韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2005. 11. 제 44권, 제 4호, 547-563.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2005, Vol. 44, No. 4, 547-563.

수학적 개념의 발생적 분해의 적용에 대하여
- 추상대수학에서의 Z_n의 경우 -

박 혜 숙 (서원대학교)
김 서 령 (서울대학교)
김 완 순 (호서대학교)

1. 서 론

1.1 들어가며

학교수학의 목표는 크게 정신도야, 실용성, 문화적 가치 및 심미성에 있다. 그 중에서 정신도야는 수학교육의 제1의 목표라 할 수 있다. 수학의 여러 과목 중에서 정신도야를 위해서 가장 적합한 과목은 논증기하라 할 수 있으나, 추상대수학의 공리적 전개도 논리적 추론을 훈련할 수 있는 좋은 과목이라 할 수 있다. 또한 Gallian (1990)이 지적한 바와 같이 추상대수학에서 사용되는 용어와 방법론은 전산, 화학, 물리, 정보교환 등에서 널리 사용될 뿐만 아니라 고등수학 분야 자체에서도 핵심적인 역할을 하기 때문에 대수학은 중요한 과목이다.

그러나 추상대수학에서의 공리적 전개방식은 추상적으로 사고하는 훈련을 경험하지 못한 학생들에게는 극복해야 할 큰 장벽임이 보고되고 있다. 일반적으로 학생들의 입장에서는 강의자가 전달하고자 하는 아이디어를 이해하기가 어렵기 때문에, Hazzan(1999)은 강의자가 학생들이 추상대수의 개념들을 이해하는 것을 도울 수 있는 방법들을 모색하고 그 중 학생들에게 개념을 도입할 수 있는 적합한 방법들을 강구하여야 한다고 하였다. 예를 들어 Herstein(1999)은 대수학을 공부함으로써 얻을 수 있는 중요한 결과들을 보여주지 않고서는 대수학을 공부하는 동기를 부여할 수 없다고 생각하여 그의 책의 각 단원마다 흥미롭고 응용 가능한 중요한 결과들을 선택하여 다루고 있다.

일반적으로는 추상대수학 그리고 특히 군의 개념을 학습하는 것이 매우 어렵다고 보고되고 있다. 실제로 학부교육에서 교수와 학생들은 군론에서 다루는 교과내용을 다룰 때와 추상적으로 사고하는 태도를 기르는 데에 큰 어려움이 있다고 말하고 있으며, Selden과 Selden (1987)은 대수학의 기본적인 개념에서 학생들이 보여주는 오류와 오 개념에 대하여 논의하였다. 또한 대수학 중에서도 상군의 학습이 어렵다고들 많이 이야기하는데, 이것은 비록 학생이 아주 구체적으로 주어진 군을 이해한다고 하더라도 그 군의 상군의 개념이 도입되었을 때에는 그 상군의 원소의 성질이 변하여 잉여류라고 불리는 원소들과 직면하여 그들 사이의 이항연산도 다루어야 하기 때문이다(Dubinsky 외, 1994).

실제로 우리는 대학교 3학년 학생들을 대상으로 현대대수학 강좌를 몇 년간 운영하면서 상군의 개념에 대한 학생들의 이해가 다른 부분에 비하여 상당히 취약하다는 것을 알 수 있었다.

특히, 개념파악이 제대로 되어 있지 않은 상군의 연산에 주목하여, 집합사이에서의 연산에 대한 학생들의 이해도를 알아보기 위하여 다음의 문제를 상위 그룹에 속한 한 대학의 수학 전공 학생 62명에게 풀어보도록 하였다. 그 결과 그 중에서 17명(27%)만이 제대로 답을 하였고 나머지 학생들은 연산이 잘 정의되어 있음을 보이는 것이 무엇인지도 모르고 있었다.

---

* 2005년 9월 투고, 2005년 11월 심사 완료.
* ZDM분류: H45
* MSC2000분류: 97D70
* 주제어: 발생적 분해, 수학적 개념, 대학수학교육.

> For $x \in \mathbf{R}$, let $[x] = \{x + 2n\pi \mid n \in \mathbf{Z}\}$, and let $S = \{[x] \mid x \in \mathbf{R}\}$. Multiply two elements $[x]$ and $[y]$ of S by letting
> $$[x][y] = [xy]$$
> Show that this multiplication is not well-defined.

따라서 본 연구에서는 그 특별한 경우로 법 n에 대한 잉여류들의 집합 $\mathbf{Z}_n$에 국한하여 학생들의 인지정도를 조사하고 그를 분석한 후 해결방안을 제시하고자 한다.

1.2 선행연구 고찰

수학교육에 관한 연구는 처음에는 영유아기/초등학생에 관한 연구가 수행되었고, 점차 중등학교의 수학학습에 관한 연구가 많이 수행되고 있다. 대학교의 수학학습에 대한 연구는 1990년대 이후 많이 수행되고 있는 실정이나, 극한 개념이나 미분방정식과 같은 해석학 관련 연구가 많고 대수학 관련 연구는 상대적으로 적은 편이다. 특히 우리나라의 대학수학교육 관련 연구는 거의 없다고 해도 과언이 아닐 정도이다. 권오남 · 주미경(2003)이 분석한 바에 의하면 1963년부터 2002년까지의 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>에 실린 총 868편의 논문 중에서 대학수학교육 관련 논문은 단 16편으로 약 1.8%에 불과하다. 위의 <표 1>은 그 분포를 보여주고 있다.

이 표에 의하면 개념적 이해분석과 관련된 논문은 계영희(1994)의 기하발달 수준과 관련된 논문 한 편뿐임을 알 수 있다. 최근에는 우리나라에서도 교사 양성 대학에서의 교육과정에 대한 일련의 연구(강미광, 2003; 박혜숙, 2003; 신준식, 2003), 신현용, 2003a, 2003b; 이강섭, 2003; 이병수, 2003; 이재학, 2003; 한인기, 2003)와 미분방정식과 관련된 권오남 · 주미경 · 김영신(2003), 테크놀로지를 활용한 고상숙(2003), 그리고 선형대수와 관련된 이상구(2004)의 논문들이 발표되고 있으나, 추상대수와 관련된 논문은 한 편도 없는 실정이다.

외국의 경우에도 1990년부터 2000년에 걸친 JRME (Journal for Research in Mathematics Education)에 실린 총 290편의 논문 중에서 대학수학교육을 다룬 논문은 21편(7.2%)이고, ESM(Educational Studies in Mathematics)의 경우는 총 316편중에서 48편(15.1%)으로 그리 많지는 않은 편이다(권오남 · 주미경, 2003).

추상대수학과 관련된 외국의 논문들은 1980년 이후에 다수 나오고 있는데, 우선 Selden과 Selden(1987)은 초등대수학에서의 오류와 오개념을 분류하였는데, 그들은 학생들의 오류와 오 개념은 대상 자체의 복잡성보다는 학생들의 수학적 기반이 약하기 때문이라고 분석하였다(Leron 외, 1995). 또, Dubinsky 외(1994)는 그들이 제시한 APOS이론(Tall, 1991; Asiala 외, 1996; Dubinsky와 McDonald, 2001 등 참조)에 근거한 대수학 수업에 대하

<표 1> 1963-2002 시리즈 A <수학교육> 대학 수학교육 논문 주제별 분포

분류 \ 년도	1982	1989	1992	1993	1994	1995	1996	1998	2000	2001	계(백분율)
수학교육과정	1	1	1	3	1						7(43.7)
교사교육				1							1(6.2)
교육공학						2	1			1	4(25.0)
수업모형							1	1	1		3(18.7)
평가											0(0.0)
문제해결											0(0.0)
개념적 이해분석					1						1(6.2)
계(백분율)	1(4.7)	1(5.5)	1(3.5)	4(13.3)	1(6.2)	2(7.4)	2(9.0)	1(5.5)	1(3.1)	1(1.8)	

여 다루었고, Leron과 Dubinsky(1995)은 컴퓨터를 활용한 추상대수학 수업의 예를 보여주고 있다. 한편, APOS 이론 중에서 process와 object에 제한하여 생각한 논문들은 Sfard(1991), Hazzan(1999), Hazzaz과 Zazkis(2005) 등이 있다.

구체적인 군이론과 관련된 주제를 다루고 있는 논문은 위수 8인 정이면체군 D_4를 다룬 Zazkis 외(1996), 군동형사상의 개념 이해를 '군, 함수, 한정기호'라는 3가지 개념으로 분해하여 살펴본 Leron 외(1995), 이항연산과 군의 개념에 대하여 다룬 Brown 외(1977), 잉여류와 상군의 개념 이해에 대하여 다룬 Asiala 외(1997) 등을 들 수 있다.

본 연구에서는 $\mathbf{Z}_n$에서의 연산의 정의에 대한 학생들의 이해정도를 파악하기 위하여 수학 전공 학생 7명을 인터뷰하고 그 결과를 분석하였다. 또, $\mathbf{Z}_n$ 개념의 발생적 분해를 하고 각 학생들을 이 틀에 맞추어 분석하고 그 해결방안을 제시하였다.

2. 이론적 배경

2.1 개념의 이해

개념이란 말은 널리 사용되지만, 이것을 정의하기는 쉽지 않다. 개념의 형성은 경험으로부터 시작된다. 추상화란 일상생활에서 우리의 경험들 사이의 유사성을 인식하는 활동이고, 분류란 이러한 유사성을 기초로 해서 우리의 경험을 함께 묶는 것을 의미한다. 추상은 영속하는 사고 변화의 한 종류이며 추상화의 결과이다. 활동으로서의 추상화와 마지막 결과로서의 추상을 구별하기 위하여 추상을 개념이라고 한다(Skemp, 1987; 박임숙, 2002 재인용). 이러한 개념을 형성하기 위해서는 여러 가지 활동을 경험해야 하는데, 이때의 활동은 일상생활에서의 구체적인 경험일 수도 있지만 기존에 습득한 수학적 기초지식의 활용일 수도 있다. 이것들이 자신의 논리적 사고와 결합되고 반영적 추상화를 통하여 하나의 수학적 개념을 얻을 수 있다.

그러므로 수학적 개념의 의사소통은 주고받는 사람 모두에게 매우 어렵다. 즉, '추상적'인 수학적 대상은 그것이 반영하는, 또한 적용될 수 있는 '구체적'인 현실 세계와 대응되면서 존재한다. 사실상, 하나의 수학적 개념은 그것에 대한 추상적이고 형식적인 정의와 구체적인 예로 이루어진다고 말할 수 있을 것이다(박임숙, 2002).

2.2 인지적 장애

학생들은 초·중등학교를 거치면서 많은 선행지식을 가지고 있는데 새로운 개념을 형성하는 문제 상황에 접하였을 때에 그에 해당하는 선행지식을 떠 올려 적용하여 해결하고자 한다. 이때 그 선행지식은 긍정적으로 작용하여 쉽게 새로운 개념을 형성하도록 도와줄 수도 있지만 부정적으로 작용할 수도 있다. 즉, 선행 지식의 유용성에 대한 확신 때문에 기존의 인지 구조를 변화시킬 필요성을 느끼지 못하고, 새로운 지식과 타협을 하여 왜곡된 개념 이미지를 형성하거나 기존의 지식과는 별개의 개념 이미지를 형성하기도 하는 것이다.

이와 같이 '어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용했던 지식이었고, 그래서 학생의 인지 구조의 일부가 되었지만, 새로운 문제 상황이나 더 넓어진 맥락에서는 부적합해진 지식'을 Brousseau(1983)는 '인식론적 장애'라고 부르고, Tall(1989)은 '인지적 장애'라고 부르고 있다. 그가 학생들의 장애를 별도의 이름으로 부르는 것은 학생들의 장애가 반드시 인식론적 측면에서만 기인하지 않으며, 개념의 발달의 역사에서 발견되었던 것과 매우 유사한 것이 나타난다고 하여도, 그 개념이 발달하던 과거의 상황과 현재의 상황이 매우 다른 배경적 지식을 갖고 있다는 점에서 그것을 구분하고자 한 것이다. 학생들은 이미 많은 학습 경험과 일상생활 경험을 하고 있기 때문에 대부분의 학생들이 개념의 학습을 백지 상태에서 시작하지 않는다는 점에서, 그러한 장애는 학생들이 개념을 이해하는 데에 어려움을 겪는 주요 원인이 된다고 말할 수 있다. 그러나 이러한 인식론적 장애가 학생들의 학습의 발달 과정에서 불가피하게 필연적으로 발생하는 것이며 학생들의 지식의 일부를 차지하고 있는 필수적인 구성 부분이다. 이는, 이 인식론적 장애를 새로운 지식의 구성을 방해한다고 하는 부정적인 관점에서만 볼 것이 아니라 학생들의 이해의 토대가 되는 것이고 또한 그것의 극복을 통해 더 높은 수준의 이해로 나아갈 수 있는

것으로 긍정적으로 보는 것이 필요함을 시사한다 (박선화, 1998).

2.3 개념이미지

학생들은 새로운 개념을 형성하기 위한 문제 상황에 접했을 때에 기존의 지식을 활용하여 자신의 생각을 나타내게 된다. 이때의 과정과 상호작용에 대하여 Vinner (1991)는 다음과 같이 서술하였다.

개념 명칭을 보거나 들을 때 그것은 우리의 기억을 자극하고, 개념 명칭에 의해 우리의 기억 속에 무엇인가가 떠오른다. 일반적으로 그 개념이 정의되어 있더라도 떠오르는 것은 개념의 정의가 아니다. 떠오르는 것은 소위 '개념 이미지(concept image)'라고 하는 것이며(Tall & Vinner, 1981, Vinner, 1983), 그것을 '개념 틀(concept frame)'이라고 부르는 사람(Davis, 1984)들도 있다. 어떤 개념을 획득하는 것은 그 개념에 대한 개념 이미지를 형성하는 것이며, 개념을 이해한다는 것은 그 개념 이미지를 갖는 것이라 할 수 있다. 예를 들어, 절대값에 대한 정의는 다음의 두 가지로 정의하고 있는데,

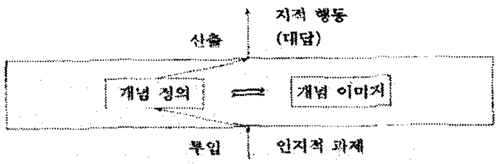
$$|x| = \sqrt{x^2}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

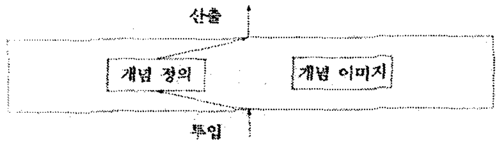
절대값의 정의를 물어보면 대부분의 학생들은 부호를 없앤 수이거나 수직선 위의 원점에서 그 수까지의 거리라고 답을 하고 있어서 개념의 정의와는 다른 개념이미지를 형성하고 있음을 알 수 있다.

한편, 수학에서는 정의가 아주 중요한 역할을 하는데, 정의는 개념 이미지를 형성하는 것을 돕는 것은 물론이고 인지적 과제를 해결하는 데 결정적인 역할을 하기도 한다. 정의는 개념이미지로 인한 많은 함정을 피해 갈 수 있게 하는 잠재력을 지닌다. 따라서 수학적 사고에서는 일상생활과는 전반적으로 다른 사고 습관이 학생들에게 필요하다.

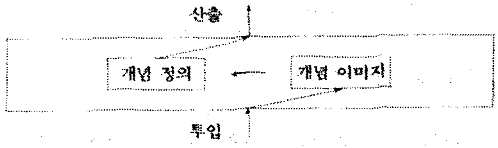
개념형성 과정뿐만 아니라 문제해결이나 과제 수행과정도 이와 유사하다. 학생이 인지적 과제를 수행할 때 개념 정의와 개념 이미지가 활성화 될 것이다. 중등학교와 대학의 많은 교사는 주어진 인지적 과제의 수행과 관련된 인지적 과정이 다음의 <그림 1> ~ <그림 3> 중의 하나로 나타날 것이라고 생각하는 것 같다.



<그림 1> 정의와 이미지 사이의 상호작용

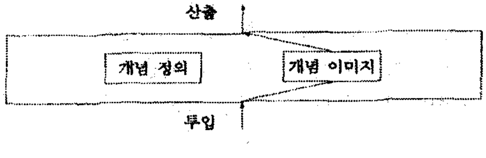


<그림 2> 순수한 형식적 추론



<그림 3> 직관적 사고를 따르는 연역

그러나 실제로 일어나는 과정을 나타내는 데 더 적절한 모델은 다음 <그림 4>와 같다. 여기서 개념 정의 부분은 비어있지 않더라도 문제해결 과정 동안 작동하지 않는 상태이다.



<그림 4> 직관적 반응

2.4 APOS 이론

피아제는 반영적 추상화가 고등 수학이나 아동의 논리적 사고 모두에 중요한 요소라는 생각을 했지만, 그의 연구는 주로 후자에 관한 것이었다. Dubinsky 외(1994)는 고등 수학적 사고에서 적용되는 반영적 추상화의 개념을 개발하기 위한 노력의 일환으로 반영적 추상화의 특징은 무엇이며, 고등 수학에서 그 특징 들이 어떤 역할을 하는지를 생각해 보고, 그것들을 조직 또는 재구성하여 수학 지식과 수학 지식의 구성에 관한 일관성 있는 APOS 이론을 세웠다. 다음은 Dubinsky 외(1994)에 서술된 APOS 이론을 소개한 것이다.

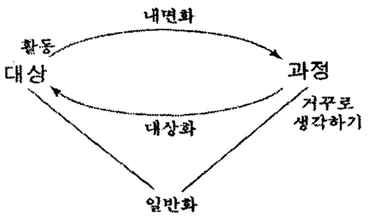
활동(action)이란 '대상'을 변환시키는 반복할 수 있는 실제적 또는 정신적 조작을 의미한다. 각 단계를 반드시 거치지 않고도 개인의 의식 속에서 총체적으로 완전한 활동이 일어나거나 일어나는 것으로 상상될 때, 활동이 과정(process)으로 내면화되었다고 한다. 이렇게 되면 학생이 새로운 과정들을 얻기 위하여, 이 과정과 다른 과정을 통합하기도 하고 기존의 과정과 새롭게 얻은 과정을 적절하게 연결시키면서 또 다른 과정을 형성하게 된다. 또한 과정은 새로운 과정을 얻기 위하여 거꾸로 활동으로 돌아가기도 한다. 과정이 활동에 의하여 변형되는 것이 가능할 때, 그 과정이 응집된 덩어리가 되어 대상(object)이 되었다고 한다.

기호의 역할과 표상적 체계는 반영적 추상화에 의하여 개념형성이 된 후에 뒤따라 나와야 한다는 것이 APOS이론에서 보는 견지이다. 특별히 학생들이 기호를 어려워하는 것은 대상으로서 형성되기 이전에 이름을 주려고 하는 데서 기인한다고 보았다. 일단 대상이 개인의 내면에 존재하게 되면 대상에 이름을 주는 데에 어려움이 없다. 표상적 체계의 해석을 위해서는 대상으로부터 그 대상이 비롯된 과정으로 돌아가는 것이 필요하다.

대상으로부터 과정으로 돌아갈 수 있는 능력이 필수적인 수학적 상황이 많이 있다. 이것은 응집된 대상이 풀어져야만 가능하다는 즉, 그 대상을 처음으로 구성하기 위하여 응집된 과정으로 되돌아가야 한다는 것이 APOS이론의 주장 중의 하나이다.

서로 관련된 과정들과 대상들을 함께 모아서 한 주제를 이룰 수 있으면 식별 가능한 쉐마(shema)를 이룬다. APOS이론에서 쉐마는 개념이 개인의 내면에 존재하는 형태를 말한다. 쉐마는 그것을 풀어서 개인이 갖고 있는 '과정'과 '대상'을 사용하여 문제 상황을 해결하는 데 사용될 수 있다. 쉐마는 '활동'과 '과정'이 적용되는 '대상'으로서 간주되기도 한다.

쉐마의 구조는 다음과 같다(Tall, 1991).



<그림 5> 쉐마와 쉐마의 구성

2.5 쉐마의 발생적 분해

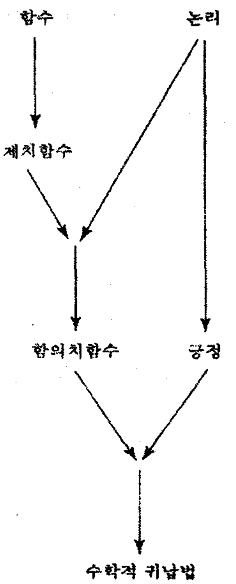
학생들의 개념 습득과정과 개념형성에 필요한 요소들을 추출하는 일이 필요하다. 특히 이것은 학생들이 일으키는 인지적 장애를 분석하고 치유하는데 더욱 필요한 일일 것이다. Dubinsky(1991)는 이와 같이 복잡한 구조를 가진 어떤 개념(쉐마)에서 한 작은 부분을 떼어내서 쉐마 사이의 관계를 조사하는 것을 그 개념의 발생적 분해(genetic decomposition)라고 하였다. 다음의 내용은 Dubinsky(1991)의 발생적 분해와 관련된 것을 요약한 것이다.

우리가 앞으로 제시할 개념에 대한 발생적 분해는 그것이 모든 학생들에게 유일한 것임을 뜻하는 것은 아니고, 학생들이 개념을 구성할 때 이용할 수 있는 한 가지 합리적 방법을 나타내는 것이다.

어떤 쉐마에 대한 발생적 분해를 할 때에는 다음의 세 가지 자원을 근거로 해야 한다. 첫째는 이러한 개념을 배우고 있는 학생들을 관찰해서 모은 심리학적 자료이다(예를 들어, Dubinsky, 1986; Dubinsky 외, 1986). 이 자료와 피아제의 아이디어를 바탕으로 구성한 APOS 이론이 발생적 분해의 두 번째 자원이다. 세 번째 자원은 각 개념들에 대한 수학적 지식이다. 발생적 분해가 그 개념을 가르치려는 수학자들의 분석 및 목적과 일치하지 않더라도, 수학교육적 관점에서 의미가 있어야 하

는 것은 중요한 문제이다.

다음 <그림 6>은 Dubinsky가 제시한 '수학적 귀납법'에 대한 발생적 분해이다.



<그림 6> 수학적 귀납법의 발생적 분해

수학에서 개념적 사고를 촉진하기 위한 수업 방법은 다음 네 단계로 정리할 수 있다.

- 특별한 주제를 학습하는 과정에서 학생들의 개념구조, 즉 개념 이미지를 알아보기 위해 학생들을 관찰한다.
- 자료를 분석하고, 이러한 자료를 이용하여 수학에 대한 수업 설계자의 이론과 APOS 이론에 따라 각 주제에 대해 학생들이 개념을 구성하리라 여겨지는 한 가지 가능한 방법으로 발생적 분해를 한다.
- 발생적 분해에서의 인지적 단계에 따라 학생들을 이끄는 수업을 설계한다. 즉 요구되는 반영적 추상화가 일어나도록 학생들은 유도할 수 있는 상황을 만들고 활동을 개발한다.
- 발생적 분해와 수업 방법을 개선하면서 이 과정을 반복하고 가능한 한 안정이 될 때까지 계속한다.

3. 연구내용

3.1 대상학생 선정

본 연구를 위하여 상위그룹에 속한 한 대학의 현대대수학 강좌를 수강한 수학전공 학생들 중에서 성적과 재수강 여부를 고려하여 다음과 같은 학생 7명을 인터뷰 대상자로 선정하였다. 재수강 학생들도 포함시킨 이유는 금년(2005년)에는 현대대수학 강좌에서 환을 먼저 다루고 군의 개념으로 들어가는 교재를 선택하여 강의하였고 작년까지는 군에서부터 시작한 교재로 강의하였기 때문에 학생들 간에 인식차이가 있을 것으로 생각하여 그 차이도 고려보고자 한 것이다.

<표 4> 인터뷰 대상학생

학생	성별	학번	수강연도		성적	비고
			2005 이전	2005		
학생 1	여	00	O	O	Ao(재수강 성적)	
학생 2	남	03		O	B+	
학생 3	여	03		O	A+	
학생 4	여	01	O	O	A-(선형대수)	졸업
학생 5	여	00	O	O	Co	
학생 6	남	99	O		Bo	
학생 7	남	02	O		B+	

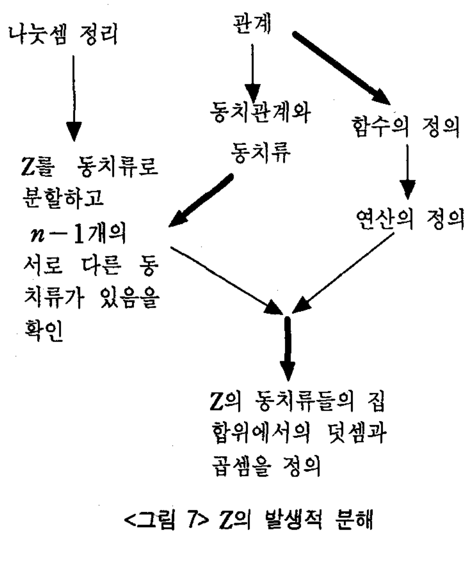
3.2 연구방법

인터뷰 대상으로 선정된 학생들을 6월 30일과 7월 1일 양일에 걸쳐서 개별적으로 인터뷰하였다. 학생들에게 먼저 강좌 내용과 관련된 몇 가지 간단한 질문을 한 후, 미리 제작된 문제를 제시하여 그 자리에서 풀도록 하였다. 학생들에게는 문제제시에 대한 사전 언질은 없었으며 개인당 인터뷰 시간은 약 2시간 정도였다. 인터뷰 내용은 학생들의 양해를 얻고 캠코더로 모두 녹화한 후, 테이프를 보고 녹취록을 작성하여 본 연구팀이 그 내용을 분석하였다. 인터뷰 내용의 1차 분석 후 개념이미지

를 형성하지 못한 학생들 중 1명을 다시 8월 18일에 불러 인터뷰하였다. 이때에도 사전에 인터뷰 내용에 대한 언질을 주지 않았고 개념형성을 파악할 수 있는 문제지를 제시하여 그 자리에서 풀도록 하였다. 이때의 인터뷰도 본인의 동의를 얻어 캠코더로 녹화한 후 분석하였다.

3.3 $\mathbf{Z}_n$의 발생적 분해

본 연구팀에서는 $\mathbf{Z}_n$의 개념이해에 필요한 요소들을 분석하고 그 계통성을 논의하여 관계, 동치관계, 동치류, 함수의 정의, 연산의 정의 등의 요소를 추출하였다. 그러나 학생들을 인터뷰한 녹취록을 1차 분석한 결과 학생들이 획득했으리라고 기대되었던 수학적 개념이 아닌 다른 개념이미지를 사용하고 있음을 알게 되었다. 이상의 상황을 종합하여, 본 연구팀에서는 $\mathbf{Z}_n$개념을 형성하기 위한 요소로 구성된 발생적 분해를 다음의 <그림 7>과 같이 제시하고, 이 틀을 사용하여 특히 굵은 선으로 표시된 부분의 학생들의 개념형성을 분석하였다.



<그림 7> Z의 발생적 분해

3.4 추상대수 관련 교재 분석

인터뷰 대상학생들의 녹취록을 분석하던 중 금년에 배운 학생들과 이전에 배운 학생들 사이에 $\mathbf{Z}_n$에 대한 개념인식의 차이가 있음이 발견되었다. 이 차이는 당시 선택되었던 교재의 차이에서 비롯된 바, 현재 우리나라 대학교재로 쓰이는 추상대수강좌 교재를 분석하였다. 주로 사용되는 대학교재인 김응태 · 박승안(1998), Fraleigh(2003), Hungerford(1997), Herstein(1999), 그리고 Gallian(2002)에서의 $\mathbf{Z}_n$의 정의는 각각 다음과 같다.

현대대수학(김응태, 박승안, 1998, pp.14-15): '정수의 법 n에 관한 잉여류'라는 소단원에서 두 정수 a, b에 대하여

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (a-b)$$

라는 Z위에서의 관계를 도입한 후, 이것이 동치관계임을 보이고 a를 포함하는 동치류를 $\overline{a}$로 표시하였다. 또, $\mathbf{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$ 위에 덧셈과 곱셈을

$$\overline{a} + \overline{c} = \overline{a+c} \text{와 } \overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{ac}$$

로 정의한 후 이것이 잘 정의된(well-defined) 연산임을 보였다.

Algebra(Fraleigh, 2003, pp.6-7, pp.12-18): '집합과 관계'(Sets and Relations)라는 소단원에서 양의 정수 n에 대하여 n으로 나누었을 때 나머지가 같은 것끼리 같은 셀에 집어넣어 양의 정수의 집합 $\mathbf{Z}^+$를 분할하고 그 셀들을 법 n에 관한 잉여류들이라고 불렀다. 그런 다음 법 n에 대한 합동관계를 $\mathbf{Z}^+$위에서 도입하고 그 관계를 $\equiv_n$으로 표시하기도 하나 $a \equiv_n b$보다는 $a \equiv b \pmod{n}$로 주로 표시한다고 하였다. 바로 뒤의 예제에서 동치관계를 정의하고 동치류가 동치관계가 주어진 집합을 분할함을 보였다.

'군과 부분군'의 소단원인 '도입과 예제'에서 복소수, 복소수의 연산, 복소수를 극좌표를 써서 나타낸 후, 오일러공식

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

를 도입하였다. 이 때 복소수 z_1과 z_2를 곱했을 때 z_1z_2에 해당하는 각이 z_1과 z_2 각각에 해당하는 각을 더한 것임을 보이고 두 복소수를 곱하는 것은 기하학적으로 그 각각의 절대값을 곱하고 각을 더해주는 것이라는 결론을 내렸다. 그리고 원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 원 $U=\{z\in \mathbf{C} \mid |z|=1\}$가 복소수의 곱셈 연산에 대하여 '닫혀있음'을 언급하고 U의 원소 $z=\cos\theta+i\sin\theta$에 반 개구간 $[0, 2\pi)$에 있는 θ를 대응시켰다. 특히 $[0, 2\pi)$를 $\mathbf{R}_{2\pi}$로 표시하였다. 대응하는 각이 각각 θ_1과 θ_2인 두 개의 복소수 z_1과 z_2를 곱한 z_1z_2에 해당하는 각이 $\theta_1+\theta_2$임을 다시 한 번 주지시킨 다음, $\theta_1+\theta_2\geq 2\pi$이면 $\mathbf{R}_{2\pi}$에서 z_1z_2과 대응하는 각은 $\theta_1+\theta_2-2\pi$이고 이것으로부터 $\mathbf{R}_{2\pi}$위에서의 '법 2π에 대한 덧셈'을 도입하고 그 덧셈을 $+_{2\pi}$로 표시하였다. 2π를 임의의 실수 c로 대치하여 반 개구간을 $\mathbf{R}_c$로 일반화하였다. $\mathbf{Z}_n$은 $\mathbf{R}_n$의 부분집합이므로 '법 n에 대한 덧셈' $+_n$은 실수에 대한 덧셈의 특수한 경우로 생각하여 도입하였고, $\mathbf{Z}_n$에서 자명하게 닫혀있다고 하였다.

Abtract Algebra(Hungerford, 1997, p. 24-35): '동치와 동치류'(Congruence and Congruence Classes)라는 소단원에서 a를 포함하는 동치류를 $[a]$로 표시하는 것을 제외하고는 현대대수학(김응태, 박승안)과 같은 정의를 하였다.

Abstract Algebra(Herstein, 1999, p. 60-62): 군 $\mathbf{Z}_n$부터 정의를 하였는데, Hungerford의 Abstract Algebra와 같이 정의를 하였다. 다만, 순환군과 군의 위수를 도입할 때 평행하게 도입함으로써 추상적인 정의와 구체적인 예를 대비시켰다는 점에서 다른 교재와 차별화 된다.

Contemporary Abstract Algebra(Gallian, 2002 p. 9, p. 44): $a \bmod n$을 a를 n으로 나누었을 때 나머지로 정의하고 $a \bmod n$와 $b \bmod n$에 대하여 덧셈과 곱셈을

$$a \bmod n + b \bmod n = (a+b) \bmod n$$
$$a \bmod n \cdot b \bmod n = ab \bmod n$$

로 정의하였다. 그 뒤 군 도입부에서 군의 예로 $\mathbf{Z}_n=\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$과 법 n에 대한 덧셈을 도입하였다.

4. 분석 및 토의

4.1 첫 번째 인터뷰 분석

학생들의 상군과 상군에서의 연산에 대한 개념이해의 정도를 파악하기 위하여 다음과 같은 문항을 작성하여 학생들에게 제시하였다.

가. $\mathbf{Z}/(5)\cong \mathbf{Z}_5$임을 보여라.

나. G가 가환군이고 $H=\{x^2 \mid x\in G\}$이고 $K=\{a\in G \mid |a|\leq 2\}$일 때, $G/K\cong H$임을 보여라

위의 두 문항은 모두 제1동형 정리를 사용하여 해결할 수 있는 있는데, 문항 '가'는 '나'에 비하여 구체적이어서 난이도가 낮아 보이지만, 제1동형 정리를 사용하기 위하여 함수를 주었을 때 그 함수가 준동형 사상임을 보이는 과정에서 집합 사이의 연산을 다루어야 하기 때문에 어려울 수 있는 문항이다. 인터뷰 결과 대부분의 학생들이 문항 '나'는 무난히 해결한 반면 문항 '가'의 경우는 제대로 해결하지 못하거나 학생들의 올바른 답을 유도하는 여러 질문들을 거쳐서 상당한 시간을 걸린 후 해결하였다.

일반적으로 '관계' 쉐마로부터 함수의 정의를 대상화하기 위해서는 함수를 집합 사이의 관계로 도입한 후, 집합 사이에 주어진 연산을 함수의 한 경우로 정의하는 것

이 바람직하다. 다시 말하여, 집합 A에서 집합 B로의 관계 R이 함수라는 개념 정의를, A에 속한 임의의 원소 x에 대하여 그것과 순서쌍을 이루어 R에 속하도록 하는 B의 원소 y가 유일하게 존재하는 것 즉,

$$\forall x \in A \, \exists ! y \in B \ s.t. \ (x, y) \in R$$

으로 도입한 후, 집합 S 위에서의 연산을 $S \times S$에서 S로의 함수로 정의하는 것이 바람직하다.

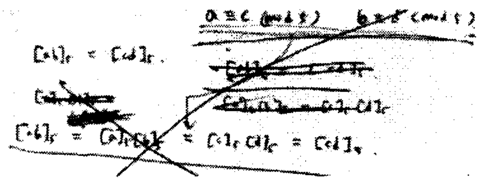
하지만 대부분의 학생들이 집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개념을 집합 A의 임의의 원소 x에 대하여 그것에 대응하는 B의 원소 y가 유일하게 존재하는 것으로 정의하고 이를 통하여 $y = f(x)$라는 개념이미지를 형성하고 있다. 이것을 잘 보여주는 예가 학생 3의 경우이다. 이 학생은 문항 '가'에서 정의한 함수가 잘 정의되어 있음(well-defined)을 보이기 위하여 그것이 잘 정의되었는지 모르는(그것이 함수인지 모르는) 상태에서 $y = f(x)$라는 개념이미지를 사용하여 다음과 같은 오류를 범하였다. 그 학생은 정의역의 x에 대응하는 두 함수 값 $[k]_5$와 $[t]_5$가 같을 수밖에 없음을 보이기 위하여 $f(x) = [k]_5$로 $f(x) = [t]_5$를 나타낸 다음 이로 인하여 $f(x) = [k]_5 = [t]_5$로 바로 결론지어 버리는 바람에 결국은 함수가 잘 정의되어 있음을 보이지 못하였다.

교1 함수의 정의가 뭐지. 임의의 집합 X에서 집합 Y로 가는 함수가?
학3 x값이 결정됨에 따라 y값이 유일하게 결정되는 그 대응관계..
교1 그러니까. 유일성을 보여야 된다는 얘기야?
학3 네
교1 그러니까. 존재성은 보여 주었으니까 뭘 보이면 되겠어?
교3 함수가 well-defined가 의미하는 건가?
학3 그러면 함수 값이 유일하게 결정되는..얘한테서 다른 애로 갈 수 없음을 말해야 하는데..잠깐만요..
교3 오케이
학3 $f(x) = [k]_5 = [t]_5$라고 하면 t랑 k랑 같음을 보이면 되나요?

학생 4 또한 같은 이유로 연산의 정의가 잘 되어 있음을 보이는데 어려움을 보였다.

교1 이것($[a+b]$)과 이것($[a]+[b]$)은 정의고, 이것($[c]+[d]$)은 정의인데, 이 둘($[a]+[b]$과 $[c]+[d]$)은 왜 같지?
학4 $[a]=[c]$이고 $[b]=[d]$이라고 가정했으니까...
교1 그렇다고 이 둘이 같은 것이 보장이 되나?
학4 할 수 없나?
⋮
(중략)
⋮
교3 문제는 얘($[a+b]$)하고 얘($[c+d]$)하고가 같은 지가...
교1 왜냐면, c하고 d를 했을 때 여전히 이것($[a+b]=[c+d]$)을 만족하냐는 것이지.
교2 그렇지.
교1 다른 대표를 뽑아서 생기는 equivalence class를 더했을 때도 여전히 이 equivalence class가 되느냐는 것이지.
교3 OK. 그러니까 이것($[a+b]$)하고 이것($[c+d]$)하고가 같은 걸 보이면 된다구.
학4 그럼 어느 등호임을 보여야 하는 것이에요?

학생 4는 답을 유도하는 설명을 하였음에도 여전히 문제의 근본을 파악하지 못하고 있음을 알 수 있다. 한편, 학생 2도 같은 오류를 다음과 같이 보이고 있다.



학생 1, 2, 4는 '동치관계와 동치류' 쉐마에서 'Z를 동치류로 분할하고 $n-1$개의 서로 다른 동치류가 있음을 확인'하는 발생적 분해의 과정에서 어려움이 있음을 보여 주었다.

교1 ($[x]_5+[y]_5$라고 쓴 후 $[x]_5$를 가리키며)
이게 무슨 집합인데? 의미가 무엇인데?

학1 x를 5로 나누었을 때 나머지들의 값 들이구요.

또한 학생 1은 $[x]_5+[y]_5$에 대하여

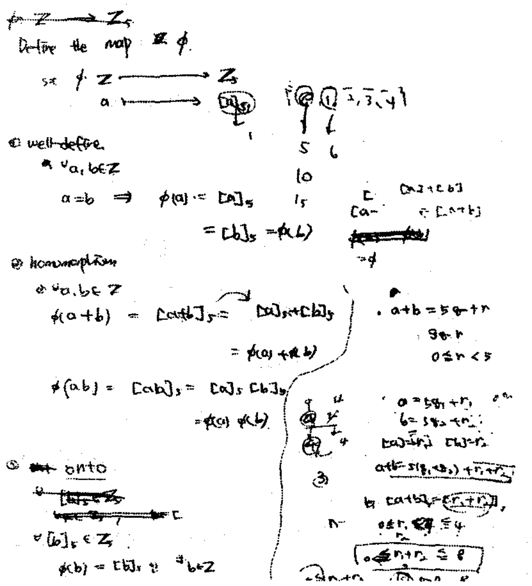
$$\{a+b \mid a\in[x]_5,\ b\in[y]_5\}$$

라는 개념이미지를 형성하고 있었으며 $[x]_5+[y]_5$의 개념정의인

$$[x+y]_5=\{z \mid z\equiv x+y\ (\mathrm{mod}\,5)\}$$

에 의거한 사고를 하지 못하였다. 따라서 학생 1은 Vinner의 분류에 의하면 '직관적 반응'을 하였다(<그림 4> 참조).

학생 4는 처음에 $[a]_5$에 대한 개념이미지를 $\{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4}\}$로 갖고 $\bar{0}$ 밑에 5, 10, 15를 $\bar{1}$밑에 6을 써서 이해하려고 하였다. 이는 $[a]_5$가 대상화 되지 않았음을 보여준다.



또한 이 학생도 연산이 well-defined라는 개념이미지가 제대로 형성되지 않았음을 다음 대화로부터 알 수 있다.

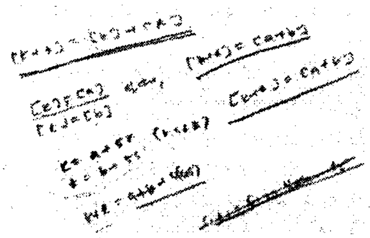
교2 잠깐! well-defined임을 보일 때. a하고 b가 같을 때 왜 이 등호가 성립하지?
(homomorphism보일 때,
$[a]_5+[b]_5=[a+b]_5$를 가리키며)

학4 그 정리에 나와 가지고 썼는데..
(연습장 오른쪽 아랫부분에
$[a]_5+[b]_5=[a+b]_5$을 보이기 위해 과정을 적고 있음)
제가 증명을 한 건 아닌데요...하면 숫자 몇 개 쓰면은...여기서 a의 division algorithm 써가지고 이런 r_1, r_2가 존재하구요, r_1, r_2의 범위가 0과 4 사이니까 합의 범위가 0부터 8 사이가 되고요, 그런데 여기(r_1+r_2)가 19이면은 5보다 작을 때는 같게 나오니까 문제가 안 되고, 5보다 크거나 같을 때는 5, 6, 7, 8 네 가지 경우인데 그거하면 나오겠느냐 그건데... 엄밀한 증명은 아닌데...

'Z를 동치류로 분할하고 $n-1$개의 서로 다른 동치류가 있음을 확인'하고 '연산의 정의'를 대상화한 후에 'Z의 동치류들의 집합위에서의 덧셈과 곱셈을 정의' 하는 발생적 분해의 과정에서는 모든 학생[1]이 어려움을 갖고 있음을 보였다. 특히 학생 2는 다음과 같은 오 개념을 가지고 있었다.

교1 well-defined에 대해 설명하는거 보자

학3 덧셈에 대해 쉽다고 하셔서 보이려고 했어요. 이걸 보면...(세 번째 장에 있는 것을 설명하기 시작함)



1) 학생 5, 6, 7은 이 과정을 사용하지 않은 풀이를 시도하였으므로 본 논의에서는 제외하기로 한다.

교1　이것을 보여서 well-defined임을 보인다는 거지...

학3　$[k]$랑 $[a]$랑 그리고 $[t]$랑 $[b]$랑 같다고 놓은 다음에 이걸 ($[k+t]=[a+b]$) 보이려고 했어요..그래서 $[k]=[a]$이고 $[t]=[b]$이기 때문에 $k=a+5r$, $t=b+5s(r, s\in Z)$일 때 $k+t=a+b+5(r+s)$이어서 $[k+t]$랑 $[a+b]$랑 같아져요.

학2　이거(바로 위의 스캔된 그림)랑 저거(학생2 의 것)랑 뭐가 다른지 모르겠는데요. 아까 곱하기 임의로 잡은 거... 아까 그렇게 잡았는데...처음에 저도

⋮

(중략)

⋮

학2　뭐가 틀린지 모르겠고요, 솔직히, 그 앞에 한 게..그냥 집합이 같다는 것을 집합의 포함관계로 봐도 되지

학생 2는 $[x]_5$에 대하여 x를 5로 나눈 나머지로 개념이미지를 형성한 반면 개념정의로 원활히 돌아가지 못하는 '직관적 반응'을 보였다.

학생 3 또한 함수가 well-defined이라는 제대로 된 개념이미지를 형성하고 있지 못함으로 인하여 여전히 연산이 well-defined임을 보이라는 것을 이해하지 못하였다. 하지만, 강의시간 중에 보였던 것을 기억하여 결국에는 Vinner의 분류에 의한 '순수한 형식적 추론'에 의하여 문제를 해결하였다(<그림 2> 참조).

4.2 두 번째 인터뷰 분석

첫 번째 인터뷰의 녹취록을 분석한 결과 대부분의 학생들이 오류를 범한 이유 중의 하나가 $\mathbf{Z}_n$에서의 $[a]_n+[b]_n=[a+b]_n$로 정의된 좌변의 덧셈과 우변의 정수 집합 위에서의 덧셈기호가 같은 것으로 혼동하였기 때문인 것으로 추정되었다. 따라서 새로 정의된 연산기호를 기존의 연산과 다른 표현을 사용한다면 학생들이 이러한 오 개념을 일으키지 않을 것으로 생각되었다.

이를 확인하기 위하여 개념이미지를 형성하지 못한 학생들 중 1명을 다시 불러 인터뷰하였다. 이때에도 사전에 인터뷰 내용에 대한 언질을 주지 않았고 개념형성을 파악할 수 있는 다음과 같은 문제를 제시하였다. 이 문제는 우리가 앞에서 제시한 $\mathbf{Z}_n$의 발생적 분해에서의 각 과정을 거치도록 작성되었다.

> Z위에서의 관계 $\approx$를 임의의 정수 m과 n에 대하여 $m\approx n$인 필요충분조건이 $m^2=n^2$인 것으로 정의할 때 다음 물음에 답하여라.
>
> 1. $\approx$은 Z위에서의 동치관계임을 보여라.
> 2. $\approx$대한 동치류들을 서술하고 모두 몇 개가 있는지 말하여라.
> 3. $\approx$대한 동치류들의 집합 [Z]위에서의 관계 $\le$를 [Z]의 임의의 두 원소 $[m]$, $[n]$에 대하여 $[m]\le[n]$일 필요충분조건이 $m\le n$인 것으로 정의할 때, 이 정의의 문제점은?
> 4. 정의역이 [Z]이고 공변역이 Z인 함수 f를 $f([m])=m^2+m+1$로 정의할 때, 이 함수는 잘 정의되었는가?
> 5. 정의역이 [Z]이고 공변역이 Z인 함수 g를 $g([m])=m^4+m^2+1$로 정의할 때, 이 함수는 잘 정의되었는가?
> 6. [Z]위에서의 연산 $\oplus$을
> $$[m]\oplus[n]=[m+n]$$
> 로 정의했을 때 이 정의는 잘 되었는가? 아니면 그 이유를 말하여라.

인터뷰 결과 이 학생은 지난 번 인터뷰 때와는 달리 주어진 문제들을 모두 완벽하게 해결하였다. 예를 들어, 첫 번째 인터뷰에서 설명을 듣고도 이해하지 못했던 $\mathbf{Z}_5$위에서의 연산 $+$이 잘 정의되어 있음도 다음과 같이 잘 보였다.

교수2 응. 근데 이 플러스하고 이 플러스하고..
학생 틀리죠.

⋮

(중략)

⋮

교수1 이 연산이 잘 정의되었다는 뜻이 무슨 뜻인데.
학생 이거($[m+n] = [r+s]$)가 되어야 해요. 같은 것($[m]=[r]$, $[n]=[s]$)을 뽑았을 때. 얘($[m]+[n]$)는 얘($[m+n]$)니까 같은 거고, 얘네 들($[m+n] = [r+s]$)이 같은지 보여야 해요.
교수3 그런데 여기 같다라는 뜻이 뭔데. ($[m]=[r]$, $[n]=[s]$ 가리키며)
학생 같은 equivalence class...를 택했을 때.
교수1 같은 equivalence class이다. 개네들을 같은 equivalence class로 만든다는 것이 무슨 말이야.
교수3 Z_5에서는 무슨 뜻인데?
학생 네? 그러니까 얘(m)와 얘(r)의 차이가 5의 배수...

문제풀이가 끝난 뒤에 그 학생에게 올바른 개념을 획득한 시기에 대하여 물어보았더니 첫 번째 인터뷰 과정에서 깨닫게 되었다고 대답하였다. 그러나 본 연구팀의 생각으로는 이 이유 뿐 만 아니라 주어진 문제가 $\mathbf{Z}_n$의 발생적 분해에서의 각 과정을 자연스럽게 거치도록 작성되었기 때문에 지난번에 오 개념을 학생도 큰 어려움 없이 순차적으로 올바른 답으로 도달할 수 있던 것으로 생각된다.

4.3 토의

앞에서도 언급한 바와 같이 '관계' 쉐마로부터 함수의 정의를 대상화하기 위해서는 함수를 집합 사이의 관계로 도입한 후, 집합 사이에 주어진 연산을 함수의 한 경우로 정의하는 것이 바람직하다. 다시 말하여, 집합 A에서 집합 B로의 관계 R이 함수라는 개념 정의를, A에 속한 임의의 원소 x에 대하여 그것과 순서쌍을 이루어 R에 속하도록 하는 B의 원소 y가 유일하게 존재하는 것 즉,

$$\forall x \in A\ \exists!\, y \in B\ s.t.\ (x, y) \in R$$

으로 도입한 후, 집합 S 위에서의 연산을 $S \times S$에서 S로의 함수로 정의하는 것이 바람직하다.

하지만 대부분의 학생들이 집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개념을 집합 A의 임의의 원소 x에 대하여 그것에 대응하는 B의 원소 y가 유일하게 존재하는 것으로 정의하고 이를 통하여 $y=f(x)$라는 개념이미지를 형성하고 있다.

마찬가지로 $\mathbf{Z}_n$의 임의의 두 원소 $[a]$와 $[b]$에 대하여 $[a]+[b]=[a+b]$로 정의된 연산 +가 잘 정의되어 있음을 보이려고 학생들은 $[a]=[c]$와 $[b]=[d]$라고 가정한 후 등식의 성질에 의하여 $[a]+[c]=[b]+[d]$임이 당연하다고 생각해 버리는 경향이 있음이 관찰되었다. 이것은 $[a]+[c]$에서의 $+$를 실수에서의 덧셈으로 착각하여 실수연산에서의 등식의 성질을 잘못 적용한 것이다. 또한, 이미 함수인 관계에서만 사용할 수 있는 $+([a],[b]) = [a+b]$라는 표현을 써서 관계를 나타낸 다음 그것이 잘 정의되어 있음을 보이려는 데서 기인하는 문제로 사료된다. 그 뿐만 아니라 왜 $[a]=[c]$와 $[b]=[d]$라고 가정을 하고 시작하여야 하는지에 대하여 정확하게 파악하고 있지 않아 보인다.

따라서 관계를 사용하여 함수를 정의한 후에 집합 A에서 집합 B로의 관계 R이 함수가 되는 경우에는 $(a, b) \in R$ 또는 aRb라고 쓰는 대신에 $b=f(a)$라고 쓸 수 있고, 이 표현은 함수의 정의를 만족하는 관계에 대해서만 '의미가 있다'는 것을 다양한 활동을 통해 인식시킬 필요가 있다.

한편, $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n$에서 $\mathbf{Z}_n$로의 관계

$$+ = \{(([a],[b]),[a+b]) \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$$

가 함수임을 보이기 위해서는 $+$의 정의로부터 정의역

에 각 원소에 대하여 그것과 순서쌍을 이루는 원소가 공변역에 존재함은 명확하므로,

$(([a],[b]),[a+b])\in +$이고

$(([a],[b]),[c+d])\in +$일 때,

$[a+b]=[c+d]$임만 보이면 된다. 그렇다면

$(([a],[b]),[c+d])\in +$인 경우가 있는지 생각해 보아야하는데 $+$의 정의에 의하여

$(([c],[d]),[c+d])\in +$이므로

$[a]=[c]$이고 $[b]=[d]$인 경우에

$$(([a],[b]),[a+b])\in + \text{이고}$$
$$(([a],[b]),[c+d])\in +$$

가 동시에 일어날 수 있음과 이 때 $[a+b]$와 $[c+d]$임을 보여야 한다는 것을 자연스럽게 알 수 있다.

그러나 이와 같은 접근은 표현의 복잡성으로 인하여 잘 다루어지지 않았고 이 결과 우리의 인터뷰 내용과 같은 오류를 학생들이 범하게 되는데, 학습의 초기 단계에서 한 번쯤은 짚어줄 필요가 있다.

5. 결론 및 제언

5.1 결론

APOS이론과 발생적 분해가 수학교육에 주는 주요 시사점은 어떤 상황이든 개념을 이해하기 위해서는 학생들이 쉐마를 구성해야 한다는 것이다. 따라서 수업에서는 발생적 분해의 각 과정을 자연스럽게 따르도록 유도하여 학생들이 쉐마를 구성하는데 도움을 주어야 한다.

또한, 수업에 필요한 쉐마가 갖추어져 있지 않아서 새로운 쉐마를 구성할 수 없다는 것은 사소한 것 같지만 중요한 사실이다. 전통적인 수업은 흔히 이러한 사실을 무시하고 새로운 개념의 도입으로 들어가곤 한다. 그러나 사전에 필요한 쉐마를 갖추지 못한 학생들은 교사의 설명에서 아무런 의미도 찾지 못한다. 그러한 선결요건을 다룰 수 없다면 학생들은 이해하려는 노력을 포기하고(따라서 학생들은 옳은 도구를 갖고 있지 못하다.), 시험은 잘 보아야 되기 때문에 모방할 방법만을 찾게 될 것이다(Dubinsky, 1991).

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, $\mathbf{Z}_n$에 대한 이해도가 낮음을 알 수 있었다. $\mathbf{Z}_n$은 정수론을 비롯하여 추상대수학에서도 많이 사용되는 개념이지만 인터뷰 대상자의 대부분이 $\mathbf{Z}_n$의 원소 또는 원소 사이의 연산에 대하여 올바른 개념정의를 가지고 있지 않았다.

둘째, 집합사이의 연산 개념 형성이 제대로 되어 있지 않았다. 많은 학생들이 잘못된 개념이미지를 갖고 새로운 개념을 적용할 문제 상황에서 Vinner의 분류에 의한 '직관적 반응'으로 응답하였다.

셋째, APOS이론을 기반으로 하여 $\mathbf{Z}_n$ 개념의 발생적 분해를 제시하였다. $\mathbf{Z}_n$ 개념의 이해에 필요한 요소들과 학생들의 인터뷰 자료를 바탕으로 그 계통성과 관계를 알아볼 수 있는 발생적 분해를 <그림 7>과 같이 제시하였다.

넷째, $\mathbf{Z}_n$ 개념의 발생적 분해의 각 단계를 거치는 문제해결 과정을 적용한 결과 제대로 된 개념형성을 유도할 수 있었다. 첫 번째 인터뷰에서 제대로 된 개념이미지를 형성하지 못한 학생을 다시 불러 위에서 언급한 발생적 분해의 적용 모형을 제시한 결과 이 학생이 각 단계를 완벽하게 해결하여 제대로 개념이미지를 형성하여가는 과정을 관찰할 수 있었다. 따라서 이와 같은 모형은 실제 수업에서도 적용 가능하며 $\mathbf{Z}_n$ 뿐만 아니라 다른 개념에서도 발생적 분해를 적용하여 수업을 전개하면 좋은 효과를 얻을 것이다.

5.2 제언

보다 효과적인 대학에서의 수학 수업과 대학 수학교육의 연구를 위하여 다음이 선행되어야 할 것이다.

첫째, 많은 학생들을 인터뷰하여 우리가 인식하지 못하였던 학생들의 오 개념을 파악할 필요가 있다.

둘째, 본 연구에서 제시한 $\mathbf{Z}_n$의 발생적 분해는 본 연구진의 논의와 인터뷰 결과에 기인한 것으로

다른 시각에서 보면 변경될 수도 있다. 따라서 중요한 개념에 대한 충분한 연구를 거쳐서 그 개념의 발생적 분해를 확정지을 필요가 있다.

셋째, 발생적 분해를 적용한 수업이 효과적인 것으로 관찰되었으므로 각 개념을 도입할 때에 발생적 분해를 적용한 수업모형을 개발할 필요가 있다.

넷째, 고등 수학적 개념에서의 반영적 추상화에 대한 연구가 많이 이루어져야 할 것이다.

다섯째, 대학 수학교육에 대한 연구가 활성화되어야 한다.

참 고 문 헌

강미광 (2003). 중등교사 양성을 위한 미적분학 강좌 운영방안, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(4), pp.523-541.

계영희 (1994). van Hiele 이론에 근거한 대학생의 기하 발달 수준의 측정, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 33(1), pp.45-50.

고상숙 (2003). 수학적 탐구력 신장을 위한 테크놀로지의 활용의 효과, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(5), pp.647-672.

권오남·주미경 (2003). 대학 수학교육 연구의 동향과 과제, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(2), pp.229-245.

권오남·주미경·김영신 (2003). 오일러 알고리즘의 안내된 재발명: RME 기반 미분방정식 수업에서 점진적 수학화 과정 분석, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(3), pp.387-402.

김응태·박승안 (1998). 추상대수학, 경문사.

박선화 (1998). 수학적 극한개념의 이해에 관한 연구, 서울대학교 대학원 교육학 박사학위논문.

박임숙 (2002). 고등학교에서의 극한개념 교수·학습에 관한 연구, 단국대학교 대학원 교육학 박사학위논문.

박혜숙 (2003). 중등교사 양성을 위한 기하 영역의 교육과정 개발, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(4), pp.503-521.

신준식 (2003). 초등교사 양성 대학의 초등수학교육에 대한 교수-학습 프로그램 개발, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(4), pp.453-463.

신현용 (2003a). 교사 양성 대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(4), pp.431-452.

신현용 (2003b). 교사양성 대학에서의 대수 영역의 학습과 지도, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(4), pp.481-501.

이강섭 (2003). 중등교사 양성을 위한 확률과 통계 영역의 교육과정 개발, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(4), pp.561-577.

이병수 (2003). 교사 양성 대학에서의 해석학의 학습과 지도. 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(4), pp.541-559.

이상구·박종빈·양정모·김익표 (2004). 바둑판을 이용한 흑백 게임의 최적해를 구하는 선형대수학 알고리즘, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 43(1), pp.87-96.

이재학 (2003). 중등교사 양성을 위한 이산수학 강좌에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(4), pp.579-588.

한인기 (2003). 중등교사 양성을 위한 수학교육학 및 수학사 강좌에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(4), pp.465-480.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, *Research in Collegiate Mathematics Education II*, Issues in Mathematics Education (CBMS), American Mathematical Society, pp.1-32.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktac, A. (1997). Development of Students' Understanding of Cosets, Normality and Quotient Groups, *Journal of Mathematical Behavior* 16(3), pp.241-309.

Broussenau, G. (1983). Les Obstacles Epistemologiques et les Problemes en Mathematiques, *Reseaches en Pidactique des Mathematiques* 4(2), pp.165-198.

Brown, A., DeVries, J., Dubinsky, E. & Thomas, K.

(1997). Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups, *Journal of Mathematical Behavior* **16(3)**, pp.187-239.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema, *Journal of Mathematical Behavior* **15(2)**, pp.167-192.

Dubinsky, E. (1986). Teaching Mathematical Induction, *The Journal of Mathematical Behavior*, 5, pp.305-317.

Dubinsky, E. (1991). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematics Thinking, In Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematics Thinking,* Kluwer Academic Publishers, 류희찬 · 조완영 · 김인수 옮김 (2003). 고등수학적 사고, 경문사, pp.127-165.

Dubinsky, E. (1997). On Learning Quantification, Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* **16(213)**, pp. 335-362.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory, *Educational Studies in Mathematics* **27**, pp.267-305.

Dubinsky, E., Elterman, F. & Gong, C. (1989). The Student's Construction of Quantification, For the Learning of Mathematics **8(2)**, pp.44-51.

Dubinsky, E. & Lewin, P. (1986). Reflective Abstraction and Mathematical Education: the Genetic Decomposition of Induction and Compactness, *The Journal of Mathematical Behavior*, **5**. pp.55-92.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research, In D. Holton et. (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp.273-280.

Fraleigh, J.B. (2003). A *First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley.

Gallian, J. A. (2002). *Comtemporary Abstract Algebra*, Houghton Mifflin.

Hazzan, O. (1999). Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts, *Educational Studies in Mathematics* **40**, pp.71-90.

Hazzan, A. & Zazkis, R. (2005). Reducing Abstraction: The Case of School Mathematics, *Educational Studies in Mathematics* **58**, pp.101-119.

Herstein, I.N. (1999). *Abstract Algebra*, Wiley.

Hungerford, T.W. (1997). *Abstract Algebra, 2/E : An Introduction*, Saunders College.

Leron, U. & Dubinsky, E. (1995). An Abstract Algebra Story, *American Mathematical Monthly*, **102(3)**, March, pp.227-242.

Leron, U., Hazzan, O. & Zazkis, R. (1995). Learning Group Isomorphism: A Crossroads of Many Concepts, *Educational Studies in Mathematics* **29**, pp.153-174.

Seldon, A. & Seldon, J. (1987). Errors and Misconceptions in College Level Theorem Proving, *Proceedings of the Second International Seminar-Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*, Cornell University, NY, pp.457-470.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics* **22**, pp.1-36.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*, 황우형역 (1998). 수학학습 심리학, 민음사.

Tall, D. (1989). Different Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm, In Wagner, S. & Kieran, C. (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, 4, NCTM, pp.87-92.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematics Thinking*, Kluwer Academic Publishers, 류희찬 · 조완영 · 김인수 옮김 (2003). 고등수학적 사고, 경문사.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12(2)**, pp.151-169.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **14**, pp.239-305.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics, In Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematics Thinking*, Kluwer Academic Publishers, 류희찬·조완영·김인수 옮김 (2003). 고등수학적 사고, 경문사, pp.87-107.

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Using Visual and Analytic Strategies: A study of students' understanding of permutation and symmetry groups, *Journal for Research in Mathematics Education* **27(4)**, pp.435-457.

On the Applications of the Genetic Decomposition of Mathematical Concepts
-In the Case of Z_n in Abstract Algebra-

Hye Sook Park
Dept. of Math. Education, Seowon University, Chongju, Chungbuk 361-742, Korea
e-mail: hyespark@seowon.ac.kr

Suh-Ryung Kim
Dept. of Math. Education, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
e-mail: srkim@snu.ac.kr

Wan Soon Kim
Dept. of Math., Hoseo University, Asan, Chungnam 336-795, Korea
e-mail: kimws@office.hoseo.ac.kr

There have been many papers reporting that the axiomatic approach in Abstract Algebra is a big obstacle to overcome for the students who are not trained to think in an abstract way. Therefore an instructor must seek for ways to help students grasp mathematical concepts in Abstract Algebra and select the ones suitable for students.

Mathematics faculty and students generally consider Abstract Algebra in general and quotient groups in particular to be one of the most troublesome undergraduate subjects. For, an individual's knowledge of the concept of group should include an understanding of various mathematical properties and constructions including groups consisting of undefined elements and a binary operation satisfying the axioms. Even if one begins with a very concrete group, the transition from the group to one of its quotient changes the nature of the elements and forces a student to deal with elements that are undefined.

In fact, we also have found through running abstract algebra courses for several years that students have considerable difficulty in understanding the concept of quotient groups.

Based on the above observation, we explore and analyze the nature of students' knowledge about Z_n that is the set of congruence classes modulo n. Applying the genetic decomposition method, we propose a model to lead students to achieve the correct concept of Z_n.

* ZDM Classification: H45
* 2000 Mathematics Subject Classification: 97D70
* Key Word: genetic decomposition, mathematical concept, mathematics education in university.