4-5개 이상의 성질을 발견해 내었으며, 그 가운데 어떤 성질이 개념을 결정짓는 조건인가에 대해서도 비교적 쉽게 추론해 내었다.

[그림 V-1]는 성취수준 '중'인 아동(C3)이 사다리꼴의 범례에 대한 속성을 열거한 것이며, [그림 V-2]는 성취수준 '하'인 아동(C5)이 다각형의 범례에 대한 속성을 열거한 것으로, 이 수업에서 아동들은 성취수준에 관계없이 다양한 속성을 발견해 내었다.

2. 선분만이 포함되어 있는 도형의 성질을 아래에 적어보도록 합니다. (오른)

* 각 도형의 개지고 있는 성질에 두가지의 경우를 적어보도록 합니다.	* 각 도형의 개지고 있는 성질에 두가지의 경우를 적어보도록 합니다.
· 각이 두개 있다	· 직각이 개 있다
· 예각이 두개 있다	· 예각이 개 있다
· 각이 없다	· 변이 네개 있다
· 사선의 개수가 2개	· 수직이 개 있다
· 변이 네개 있다	· 평행이 없다

평행이 하나가 평행이다

[그림 V-1] 아동 C3의 사다리꼴 속성 목록

2. 선분만이 포함되어 있는 도형의 성질을 아래에 적어보도록 합니다. (오른)

* 각 도형의 개지고 있는 성질에 두가지의 경우를 적어보도록 합니다.	* 각 도형의 개지고 있는 성질에 두가지의 경우를 적어보도록 합니다.
· 변이 4개	· 변이 5개
· 변이 3개	· 변이 4개
· 각이 3개	· 변이 4개
· 변이 4개	· 각이 3개
· 변이 4개	· 변이 4개

[그림 V-2] 아동 C5의 다각형 속성 목록

<표V-1> 수업 참여 아동들의 특성

대상 관점	C1	C2	C3	C4	C5	C6
학업 성취도	상	상	중	중	하	하
성격 및 학습태도	진취적. 리더십 강함	침착. 사려 깊음	의욕적. 적극적임	침착. 성실. 노력형.	적극적. 실수가 많음	성실. 개념이해가 더딤

개념의 여러 속성 가운데, 개념을 결정짓는 조건을 찾는 것이 4학년 아동에게 쉽지 않은 과제임에도 불구하고, 아동들은 스스로의 논의 과정을 통해 비교적 쉽게 결정 조건을 추론해 내었다. 다음은 평행사변형의 결정 조건을 탐구하는 장면이다.

■ 장면 1-3 ■ : 평행사변형

- C5 : 사다리꼴. 사다리꼴 맞아? 꼭지점이 4개.
 C4 : 사다리꼴이다. 맞아. 사다리꼴이야.
 C3 : 그래, 사다리꼴.
 C3 : 평행이 2개 있네.
 C1 : 한 쌍의 변이 평행이 아니고, 두 쌍의 변이 평행이다. 두 쌍의 평행이 있다.

특히 성취수준이 하(C5와 C6)인 학생들의 경우, 사다리꼴 수업에 매우 적극적으로 참여하여, 평행이 하나만 있으면 사다리꼴이므로, 두 개가 있어도 사다리꼴이라는 결론을 스스로 도출해 내기도 하였다.

■ 장면 1-2 ■ : 사다리꼴

- C1 : 1번과 4번의 공통점이 뭐라고 생각해?
 C4 : 평행인거...
 C5 : 평행이 있어야 해.
 C3 : 평행이 위와 아래에 하나씩 있어야 해. 중략
 C4 : 평행이 중요한 거야.
C5 : 평행이 하나만 있으면 가 도형과 같은 성질이야. 그런데 2개가 있어도 가 도형인지...
C6 : 하나만 있으면 된다고 했으니까 4번도 맞다니깐.
 C1 : 그래, 1번과 4번이 모두 맞는 것 같아. 그치?

아동들은 사각형의 내각의 합이 360도라는 사실을 매 차시 언급하였고, 이를 도형의 성질 탐구에 활용하려고 하였으며, 중국에는 평행사변형이나 마름모의 대각의 크기가 같다는 사실을 도출해 내었다. 그러나 변의 길이에 대한

성질에는 주목하지 못하는 경향이 나타나 교사가 발문이나 힌트를 제공해야만 했다.

■ 장면 1-3 ■ : 평행사변형

- C4 : 사각형이잖아. 사각형이면 360도잖아.
 C1 : 다시 재어봐야겠어. 105도.
 C3 : 4개의 각을 다 더해서 360도가 되어야 한다니깐.
C1 : 각도가.... 105도, 75도, 105도, 75도. 여기에 적자. 같은 각이 2개씩 있다.
 중략
 C3 : 이제 끝났다.
 T : 다른 성질 없어요? 길이는 어떨까?
 C1 : 길이 재보자.
 C3 : 내가 잰거야. 8.1, 8.2... 8.1이 2개, 8.2가 2개.
 C1 : 똑같은 길이가 2개씩이구나.
 C5 : 신기해. 왜 똑같지?

이 수업에서 아동들은 몇 개의 예가 한 번에 제시되는 초점 제시법 보다 한 개의 전형적인 예가 제시되는 계시적 제시법을 더 쉬워하는 것으로 나타났다. 특히 정다각형의 경우, 자와 각도기를 사용하여 도형을 탐구하도록 하였으나, ‘모든 변의 길이가 같다’는 사실은 찾아낸 반면, ‘모든 각의 크기가 같다’는 조건은 스스로 찾아 내지 못했다. 탐구 과정 중, 아동 C3는 지난번에 한 것(계시적 제시법)이 더 쉽다는 반응을 보였는데, 이는 아마도 여러 개의 도형에서 공통 성질을 찾아내는 활동이 한 개의 도형을 탐구하는 활동보다 더 어렵게 느껴지기 때문일 것이다.

나. 예와 반례의 확인

예와 반례를 구분하는 것은 개념의 이해를 평가하는 중요한 기준이 된다. 이 수업은 매 차시 예와 더불어 반례를 제시하도록 고안되었기 때문에, 아동들은 대체로 예인 것과 예가 아닌 것을 잘 구분하였다. 특히 예인 것과 아

년 것을 묻고 대답하는 과정에서 개념의 결정 조건이 자연스럽게 논의되었고, 이를 통해 아동들은 개념을 정립하고, 교사는 아동의 오개념을 점점 및 교정하는 기회를 가질 수 있었다. <장면 2-1>은 아동들이 사다리꼴인 예와 아닌 반례를 잘 구분하고 있음을 보여 준다. 뿐만 아니라 아동들은 사다리꼴이 되지 않는 이유도 정확하게 설명하였다. <장면 2-2>에서 아동들은 사다리꼴을 결정짓는 데 직각이 반드시 필요하지는 않다고 말하고 있다. 수업 전반에 걸쳐 ‘직각’은 아동들이 도형을 인식하는 중요한 기준으로 작용하였으나, 직각이 사다리꼴의 결정 조건이 아님을 정확하게 인지하고 있음을 알 수 있었다.

▣ 장면 2-1 ▣ : 사다리꼴

T : 가 도형과 같은 성질을 가진 도형은 어떤 것이라고 생각하나요?

C's : 1번과 4번이요.

T : 왜 그렇게 생각했니?

C3 : 평행이 하나가 있어요.

T : 그래, 도형에서 평행이 하나가 있으면 가 도형과 같은 성질이 될 수 있겠구나.

C2 : 네, 2번과 3번은 오늘 우리가 배우려는 도형이 아니에요.

C4 : 평행이 없어요.

▣ 장면 2-2 ▣ : 사다리꼴

T : 사다리꼴은 한 쌍의 변이 평행이면 된다고 했죠? 여기에 직각이 있다고 해보자. 그러면 이 도형은 사다리꼴인가? 아닌가?

C's : 사다리꼴.

T : 왜 사다리꼴이죠?

C1 : 위와 아래의 변이 서로 나란히 있기 때문
예요.

다각형을 탐구하는 과정에서도 모든 학생들이 ‘꼭선과 직선’, ‘열림’과 ‘닫힘’의 성질을 이용하여 다각형인 것과 아닌 것을 쉽게 구분하

였다. 특히 수학학습에 자신감을 상실한 학생 C6이 수업에 적극적으로 임했던 것이 인상적이었다.

▣ 장면 2-5 ▣ : 다각형

T : 1번부터 6번까지 도형을 살펴보고 여러분들이 가, 나, 다 도형과 같은 성질을 가지고 있는 도형이 무엇인지 찾아보도록 하세요.

C1 : 뭐니? 1번, 4번, 5번. / C3 : 좋아, 좋아.

C2 : 직선과 곡선으로 보면 돼. / C1 : 우리가 배우려는 도형. 직선이잖아, 직선.

C3 : 3번 아니야? / C1 : 곡선이잖아.

C2 : 그러니까 우리가 배우려는 도형은 곡선이 없어야 하잖아.

C3 : 가, 나, 다 도형이라고 하셨잖아. 직선... 직선...

C1 : 1번, 4번, 6번. / C3 : 그래.

T : 왜 그럴까? 2번은 안돼요? / C6 : 안돼요. 꼭선이 있어요.

T : 그렇지, 2번은 왜 안 될까? 사각형같이 생겼는데...

C6 : 끝에 꼭선으로 되어 있어요. / T : 그럼 5번은?

C6 : 이건 끝이 이어져있지 않아요.

다. 개념의 비교·대비

예와 반례를 통한 수업은 개념 간의 관계를 파악하는 데도 효과적인 것으로 나타났다. 아동들은 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 다각형, 정다각형의 다양한 속성을 탐구하는 과정을 통해, 도형의 성질들을 비교하고 대비하는 경험을 가지게 되었으며, 이로부터 개념 간의 위계 관계를 명확하게 이해할 수 있게 되었다. 아동들에게서 가장 명확하게 드러난 관계는 ‘사다리꼴, 평행사변형, 마름모는 사각형이다’라는 것과 ‘평행사변형은 사다리꼴이다’라는 것이다. 그러나 ‘마름모는 평행사변형이다’라는 사실은 아동이 스스로 탐구해 내지 못해 교사가 발문과 힌트를 제공하여 이를 도출해 내었다.

▣ 장면 1-4 ▣ : 마름모

T : 한 쌍의 변이 평행이면 사다리꼴이라 했죠? 그러면 이 도형은 사다리꼴이 맞나요? 틀리나요?

C2 : 사다리꼴에 해당되요.

T : 그 다음에 두 쌍의 변이 평행이면?

C's : 평행사변형.

T : 그럼 가 도형은 평행사변형이 될까요?

C's : 돼요.

C1 : 마주보는 두 쌍의 변이 서로 평행이에요.

T : 그러니까 사다리꼴도 되고, 평행사변형도 되고, 거기에다가 어떤 성질을 가지고 있으면 네 변의 길이가 같았어요.

아동들이 마름모를 평행사변형의 관점에서 파악하지 못하는 것은 도형의 이름 짓기 활동에서도 그대로 재현되었다. 아동들은 사다리꼴을 '위아평사각형', 평행사변형을 '두 쌍 평행사각형', 마름모를 '네 변 길이 사각형' 등과 같이 '사각형'의 관점에서 명명하였다. 또한 평행사변형을 '두쌍 평행 사다리꼴'로 명명하여 평행사변형을 사다리꼴의 관점에서 이해하고 있음을 알 수 있었다.

그러나 마름모를 '다이아몬드 사각형', '보석처럼 같은 길이 사각형' 등과 같이 명명한 것으로 보아, 마름모를 평행사변형의 관점에서 보는 것을 여전히 어려워하는 것으로 나타났다.

라. 개념의 정의 · 언어화 · 분류

이 연구에서는 매 차시 후반부에 아동들이 도출한 도형의 속성에 근거하여 도형의 이름을 짓는 활동을 하도록 한 후, 교과서의 약속하기의 내용을 확인하고 정리하도록 하였다. 아동들은 성취 수준에 관계없이 이 활동에 매우 적극적이었으며, 앞에서 이미 논의된 바와 같이 도형 간의 관계와 도형의 속성을 적절히 이용하여 재미있는 용어를 만들어 내었다. 또한 도

형의 이름을 만드는 과정에서 아동들의 오개념이 노출되기도 하였으나, 모둠 활동을 통해 오개념이 교정되기도 하였다.

▣ 장면 4-1 ▣ : 사다리꼴

C3 : 평행수직사각형.

C1 : 그건 옳지 않아, 가 도형에는 수직이 없는 걸?

C3 : 맞아, 그럼 평행만 넣으면 어때? / C1 : 평행사각형.

C6 : 평행 삼각형이라고 썼다.(모두 웃는다) 중략

C3 : 위와 아래 평행이 있다. 위아평 사각형. /

C4 : 아~

C5 : 위아평사각형. 이름이 이상해. / S3 : 위아평 사각형. 나 이 이름 맘에 든다.

C1 : 우리 조 이름 정해야 돼. 평행이라는 말이 중요한 것 같아. 위 아래 평행인 사각형? 평행 사각형? / C5 : 360 평행 사각형.

C6 : 평행 사각형으로 하자. 위 아래 평행 사각형.

C5 : 위 아래 평행이 있지만 수직이 없는 360도 사각형. 재밌다.

5. 아직까지 무리가 없는 도형의 이름이 없네요. 무리가 없도록 '가'의 같은 도형의 이름을 지어서 만들어 보세요. 그리고 모둠에서 가장 좋다고 생각하는 도형의 이름 1개를 정하게 합니다. (개인-모둠)

4. 수직이 없는 것을 무리가 없는 도형의 이름을 무엇이라고 지어줄까요? 도형의 수직적인 이름을 적어봅시다. 그리고 약속하기를 위한 배운 내용을 정리해 봅시다. (개인)

약속하거	약속하거
사다리꼴	마름모는 네 변의 길이가 서로 평행한 사다리꼴을 사다리꼴이라고 합니다.

[그림 V-3] C5의 사다리꼴 이름 짓기 및 약속하기 활동

VI. 마치며

이 연구에서는 도형 개념 전달 방법에 있어 새로운 시도라 할 수 있는 예와 반례를 통한 지도를 계획하고 적용하여 그 효과성을 검증하고자 하였다. 범례 제시법은 계시적 제시법, 초점 제시법, 동시 제시법으로 구분되나, 이 연구

에서는 개념 도입 전반부에는 계시적 제시법이나 초점 제시법을 택일하여 적용하였으며, 후반부에는 동시 제시법을 적용하는 식으로 두 가지 제시법을 한 차시에 적절하게 혼합하여 사용하였다. 수업은 성취수준이 상, 중, 하인 아동들이 고루 편성된 모둠 활동을 중심으로 전개되었으며, 수업 결과 성취수준에 관계없이 모든 아동들이 수업에 적극적으로 참여하여, 이 수업이 도형 개념 형성 뿐만 아니라 수학적 의사소통과 수학에 대한 태도 향상에도 상당히 기여한 것으로 나타났다.

특히 이 연구에서는 성취 수준이 하인 아동들의 활동이 고무적이었으며, 학습 성과 또한 컸는데, 이는 새롭게 전달될 개념이 학습자의 기존 도식 보다 상회하는 수준인 경우 예와 반례를 통해 학습하는 것이 설명과 정의를 통해 학습하는 것 보다 효과적이라는 Skemp의 입장을 지지하는 것이기도 하다.

예와 반례를 통한 학습은 개념들 간의 관계를 이해하는 데도 도움이 되는 것으로 나타났다. 아동들이 사다리꼴, 평행사변형, 마름모 등을 사각형의 관점에서 고찰한다든지, 평행사변형을 처음 본 아동들이 망설임 없이 사다리꼴이라고 이야기한다든지 하는 장면을 통해, Skemp가 지향하는 관계적 이해가 촉진되고 있음을 알 수 있었다.

이 연구에서는 또한 학습 주제에 따라 계시적 제시법과 초점 제시법을 구분하여 적용하였으며, 그 결과 아동들이 한 번에 하나의 범례가 제시되는 계시적 제시법을 한 번에 몇 개의 범례가 제시되는 초점 제시법 보다 쉬워하는 것으로 나타났다. 그러나 예각, 직각, 둔각과 같이 여러 유형을 한 차시에 다루어야 하는 경우는 초점 제시법이 효과적인 것으로 나타났다. 이 연구에서는 동시 제시법을 개념 형성 후반부에 투입하여, 아동으로 하여금 자신의

생각을 다시 한 번 검토해 보게 하는 절차로 이용하였다. 그러나 동시 제시법 역시 개념 형성 전반부에 사용가능하므로, 차후 연구에서는 그러한 가능성이 탐색되기 바란다.

마지막으로, 예와 반례를 통한 수업의 성패는 예와 반례의 적합성에 있다 해도 과언이 아니다. 이 연구의 결과에 의하면, 너무 많은 수의 범례 제시는 아동에게 어려움을 가중시키는 요인으로 작용할 수 있기 때문에, 도형 지도에 적합한 예와 반례의 종류와 개수에 대해 보다 체계적인 연구가 이루어져야 할 것으로 본다.

참고문헌

- 박성택(1996). Skemp 이론에 따른 수학교육 효과 분석. **대한수학교육학회 논문집**, 6(2), 1-58.
- 윤기옥 외(2002). **수업모형의 이론과 실제**. 학문출판(주)
- Dewey, J. (1995). **사고하는 방법**. (임한영, 역). 서울: 범문사. (영어 원작은 1933년 출판).
- Downie, D., Slesnick T., & Stenmark J. K. (1981). *Math for girls and other problem solvers*. EQUALS, Lawrence Hall of Science, University of California.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- Reys, R. E., Suydam M, N., Lindquist, M. M., & Smith N. L. (1999). **초등 수학 학습 지도의 이해**. (강문봉 외, 역). 서울: 양서원.(영어 원작은 1999년 출판).
- Skemp, R. R. (1987). *The psychology of lear-*

ning mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the primary school*. Routledge.

Building Geometrical Concepts by Using both Examples and Nonexamples

Kim, Soo Mi (Geongin National University of Education)

Jung, Eun Suk (An-San Elementary School)

Skemp supposed that it is effective to use both examples and non-examples when new concepts which are upper level than learner's schema are introduced. The purpose of this research is to develop a practical process of teaching geometrical concepts based on Skemp's assumption. For this, the related literatures are reviewed and the Korean textbooks(4-ga, 4-na) are analyzed with respect to method of concept formation. The

analysis tells that the textbook just explains properties of concepts or present definitions, instead of giving the chance of inquiry. So we design and apply six step process of teaching geometrical concepts to 4th graders focused on students' inquiry using both examples and non-examples. The result turns out that using examples and non-examples is highly positive to concept formation.

* **Key words** : Skemp(스کم프), concept formation(개념형성), example and non-examples(예와 반례)

논문접수 : 2005. 10. 4

심사완료 : 2005. 11. 1