韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19권 제4호. 2005. 11. 599-620

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19 No 4, Nov. 2005. 599-620

추상대수학 강좌의 두 가지 접근 방법

박 혜 숙 (서원대학교)
김 서 령 (서울대학교)
김 완 순 (호서대학교)

1. 서 론

가. 들어가며

대부분의 사람들은 학교에서 배우는 수학은 이미 만들어진 지식을 전달받는 것으로 생각하고, 단지 시험에서 좋은 점수를 얻기 위하여 수학공부를 하며, 단순히 공식에 대입해서 답을 구하는 것으로 만족하고 있다.

그러나 수학은 인간이 생존하는 과정에서 부딪히는 여러 가지 실제적인 문제 상황을 해결하기 위하여 생겨난 인간의 활동의 결과로, 단순한 개인적인 사변 이상의 사회적인 활동의 결과이다. 따라서 수학은 처음부터 완벽한 모습을 가진 지식체로 등장한 것이 아니라, 오랜 역사를 통해 많은 수학자들에 의해 개발되어 왔고 또한 지금도 그렇게 발달되어 가고 있는 것이다(우정호 · 민세영, 2002).

그러므로 수학을 만들어진 지식이 아니라 만들어져 가는 지식으로 이해하고, 그 개념이나 사실의 발달 과정을 고려하여 가르친다면 학생들의 이해도도 높이고 흥미를 더할 수 있을 것이다. 이와 같은 입장에서 학생들을 지도하고자 하는 것이 역사발생적 원리인데, 이것은 연역적 교재인 Euclid의 원론이나 수학의 구조를 강조한 새 수학의 비판과 함께 제시되었다.

이 때, 역사발생적 원리는 단순히 수학을 역사적 발달 순서대로 가르치자는 것이 아니라, 수학사에서 볼 수 있는 개념의 발생과 그 발달 과정을 고찰하여 학생들이 보다 잘 이해할 수 있도록 교재를 구성하여 교수-학습에서 활용하게 하려는 것을 뜻한다(박문환 · 민세영, 2002).

이와 같은 원리로 서술된 가장 대표적인 교재는 1741년에 발간된 Clairaut의 기하학 교과서인 '기하학 원론'이라 할 수 있다. 즉, 기하학의 발생은 필요에 의한 것으로서 명제를 제시하기에 앞서 그 필요성을 역설함으로써 다음 명제로 안내하고 있으며, 일상에서의 유용성 및 필요와는 별도로 초기 기하학자들이 자신의 발견을 보다 깊이 연구하도록 자극한 중요한 동기로서의 인간 본연의 호기심도 놓치지 않고 사용하고 있다(장혜원, 2003). 또한 우정호 외(2003)도 Branford(1908)가 주장한 바와 같

* ZDM분류 : H45
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 역사발생적 원리, 환론, 군론.

이 개인의 지식의 가장 효과적인 발달 경로는 대체로 인류가 그 지식을 발달시킨 역사적 경로와 일치한다고 언급하며, 이러한 역사발생적 원리가 교육의 기초가 되도록 기하교육이 이루어져야 한다고 하였다.

추상대수학의 경우에는 추상대수학에서 사용하는 공리적 전개방식이 추상적으로 사고하는 훈련을 경험하지 못한 학생들에게는 극복해야 할 큰 장벽임이 보고되고 있는데, Hazzan(1999)은 강의자가 학생들이 추상대수의 개념들을 이해하는 것을 도울 수 있는 방법들을 모색하고 그 중 학생들에게 개념을 도입할 수 있는 적합한 방법들을 강구하여야 한다고 하였다.

예를 들어, 추상대수학의 강의에서는 군의 정의를 공리를 사용하여 도입하고 군론에 대하여 이야기한 후에 환의 개념으로 넘어가는 것이 일반적인 방법이지만, 학생들은 정수환과 다항식환에 이미 익숙해 있으므로 이러한 예와 함께 환의 개념을 먼저 도입하는 것이 학생들의 개념 이해를 보다 쉽게 할 수도 있다.

한편, Tall(1989)은 내용의 제시 순서에의 한 인지적 장애에 대해 주목하였는데, 전통적으로 어떤 특정한 순서에 따라 지도되는 개념 중에는 한 개념이 다른 개념보다 논리적으로 복잡한 성질을 갖고 있다는 가정 하에 그렇게 지도 하지만, 실제로 그런 가정이 맞지 않는 경우가 있고, 오히려 그러한 제시 순서로 인하여 장애가 발생할 수 있다고 지적한 바 있다(우정호 · 민세영, 2002).

이와 같은 내용을 바탕으로, 본 연구에서는 위에서 언급한 추상대수학 강좌의 두 가지 접근 방법 중 하나를 사용하고 있는 추상대수학 교재들을 분석하고 '현대대수학' 강좌를 수강한 학생들을 대상으로 인터뷰하여 학생들의 반응을 알아본 후 그 장 · 단점을 비교하며 논의하고자 한다.

나. 선행연구 분석

추상대수학과 관련된 외국의 논문들은 1980년 이후에 다수 나오고 있는데, 우선 Selden과 Selden(1987)은 초등 대수학에서의 오류와 오 개념을 분류하였다. 그들은 학생들의 오류와 오 개념은 대상 자체의 복잡성보다는 학생들의 수학적 기반이 약하기 때문이라고 분석하였다(Leron 외, 1995). 또, Dubinsky 외(1994)는 그들이 제시한 APOS이론(Tall, 1991; Asiala 외, 1996; Dubinsky와 McDonald, 2001 등 참조)에 근거한 대수학 수업에 대하여 다루었고, Leron과 Dubinsky(1995)은 컴퓨터를 활용한 추상대수학 수업의 예를 보여주고 있다.

한편, 구체적인 군 이론과 관련된 주제를 다루고 있는 논문은 위수 8인 정이면체군 D_4를 다룬 Zazkis 외(1996), 군동형사상의 개념 이해를 '군, 함수, 한정기호'라는 3가지 개념으로 분해하여 살펴본 Leron 외(1995), 이항연산과 군의 개념에 대하여 다룬 Brown 외(1977), 잉여류와 상군의 개념 이해에 대하여 다룬 Asiala 외(1997) 등을 들 수 있다.

우리나라의 경우는 선형대수와 관련된 이상구(2004)의 논문과 추상대수학에서의 $\mathbf{Z}_n$의 개념 지도를 연구한 박혜숙 · 김서령 · 김완순(2005), 교사양성을 위한 추상대수학 교재 개발 연구를 한 신현용

(2003a, 2003b)과 신현용 외(2005) 등이 있다.

2. 역사발생적 원리

수학적 구조를 강조한 새 수학의 여러 문제점이 나타나면서, Kline과 Polya 등의 수학자들은 수학교육 현대화 운동에 대한 비판을 게재하였는데, 그 대안으로 역사발생적 방법을 제시하였다(Kline, et al., 1962).

일반적으로 역사발생적 원리는 "개체발생은 종족발생을 재현한다.'는 Haeckel의 '재현의 법칙'과 동일한 것으로 생각되어, 단지 수학사의 순서대로 학습과정을 배열할 것을 주장하는 이론으로 이해되고 있지만, 현대적인 해석으로는 수학의 역사적 발달과 개인의 학습에 대한 완전한 평행성을 가정하지 않는 관점에서 교수-학습에서의 수학사의 재해석을 요구하고 있다. 다음의 내용은 우정호 · 민세영(2002)의 내용을 요약 정리한 것이다.

원래 역사발생적 원리는 16세기에 연역적인 교재 구성의 전형이었던 Euclid의 '원론'에 대한 비판이 제기되면서부터 그 모습을 나타내기 시작하였다. 이것은 Descartes, Clairaut 등을 비롯한 많은 수학자들에게 영향을 주어서, Clairaut는 역사발생적 원리에 따른 기하학 교과서인 '기하학 원론'을 저술하였다. 그후 1866년 동물의 태아발생 과정은 종족이 진화한 과정을 재현한다는 Haeckel의 재현의 법칙이 발표되면서, 각 학생의 학습과정은 인류의 학습과정을 재현하며 역사 발생적 방법이 학생들이 수학을 배우는 가장 자연스러운 방법이라는 논의와 함께 Branford 등에 의한 교재가 개발되었다. 또한, 1962년 Birkhoff, Courant, Kline, Polya, Weil 등을 비롯한 미국과 캐나다의 지도자급 수학자 75명은 '새 수학'에 대하여 경고하면서 역사발생적 원리를 다시 주장한 이후에 역사발생적 원리에 대한 관심이 다시 커지게 되었다. 1969년 NCTM의 연보는 교수 도구로서의 수학사를 주제로 하면서 수학교육에서 수학사를 이용할 것을 권고하였고, 1997년의 ICMI의 연구를 비롯하여 수학사를 수학교육에 이용하려는 연구가 활발하게 진행 중이며, 역사발생적 학습-지도 원리의 중요성이 새롭게 인식되고 있다. 특히, 20세기 중반 이후 역사발생적 원리와 관련되어 여러 수학교육 이론이 연구되었는데, 대표적인 연구로는 Lakatos, Freudenthal, Brousseau 등의 이론을 들 수 있다. 이들 세 사람의 역사발생론적 이론의 특징을 간략히 살피면 다음과 같다.

Lakatos는 수학적 지식의 성장을 증명과 반박의 논리로서 설명하며 발견적 접근법을 강조하고 있는데, 그의 준경험주의 수리 철학과 증명과 반박의 방법에서는 수학의 불변의 기초를 인정하지 않고 증명을 수학의 발달 과정에서 사용되는 발견의 도구인 사고실험으로 보고, 배경지식에서 비롯된 추측에 대한 비판적 활동을 통한 추측의 개선이라는 발견적 접근법을 강조하고 있다. 그가 주장하는 수학 교재의 구성 양식은 수학을 합리적으로 재구성하는 것, 즉 그의 수학적 발견의 논리에 따라 수학사를 재조직하는 것을 의미한다.

Freudenthal은 교사의 적절한 안내를 따라, 학습자가 스스로의 활동을 통하여 수학적 개념을 자신의 현실로부터 수학화 과정을 통해 재 발명해 가도록 해야 한다고 주장하고 있으며, 이 과정에서 수

학적 개념의 역사발생이 중요한 역할을 한다. 즉, 수학화가 가능하도록 안내하기 위해서는 수학적 개념의 역사적 발생과정에 대한 분석이 필요하다는 것을 전제로 하고 있다. 이 때, 그의 안내된 재 발명은 고전적인 역사발생적 원리와는 관점이 달라서, 그는 재구성을 강조한다. 따라서 학습과정에서 중요한 것은 불연속적인 비약이라고 보고 역사발생을 중요시 하지만, 역사적 발달과정 그대로를 재현하게 하는 것이 아니라, 그것을 학습자의 현실적 문맥을 통해 재구성해야 된다는 점을 분명히 하고 있다.

Brousseau는 인식론적 장애 개념이 수학의 학습-지도 과정을 연구하기 위한 유용한 도구가 될 수 있다고 보고 이 개념을 수학교육에 도입하였다. 그의 교수학적 상황론에서는 역사적 발달 과정에서 드러나는 단계가 행동, 형식화, 타당화, 제도화의 상황에서 필요한 지식의 상태의 차이를 특징짓기 위한 도구로 사용된다. 또한 그는 학습에서 일어나는 장애를 개체발생적 장애, 교수학적 장애, 인식론적 장애로 분류하였다. 교수학적 상황론과 인식론적 장애의 개념은 학생들이 스스로 수학적 지식을 획득할 수 있도록 그 지식이 발생하게 만드는 상황을 제시하고, 그 과정에서 학생들이 이전에 가지고 있던 개념과의 단절을 겪으며 인식론적 장애를 극복하도록 하는 것을 의미한다. 단순히 역사발생의 순서대로 제시한다는 생각을 넘어서 수학적 개념, 곧 지식의 본질과 관련하여 그 역사발생 과정을 분석함으로써, 학생들이 스스로 장애를 극복하여 학습할 수 있도록 하는 방향을 제시한다는 점에서, 그의 이론은 역사발생적 원리에 대한 재해석을 시도한 것이라 볼 수 있다.

이와 같이, 고전적인 역사발생적 원리는 역사발생과 동일한 순서로 지도할 것을 주장하지만 현대적인 역사발생적 원리는 역사를 재구성할 것을 주장한다. 즉, Lakatos의 교재의 합리적인 재구성, Freudenthal의 안내된 재발명 방법과 문맥 문제의 구성, Brousseau의 교수학적 상황의 구성은 역사발생 단계 그대로 할 것을 주장하는 것이 아니라 역사적인 분석을 기초로 하여 학생들이 수학적 개념을 가장 잘 학습할 수 있는 상황을 제시하기 위하여 교재를 재구성할 것을 제안하고 있는 것이다. 이들은 단순한 수학적 지식의 전달 자체를 중시하는 것이 아니라, 학습자의 활동을 강조하고 학습의 어려움의 근원을 이해하려고 한다는 점과 그를 위해 역사적 분석을 강조하며, 학습자의 활동과 참여를 중시하고 교사는 그러한 환경을 만들고 학생들 이 수학적 개념을 스스로의 힘으로 지식을 구성할 수 있도록 도와준다는 측면을 강조하고 있다.

3. 수학사적 배경

본 절에서는 군과 환을 비롯한 대수학의 역사를 Berggren et al.(2002), Fraleigh(2003), Eves(1983), O'Connor & Robertson(1994, 1996) 등을 참조하여 요약 · 정리하고자 한다.

대수의 역사는 고대 이집트와 바빌론에서 일차방정식과 이차방정식의 해를 구하고자 하는 시도로부터 비롯되었다고 할 수 있는데, 고대 바빌로니아 사람들은 현재 쓰이는 방법과 같은 방법으로 이차방정식의 해를 구하였다. Diophantus는 이집트와 바빌론의 전통을 이어받아, 처음으로 산술 문제를 기호로 형식화한 후에 그 문제를 풀고 방정식에서의 미지량을 표현하기 위하여 수가 아닌 문자로 나

타낸 부정값을 도입하였다.

아라비아의 수학은 인도의 대수와 그리스의 기하 등을 받아들여 이것을 정리 발전시켜 유럽에 전하는 역할을 했다. 특히, 9세기의 아라비아 수학자 Al-Khwarizmi는 중세 수학에 커다란 영향을 준 산술책과 대수책을 썼으며, 그가 대수책에서 방정식의 음의 항을 다른 변으로 이항한다는 뜻으로 사용한 al-jabru는 현재의 대수(algebra)의 어원이 되었다.

고대에는 문제의 풀이에서 가끔 '생략'하거나 간단한 기호를 도입하기는 하였지만 거의 산문체를 사용한 반면, 중세의 아라비아 수학자는 미지수 x의 차수가 높은 다항식을 언급하고 다항식의 기본적인 연산-현대적인 기호를 쓰지는 않았지만-을 할 수 있었다. 또, 페르시아의 수학자 Khayyam은 원추곡선을 이용하여 주어진 삼차방정식의 해를 표현하였다. 그러나 그는 일반적인 삼차방정식의 해를 구하는 알고리즘을 구한 것은 아니었다. 한편, 13세기의 이탈리아 수학자 Fibonacci는 주어진 삼차방정식의 해를 근사적으로 구할 수 있었고, 16세기 초의 이탈리아 수학자인 Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari는 일반적인 삼차방정식과 사차방정식의 정확한 해를 구하는 데 성공하였다. 1995년에 이르러서야 해결된 유명한 Fermat의 '마지막 정리'

모든 양의 정수 $n(n>2)$에 대하여 방정식 $x^n+y^n=z^n$은 정수해를 갖지 않는다.

는 1630년경에 제기되었다.

대수학에서의 16세기의 중요한 발전은 미지수, 거듭제곱, 연산을 나타내는 기호를 도입한 데에 있는데, Viete는 수학적 양을 문자를 써서 처음으로 나타내서 수의 개념에서 일반적인 기호의 개념으로 전환시키고, '+'와 '-'의 기호를 도입하여 대수학의 추상화에 기여하였다. 이것의 결과로 프랑스의 수학자 Descartes가 쓴 '방법서설'의 유명한 세 번째 부록인 '기하학'은 현대 대수학 교재와 같은 외양을 갖게 되었다. 데카르트의 가장 큰 공헌은 기하학적인 문제를 좌표를 도입하여 대수적 문제로 귀결시켜 해결하는 해석기하학을 창시했다는 것이다. 그의 기학학 책에는 방정식의 근의 개수와 관련된 내용도 포함되어 있는데, 이에 대한 연구는 18세기까지 계속되었다. 1799년에 Gauss는 복소평면에서는 모든 다항식이 적어도 한 근을 갖는다는 것을 증명하였다.

Gauss 시대에 이르러 대수학은 현대적인 관점에서 연구되기 시작하였다. 대수방정식(polynomial equation)의 해를 구할 때의 관점이 복소수 등에 기초한 공리로 만들어진 추상적 수학적 체계를 연구하는 관점으로 옮겨졌다. 이 때 나타나기 시작한 '군(group)'의 개념은 Galois의 획기적인 연구를 계기로 19세기 중반 명확한 형태를 갖게 되면서 군론으로 발전하여 현대 수학의 거의 모든 분야와 연관된 현대 대수학의 핵심 분야로서 매우 중요한 역할을 하고 있다.

Cauchy는 치환군의 이론의 발달시킨 큰 업적을 남겼는데, 치환에 대한 그의 첫 논문은 1815년에 발표되었으며 그는 주어진 방정식의 근 사이의 치환에 대하여 연구하였다. 그 후 Abel은 5차 이상의 대수방정식의 해는 일반적으로 대수적 방법으로 나타낼 수 없음을 보였다. 특히, Galois는 대수방정식의 해는 그 방정식으로부터 유도되는 치환군의 구조와 관련이 있음을 규명하고 이러한 과정 중에 오늘날의 정규부분군의 개념을 도입하였다. 이러한 연구들이 군 이론의 시발점이 되었다.

당시에 다루어졌던 군은 대부분 치환의 군이었는데, 19세기 중엽 Cayley 및 Kronecker는 최초로 군의 공리적 정의를 소개하였고 이를 계기로 치환의 군을 벗어난 추상적인 군의 취급이 가능해 졌다.

군론은 추상대수학의 여러 분야 중 최초로 개발되어 19세기 말부터 본격적인 연구가 시작되면서 가장 기본적이고 핵심적인 분야로서 추상대수학의 발전에 기여하여 왔다. 당시는 유한 치환군의 연구에서 시작되어 p-군, 가해군(soluble group) 및 일반적인 추상적 군의 구조에 대한 활발한 연구가 계속되었다. 특히 Cauchy의 유한 치환군은 이미 19세기 중반 Cauchy와 19세기 후반 Jordan의 대수방정식의 연구에 기원을 둔 연구에 이어서 20세기 초반과 중반에 Burnside, Manning, Frame 등에 의하여 중요한 연구가 계속 되었고, Zassenhaus, Wielandt 등에 이르러서는 유한치환군의 기본구조에 대한 상당한 연구 결과가 나오게 되었다.

그 후 20년 동안은 무한 치환군의 연구가 시작되었고 많은 진전은 있었지만 여전히 많은 연구 과제를 남겨두고 있다. 최근 치환군의 연구는 타 영역간의 관계성을 규명하는데 많은 관심을 보이고 있다. 치환군과 조합이론, 위상적 방법을 통한 치환군의 연구, 치환군 이론의 그래프이론(graph theory)에의 응용 등은 여러 영역간의 도움을 주고받는 주요한 연구영역이다.

한편, 환론(ring theory)은 실수나 복소수 위에서의 다항식환과 '대수적 정수(algebraic integer)'라는 두 가지 특별한 환의 연구로부터 발전되어 왔다.

1630년경에 제기된 Fermat의 '마지막 정리'를 해결하려는 과정에서 정수론은 많은 발전을 하였고 이것은 환론의 모태를 제공하여 대수학의 비약적인 발전을 가져왔다. 우선 $n=3$인 경우에는 Euler가 해결을 시도하면서, 그 과정에서 환 $\{a+b\sqrt{-3} \mid a,b \in \mathbf{Z}\}$에 적용하기 위하여 정수($\mathbf{Z}$)의 산술적인 계산을 확장하였는데, 이러한 접근방법을 사용하여 Kummer는 'ideal complex numbers'라는 개념을 도입하였다. 이 개념으로부터 1863년에 Dedekind는 'ideal'이라는 개념을 정의하였다. 또한 그는 1871년에 'module'이라는 단어를 사용하였고(현재의 module과는 조금 다른 개념임.) 소수(prime number)를 일반화하여 'prime ideal'이라는 개념을 만들었다.

1887년에 Hilbert는 대수적 정수를 연구하면서 '환(ring)'이라는 용어를 처음 사용하였고 환의 공리적인 정의는 1914년에 Fraenkel에 의하여 도입되었다. 특히, 1921년에 Noether가 발표한 'Ideal Theory of Rings'에 의하여 가환환론에 대한 공리적인 기초가 처음으로 제시되었다. 그 후로 10년간 그녀는 현대대수의 기본 개념의 발전에 큰 공헌을 하였다.

4. 추상대수학 강좌의 내용 전개 방법

추상대수학의 학부과정 강좌에서 교재로 가장 많이 쓰이는 대수학 16권을 선정하여 그 접근방법을 조사하였다. 그 중에서 11권의 교재가 먼저 군을 도입한 후 환과 체의 내용을 다루고 있고, 나머지 교재는 환을 군보다 먼저 다루고 있다. 우리가 조사한 교재는 다음과 같다.

▶ 환을 먼저 도입한 교재:

· Allenby(1991). Rings, Fields and Groups, An Introduction to Abstract Algebra, 2/E, Butterworth-Heinemann
· Anderson(2005). A First Course in Abstract Algebra: Rings, Groups and Fields, CRC Press
· Hungerford(1997). Abstract Algebra, 2/E: An Introduction, Saunders College
· Redfield(2001). Abstract Algebra : A Concrete Introduction, Addison-Wesley
· McCoy & Janusz(2001). Introduction to Abstract Algebra, 6/E, Harcourt Academic Press

▶ 군을 먼저 도입한 교재:

· 김응태 · 박승안(1998). 추상대수학, 경문사
· Dummit & Foote(1999). Abstract Algebra, 3/E, Wiley
· Durbin(2000). Modern Algebra: An Introduction, 5/E, Wiley
· Fraleigh(2003). A First Course in Abstract Algebra, Addison-Wesley
· Gallian(2002). Comtemporary Abstract Algebra, Houghton Mifflin
· Herstein(1999). Abstract Algebra, Wiley
· Hillman & Alexanderson(1999). Abstract Algebra: A First Undergraduate Course, PWS Pub Co
· Judson(1994). Abstract Algebra, PWS Pub Co
· Gilbert & Nicholson(2004). Modern Algebra with Applications, Wiley
· Goodman(1998). Algebra: Abstract and Concrete (Stressing Symmetry), 2/E, Prentice Hall
· Nicholson(1999). Introduction to Abstract Algebra, 2/E, Wiley
· Rotman(2000). First Course in Abstract Algebra, 2/E, Prentice-Hall

가. 군을 먼저 도입하는 방법

군을 먼저 도입하고 환을 나중에 다룬 교재 중 대표적인 것으로 Fraleigh(2003)의 책을 살펴보고자 한다. 그 책에서는 다음과 같은 순서로 내용을 전개하고 있다.

1. Sets and Relations
2. Groups and Subgroups
3. Permutations, Cosets, and Direct Products
4. Homomorphisms and Factor Groups
5. Rings and Fields
6. Ideals and Factor Rings
7. Advanced Group Theory
8. Groups in Topology
9. Factorization.
10. Automorphisms and Galois Theory

<표 1> 테마별로 분류한 Hungerford(1997)의 목차

주제	테마	정수	다항식	환	군
수론	나눗셈 정리	**1. $\mathbf{Z}$에서의 계산 다시 살펴보기** 1.1 나눗셈 정리	**4. $F[x]$에서의 계산** 4.1 다항식 계산 및 나눗셈 정리	**9. 정역에서의 계산** 9.1 유클리드 영역	
	나누어떨어짐	1.2 나누어 떨어짐	4.2 $F[x]$에서의 나누어 떨어짐	9.1 유클리드 영역 9.2 주 아이디얼 정역과 유일 인수분해 정역	
	소인수와 소인수분해	1.3 소수와 소인수 분해의 유일성	4.3 기약다항식과 소인수 분해의 유일성		
	소인수 판정법	1.4 소인수 판정법	4.4 다항함수, 근, 약분성 (reducibility) 4.5 $\mathbf{Q}[x]$에서의 약분성 4.6 $\mathbf{R}[x]$와 $\mathbf{C}[x]$에서의 약분성	**6. 아이디얼과 상환** 6.1 아이디얼과 합동	
합동	합동	**2. $\mathbf{Z}$에서의 합동과 모듈라 계산** 2.1 합동과 동치류	**5. $F[x]$에서의 합동 및 합동류 계산** 5.1 $F[x]$에서의 합동 및 합동류	6.2 상환과 준동형 사상	**7. 군** 7.5 합동 7.6 정규부분군
	합동류 합동류 계산	2.2 모듈라 계산	5.2 합동류 계산	6.3 I가 소 아이디얼이거나 극대 아이디얼일 때, R/I의 구조	7.7 상군 7.8 상군 및 준동형 사상
	특별한 상구조 (quotient structure)	2.3 p가 소수일 때 $\mathbf{Z}_p$	5.3 $p(x)$가 기약다항식일 때 $F[x]/(p(x))$의 구조		
추상대수 구조				**3. 환** 3.1 환의 정의와 그 예	**7. 군** 7.1 군의 정의와 그 예
				3.2 환의 기본 성질	7.2 군의 기본성질 7.3 부분군
				3.3 동형사상	7.4 동형사상
					7.5 Lagrange의 정리 7.9 대칭군과 교대군 7.10 A_n의 단순성 (simplicity)

<표 2> 테마별로 분류한 Judson(1994)의 목차

주제	테마	정수	다항식	군	환
수론	나눗셈 정리	**1. 정수** 1.2 나머지 정리	**15. 다항식** 15.1 다항식 환 15.2 나머지 정리		**16. 정역** 16.2 정역에서의 인수분해
수론	나누어 떨어짐	1.2 나머지 정리			16.2 정역에서의 인수분해
수론	소인수와 소인수분해	1.2 나머지 정리	15.2 기약다항식		
수론	소인수 판정법	1.2 나머지 정리	15.2 기약다항식		
합동	합동	2.1 법 n에 대한 잉여류와 대칭들	15.2 기약다항식	**9. 준동형사상과 상군** 9.1 상군과 정규부분군 9.2 군 준동형사상	14.3 환 준동형사상과 아이디얼
합동	합동류 합동류 계산	2.1 법 n에 대한 잉여류와 대칭들	15.2 기약다항식	15.2 기약다항식	14.4 소 아이디얼과 극대 아이디얼
합동	특별한 상구조 (quotient structure)		15.2 기약다항식		16.1 분수체
추상대수 구조				2. 군 2.2 정의와 예	**14. 환** 14.1 환
추상대수 구조				2.3 부분군	**4. 환과 체** 4.1 환과 체
추상대수 구조				9.3 동형사상	
추상대수 구조				**3. 순환군** **4. 치환군** **5. 잉여류와 Lagrange의 정리**	

나. 환을 먼저 도입하는 방법

환을 먼저 다룬 대표적인 교재인 Hungerford(1997)의 목차는 다음과 같다.

1. Arithmetic in **Z** Revisited
2. Congruence in **Z** and Modular Arithmetic
3. Rings
4. Arithmetic in $F[x]$
5. Congruence in $F[x]$ and Congruence-Class Arithmetic
6. Ideals and Quotient Rings
7. Groups
8. Topics in Group Theory
9. Arithmetic in Integral Domains
10. Field Extensions
11 Galois Theory
12. Public-Key Cryptography
13. The Chinese Remainder Theorem
14. Lattices and Boolean Algebras
15. Geometric Constructions
16. Algebraic Coding Theory

Hungerford(1997)는 추상대수학의 내용을 구체적인 구조에서부터 추상적인 구조로 전개하는 방식에 근거하여 수론, 합동, 추상대수 구조로 나누고 또한 구체적인 대상에서부터 추상적인 대상으로 발전하는 방식에 근거하여 그 대상을 정수, 다항식환, 환, 군으로 나누어 각 대상에 대한 구조적 분류를 표로 나타내었다(<표 1> 참조).

Hungerford가 제시한 테마별로 분류한 목차에 맞추어, Fraleigh(2003)와 비슷한 내용 전개를 하고 있는 Judson(1994)의 교재 내용을 상세히 나타내면 <표 2>와 같다.[1)]

5. 교재분석

군을 먼저 도입하는 교재의 경우는 책마다 약간씩의 차이는 있을 수 있으나 대체로 먼저 군의 정의를 공리적으로 도입하고 간단한 예와 함께 기본적인 성질들을 도출하고 부분군 및 군준동형사상,

---

1) 본문에서 군을 먼저 도입하는 경우의 교재 소개에서는 보다 많이 사용되는 Fraleigh(2003)의 내용을 서술하였으나, Hungerford의 내용분류에는 부적합하므로 이 분류에 좀 더 적합한 Judson(1994)의 교재를 택하여 분류하였다.

정규부분군, 상군의 순서로 전개하고 있다. 그 후에 환을 공리적으로 도입하고 부분환, 정역, 아이디얼, 환준동형사상, 상환의 순으로 전개한다.

군을 먼저 도입하는 교재에서는 군을 먼저 도입하는 것이 상례 이어서인지 교재의 저자들은 서문 등에서 군을 먼저 도입하는 것의 이점을 언급하지 않고 있다. 그러나 환을 먼저 도입하는 교재는 그에 대한 장점을 서문에 언급하고 있다. 우리나라에서도 군을 먼저 도입하는 것이 더 익숙하다고 생각되므로 본 연구에서는 환을 먼저 도입하는 교재만을 분석하고 그 장점을 살펴보고자 한다.

Hungerford(1997)는 그가 쓴 교재의 개정판 서문에서 개정판을 쓰면서 여러 곳을 수정하였지만, 군을 다루기 전에 환, 체, 다항식을 다루는 전개를 계속 유지한 이유가 "이런 식의 전개가 현대대수학을 학생들에서 소개하는데 가장 좋은 방법이라는 것에 대하여 여전히 확신하고, 또한 제 1판에 대한 반응으로 미루어 볼 때 많은 다른 수학자들로 이것에 동의하고 있음을 알 수 있었기 때문"이라고 하였다.

Hungerford의 내용 전개를 간단히 살펴보면 다음과 같다. 우선 그는 정수의 법 n에 대한 합동류로 이루어진 환을 도입할 때, 두 정수 a, b에 대하여

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (a-b) \qquad \cdots\cdots (*)$$

라는 $\mathbf{Z}$ 위에서의 관계를 도입한 후, 이것이 동치관계임을 보이고 a를 포함하는 동치류를 $[a]$로 표시하였다. 또, $\mathbf{Z}_n = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$ 위에 덧셈과 곱셈을 각각

$$[a]+[c]=[a+c] \text{와 } [a][c]=[ac]$$

로 정의한 후 이것이 잘 정의된(well-defined) 연산임을 보였다. 환의 추상적인 개념을 도입하고 주어진 체 F의 원소를 계수로 갖는 다항식환 $F[x]$을 도입한 후, 정수환의 경우와 평행하게 다항식의 법 $p(x)$에 대한 합동류로 이루어진 환 $F[x]/(p(x))$을 도입하였다. 즉, 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{p(x)} \Leftrightarrow p(x) \mid (f(x)-g(x))$$

라는 관계를 위의 (*)와 유사하게 도입한 후, 이것이 동치관계임을 보이고 $f(x)$를 포함하는 동치류를 $[f(x)]$로 표시하였다. 또, $F[x]/(p(x))$위에 덧셈과 곱셈을 각각

$$[f(x)]+[g(x)]=[f(x)+g(x)]$$
$$[f(x)][g(x)]=[f(x)g(x)]$$

로 정의한 후 이것이 잘 정의된(well-defined) 연산임을 보였다.

이러한 전개는 일반적인 환 R의 아이디얼 I에 대하여 법 I에 대한 합동류로 이루어진 환 R/I을 도입하는 과정에서 반복되고 다시 일반적인 군 G의 정규 부분군 N에 대하여 법 N에 대한 잉여류로 이루어진 상군 G/N을 도입할 때 또 한 번 반복된다. 이와 같이 Hungerford는 구체적인 것에서 좀 더 추상적인 것으로 옮겨가면서 '동치관계 도입' → '동치류를 원소로 갖는 집합 위에서의 연산을 정의' → '그것이 잘 정의되어 있음을 보임'의 과정을 도합 네 번 반복하여 학생들이 상군의 쉐마(Schema)를 형성하도록 유도하려고 했다.

한편, Anderson과 Feil(2005)은 대부분의 추상대수학 교재가 군을 먼저 시작해서 환과 체에 이른다고 하면서, 군이 구조면에서 논리적으로 가장 간단하다고 할 수 있으나, 군을 공부해야 할 동기를 추상대수학을 처음 공부하는 학생들에게 부여하기가 어렵다고 지적하였다. 따라서 학생들이 어느 정도 알고 있는 것에서 출발하여 동기를 부여하고 몰입하게 하면서 추상화하여 가는 것이 좀 더 자연스럽고 궁극적으로는 좀 더 효과적이라고 주장하였다.

Redfield(2001)도 환을 군보다 먼저 도입하였는데, 제일 먼저 정수의 성질을 다룬 다음 3차 방정식과 4차 방정식의 일반적인 해를 구하는 방법을 논하고, '정수의 법 n에 대한 합동류로 이루어진 환', '체', 일반적인 '환', '군'을 도입하는 순으로 교재를 구성하였다. 그는 이렇게 구성한 이유를 구체적이고 친숙한 체로부터 좀 더 추상적이고 흔히 보지 못한 군으로 전개하려고 의도하였으며 이것은 역사적으로 이 구조들이 인식된 순서와 일치한다고 하였다. 그 전개방식은 Hungerford와 유사하다고 볼 수 있다.

또, McCoy와 Janusz(2001)도 환을 군보다 먼저 도입하였고 그 이유를 교재에서 계속해서 예로 드는 정수환이 학생들에게 친숙하며 추상적인 개념을 좀 더 구체적으로 만드는 것을 도와줄 수 있기 때문이라고 했다. 그들의 전개방식도 Hungerford와 유사하다. Fein은 이 책의 서평에서 저자들이 군을 도입하기 전에 환을 도입한 방식에 적극 동의하며, 저자들은 이 선택이 올바른 것이었음을 충분히 뒷받침 할 만큼 책을 잘 집필하였다고 서술하고 있다.
(http://www.amazon.com/exec/obidos/tg/detail/-/0123803926/ref=olp_product_details/103-6812180-0087859?%5Fencoding=UTF8&v=glance 참조).

6. '현대대수학' 강좌 수강 학생의 인터뷰

가. 대상학생 선정

본 연구를 위하여 상위그룹에 속한 한 대학의 '현대대수학' 강좌를 수강한 수학전공 학생들 중에서 성적과 재수강 여부를 고려하여 다음 <표 3>과 같은 학생 7명을 인터뷰 대상자로 선정하였다. 재수강 학생들도 포함시킨 이유는 금년(2005년)에는 현대대수학 강좌에서 환을 먼저 다루고 군의 개념으로 들어가는 교재를 선택하여 강의하였고 작년까지는 군에서부터 시작한 교재로 강의하였기 때문에

두 가지 방법 모두를 경험해 보아 이 둘을 비교하기가 수월할 것이라고 생각했기 때문이다.

<표 3> 인터뷰 대상학생

학생	성별	학번	수강연도		성적	비고
			2005 이전	2005		
학생 1	여	00	O	O	Ao(재수강 성적)	
학생 2	남	03		O	B+	
학생 3	여	03		O	A+	
학생 4	여	01	O	O	A-(선형대수 성적)	졸업생
학생 5	여	00	O	O	Co	
학생 6	남	99	O		Bo	
학생 7	남	02	O		B+	

인터뷰 대상으로 선정된 학생들을 6월 30일과 7월 1일 양일에 걸쳐서 개별적으로 인터뷰하였다. 인터뷰 내용은 학생들의 양해를 얻고 캠코더로 모두 녹화한 후, 테이프를 보고 녹취록을 작성하여 본 연구팀이 그 내용을 분석하였다

나. 인터뷰 내용

7명의 학생을 인터뷰한 결과 군을 먼저 도입하는 수업과 환을 먼저 도입하는 수업을 모두 들은 학생 3명 모두는 본인의 경험에 비추어 볼 때 환을 먼저 하는 것이 좋다고 응답하였다. 환 또는 군을 먼저 도입하는 수업만 들은 학생들에게는 어느 것이 좋은지 추측하여 대답하게 하였는데, 환을 먼저 들은 한 학생을 제외하고는 본인이 들은 수업이 좋다고 하였다.

환을 먼저 배우는 것이 좋다고 응답한 학생들은 그 이유를 다음과 같이 말하고 있다.

· 다항식을 포함하는 환하고 체는 익숙해서 별로 어렵지는 않다.
· 상군은 표기법부터 너무 생소하다.
· 정수론과 비슷하여 환이 쉬웠다.
· 환을 먼저 하고 군으로 들어가니까 너무 쉽게 느껴진다.
· 정수론부터 출발하여 조금씩 추상화시켜서 접근하기 쉬웠다.
· 환을 먼저 하면 익숙한 대상에서 시작해서 거부감이 없다.
· 환을 먼저 하고 군으로 가면 간단한 개념이해를 하고 엄밀한 내용을 파악할 수 있다.
· 군을 먼저 하면 의미가 없이 왜 배우는지 모르고 무조건 외우게 된다.

위의 학생들은 대부분 환을 먼저 배우는 경우에는 알고 있는 정수론에서부터 시작하여 조금씩 추상적으로 나가기 때문에 접근하기 쉽지만 군을 먼저 시작하면 왜 배우는 지도 모르고 갑자기 추상적

인 내용이 나와서 어렵게 느껴진다고 답하였다.

한편, 군을 먼저 배우는 것이 좋다고 응답한 학생들은 그 이유를 다음과 같이 말하고 있다.

- 군은 공리의 개수가 작아서 접근이 용이하다.
- 군에서 기하학적 변환 등 응용을 다루기 때문에 재미있게 시작할 수 있다.
- 군에는 많은 성질이 있고 특징적인 것이 많아서 재미있게 시작할 수 있다.
- 환은 단순해서 재미가 없다.
- 군에서는 연산이 한 개이어서 배우기가 쉽다.
- 연산 한 개에서 다른 연산이 추가되는 식으로 확장해 나가는 것이 마음에 들었다.
- 아이디얼이 무슨 내용인지 잘 이해하기 어려웠다.

이 학생들은 군의 공리가 더 간단하여 배우기 쉽고 한 개의 연산에 또 다른 연산을 추가하는 식으로 확장하기 때문에 더 자연스럽게 느끼고 있다.

다음에 예로서 제시하는 학생은 재수강을 하였는데, 환을 먼저 배우는 것이 더 낫다고 응답하였고 그 이유를 다음과 같이 이야기하였다.

학생 저는 ring을 먼저 배우는 게 더 좋았거든요.

교수 음..왜?

학생 일단 제가 group을 먼저 들었을 때, 그 때 3학년 때 다른 선생님께 들었는데, 그때 공부를 안 한 것도 이유가 있겠지만 그냥 그때 무슨 얘기를 하는지 하나도 모르고 수업을 들었거든요. 갑자기 연산자 얘기 꺼내고 그러니까 지금 내가 뭘 하는지 이게 되게 어렵고 중요하다고 얘기 들었는데 뭘 하는 건지를 아예 몰랐어요. 그런데 ring부터 이번에 처음 수업을 들었는데, 할 때 선생님께서도 정수라는, 우리가 흔히 접하는 정수라는 문제에서부터 출발했다고 하면서 이렇게 조금씩 추상화시켜서 그렇게 나갔잖아요. 그래서 '아 …, 내가 뭐를 하고 있는지'를 선생님도 말씀해주시고 조금씩 더 추상화시켜주니까 더 좋았어요. 더 이해하기도 쉬웠고.

⋮

(중략)

⋮

학생 ring이 group이랑 관련되고 더 연산자가 많고 이런 얘긴 얼핏 들었어요. 들었는데 …, 그런데 관련성이라고 해야 하나? 그런 거를 인식하지 못했는데 오히려 ring부터 배우고 group 배우면서 앞의 ring은 group에서 곱셈에 대한 아벨군 …, 이런 거 …, ring이란 군이랑 관련 같은 것도 알려지기 때문에 지루함보다 그런데서 그 관련성도 같이 알아보고 …, 하면 좋지 않을까 생각이 들어요.

한편, 다음에 예로서 제시하는 학생은 재수강을 한 학생으로 본인은 환을 먼저 배우는 것이 더 낫다고 하였지만, 군을 먼저 배우는 것과 환을 먼저 배우는 것의 장·단점을 다음과 같이 이야기하였다.

학생 어느 면에서나 장단점이 있는데 오히려 환을 먼저 하는 게 애들한테 …, 저희가 공부하는 데는 좀 더 친근하게 느껴지고 나중에 해야 할 게 생기는 거니까요.

교수 해야 할 게 뭐야?

학생 나중에 앞의 것을 혼자 자습을 할 수 있잖아요, 다 이해는 간 부분이고, 문제 풀 때 혼란이 생기고 좀더 엄밀한 거에 대해 벽에 부딪히는 거라고 해야 되나?

⋮

(중략)

⋮

교수 후배들한테 추천을 해 준다면 어느 거 추천해 주고 싶어?

학생 그거는 케이스별로 틀린데 …, 공부 스타일이요. 일단 체계적인 것을 원하는 학생한테는 군부터도 괜찮을 것 같고요, 이해 안가면 아예 안 하는 학생한테는 환부터가 나을 것 같아요.

7. 논 의

우정호 · 민세영(2002)은 역사발생적 원리의 고전적 의미와 현대적 의미를 분석한 후에 역사발생적 학습-지도 원리를 실제 수학 학습-지도에 적용하기 위한 지도단원의 구성 과정은 다음과 같은 4단계로 제시하였다.

첫째, 가르치고자 하는 수학적 지식에 대한 수학적 분석이 필요하다. 수학교육은 가르칠 내용의 수학적 구조와 학습자의 인지 구조 사이를 조정해 가는 연속적인 과정이므로 지도에 앞서서 가르칠 내용에 대한 철저한 이해가 선행되어야 한다. 이때, 학교수학은 학문으로서의 수학이 교수학적으로 변환된 것으로서, 단순히 학문으로서의 수학적 관점만을 강조해서는 안 된다.

둘째, 수학적 지식의 역사적 발생과 발전 과정에 대한 분석을 시도한다. Steinbring(1998)의 지적처럼, 학교수학은 학문적 수학의 지식으로부터 논리적으로 연역될 수 없으며, 역사적 차원의 수학적 지식, 즉 수학적 지식의 역사발생 과정에 대한 이해를 요구한다. 이러한 역사발생 과정의 분석 단계는 역사발생적 학습-지도 원리의 핵심적 단계라 할 수 있으며, 수학적 지식 발생의 문제 문맥에 대한 확인은 그 지식을 학생들이 발생시킬 수 있도록 하기 위한 상황을 제시하는 데 있어서 무엇보다도 중요하다.

셋째, 관련된 내용을 학습하는 데 따르는 학생들의 학습 심리적 요소에 대해 분석이 필요하다. 이것은 학생들이 기본적으로 갖고 있는 인지적 수준에 대한 분석, 학생들의 수학적 지식에 대한 이해 정도, 인지적 장애 등에 대하여 고찰하는 것을 말한다.

넷째, 수학적 지식의 발견의 문맥을 교수학적으로 재구성하여 지도단원을 구체적으로 구성한다. 즉, 수학적 지식에 대한 수학적 분석, 역사발생 분석, 심리적 분석을 토대로 하여 학생들이 그 지식을 학습할 수 있도록 하는 문맥을 구성하고, 이를 기초로 하여 교재의 구체적인 내용과 학생의 활동, 지도 사항 등에 대해서 구체적으로 계획한다.

이와 같은 역사발생적 학습-지도 원리와 함께 우리가 앞에서 살펴본 바를 종합하면, 추상대수학 강좌에서 군을 먼저 도입하는 것보다 환을 도입하는 것이 다음과 같은 이유에서 더 적당하다고 사료된다.

첫째, 논리적으로는 군의 구조가 환의 구조가 간단하여 먼저 도입하는 자연스럽겠지만, 구조가 단순함으로 인하여 학생들이 쉽게 인식할 수 있는 구체적인 예를 제시하기가 어렵다. 또한 학습의 동기부여도 쉽지 않아서 학생들이 근본적인 이해 없이 단순 암기로 학습하게 될 수 있다.

둘째, 환이 군보다 더 늦게 공리적으로 정의되었지만 그것의 모델인 정수환은 이미 고대 이집트와 바빌론까지도 거슬러 올라갈 수 있으며, Diophantus는 방정식의 해를 정수에만 국한하는 부정방정식의 연구를 하기도 하였다. 한편, 군의 개념은 Gauss 시대(18 세기말)에 나타나기 시작하여 Galois의 연구를 계기로 19세기 중반에서야 명확한 개념을 갖게 되었다. 따라서 역사발생적 학습-지도 원리에 따르면 환론이 군론보다 먼저 지도되는 것이 바람직하다.

셋째, 학생들의 인터뷰 결과 환을 먼저 도입하는 것을 선호한 학생들은 대체로 알고 있는 정수론에서부터 시작하여 조금씩 추상적으로 나가기 때문에 접근하기 쉽지만 군을 먼저 시작하면 왜 배우는 지도 모르고 갑자기 추상적인 내용이 나와서 어렵게 느껴진다고 답하였다. 또한 군에서의 가장 손쉽게 다룰 수 있는 예가 정수 덧셈군인데, 이미 두 가지 연산을 다루는데 익숙해 있는 학생들에게 곱셈이 없는 정수 집합의 조작은 자연스럽지 못하고 오히려 혼돈을 줄 수가 있다.

그러므로 추상대수학의 강좌에서 정수환에 기초한 간단한 환론을 먼저 도입하고 다항식환으로 확장한 후, 추상화된 환론으로 나아가는 것을 고려해 볼만하다. 이 후에 군론을 도입하면 군론의 추상화는 네 번째 반복으로 인하여 보다 쉽게 개념파악을 할 수 있고 군론에서 학생들이 가장 어려워하는 유한군의 분류 등의 구조파악을 용이하게 할 수 있다.

한편, 신현용(2003a, 2003b)은 추상대수학 강좌의 목표를 '대수적 구조에 관한 포괄적이고 종합적인 이해를 하는 것'으로 두고, '군, 환, 체'의 세 가지 대수적 구조를 병렬로 다루고 있다. 예를 들어, 먼저 '군, 환, 체'의 정의를 다루고 나서 '부분군, 부분환', '정규부분군, 이데알', '군준동형사상, 환준동형사상'과 같이 쌍으로 다루는 방법을 제시하고 있다. 이 때, 정확한 정의나 정리를 기술하기 전에, 학생들에게 이미 친숙하면서도 중요한 $\mathbf{Z}$(정수군, 정수환)이나 $\mathbf{Z}_n$(잉여류군, 잉여류환)의 구조들을 수시로 예로서 제시하여 해당 개념이나 성질들을 소개하고, 점점 추상화, 일반화, 정교화, 그리고 심화시켜 나아가고 있다. 이는 친숙한 정수환을 먼저 지도하고자 하는 우리의 주장과도 일치하는 내용이다.

다만, 환을 먼저 전개하는 과정에서 상당히 추상화된 개념인 아이디얼을 일찍 도입하게 됨으로써 아직 추상화에 익숙지 않은 학생들에게 부담이 될 수 있는데, 이것은 다음과 같은 방법을 사용하면 다소간 완화시킬 수 있을 것이다.

- 부분환과 아이디얼의 차이점을 확실히 인식할 수 있도록 충분한 시간을 들여서 설명한다.
- 아이디얼에 대한 많은 예를 제시한다.
- 상환을 만들기 위해서는 부분환이 아닌 아이디얼의 개념이 필요하다는 것을 명확히 인식시킨다.

위의 세 번째 내용은 다음과 같이 자세히 설명될 수 있다.

1. 환 R의 주어진 부분환 A에 대하여 동치관계를 다음과 같이 정의한다. R의 임의의 원소 a와 b에 대하여

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in A$$

2. a를 포함하는 동치류를 $a+A$로 표시하기로 약속하고 이것을 '잉여류'라고 부르기로 한다. 여기서 '+'는 연산이 아닌 단순한 기호임을 강조한다.
3. 서로 다른 동치류들의 집합 위에서 다음과 같이 연산을 정의한다. 이 때, 첫 번째 등식과 두 번째 등식 각각에 서로 다른 연산이 세 개가 존재함을 강조한다.

$$(a+A)+(b+A)=(a+b)+A;$$
$$(a+A)(b+A)=ab+A$$

4. A가 단순히 환이어도 덧셈에 대한 연산은 잘 정의됨을 보인다. 즉, $a+A=c+A$이고 $b+A=d+A$일 때,

$$(a+b)+A=(c+d)+A$$

임을 보인다.

5. 곱셈연산이 잘 정의되도록 하기 위해서는 아이디얼의 개념을 도입할 수밖에 없음을 보인다.

5-1. 아이디얼이 아닌 부분환의 예를 들어 이 경우 연산이 잘 정의될 수 없음을 보인다.

예를 들어, 크기가 2×2인 실수원소를 갖는 정방행렬로 이루어진 환 $M(\mathbf{R})$의 부분환

$$J=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&r\end{pmatrix}\,\middle|\, r\in \mathbf{R}\right\}$$

를 생각해 보자. 이 때,

$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$이고 $\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$이지만,

$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix}$이고 $\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}\not\sim\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

즉, $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+J=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}+J$이고 $\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}+J=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+J$이지만

$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}+J\neq\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+J$이므로

$$\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+J\right)\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}+J\right)\neq\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}+J\right)\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+J\right).$$

따라서 곱셈연산이 잘 정의되지 않았다. 이 이외에도 다항식환 $\mathbf{Z}[x]$의 부분환인 상수다항식으로만 이루어진 집합과 같은 여러 개의 예를 들어서 학생들이 무엇을 하고 있는지 충분히 파악하도록 한다.

5-2. 아이디얼의 개념이 필요함을 다음과 같이 설명한다.

곱셈 연산이 잘 정의되려면 $a+A=c+A$이고 $b+A=d+A$일 때,

$$(a+A)(b+A)=(c+A)(d+A)$$

임을 보여야 하는데, 이 등식은 동치류 곱셈의 정의에 의하여

$$ab+A=cd+A$$

과 동치이다. 이것은 또한

$$ab-cd\in A \qquad \cdots\cdots (**)$$

와 동치이다.

곱셈 연산이 잘 정의되어 있음을 보이기 위하여 가정 $a+A=c+A$와 $b+A=d+A$로부터 위의 식 (**)을 도출하려고 시도한다면, $a(b-d)\in A$와 $(a-c)d\in A$을 먼저 보인 후, $ab-ad+ad-bc\in A$을 유도해야 한다. 하지만 부분환의 정의만 가지고는 $a\in R$과 $(b-d)\in A$가 $a(b-d)\in A$임을 함의할 수 없다. 따라서 부분환이면서 임의의 환의 원소 r과 임의의 부분환의 원소 a에 대하여 그것의 곱 ra가 부분환에 속하는 성질을 만족하는 개념이 필요하여 이로부터 아이디얼 개념이 도입되었다.

Acknowledgement: 본 연구를 위하여 인터뷰 내용을 정리하여 준 이정연, 이주영에게 감사의 뜻을 표합니다.

참 고 문 헌

김응태 · 박승안 (1998). 추상대수학, 서울: 경문사.

민세영 (1998). Piaget의 개념발달의 메커니즘과 대수의 역사, 대한수학교육학회 논문집 **8(2)**, pp.485-494.

박문환 · 민세영 (2002). 역사발생적 관점에서 본 미적분 지도, 대한수학교육학회지 <학교수학> **4(1)** pp.49-62.

박혜숙 · 김서령 · 김완순 (2005). 수학적 개념의 발생적 분해의 적용에 대하여-추상대수학에서의 $\mathbf{Z}_n$의 경우, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **44(3)**, 게재예정.

신현용 (2003a). 교사 양성 대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법 개발, 학술진흥재단 연구보고서 제4권, 과제번호 KRF-2002-076-C00008.

신현용 (2003b). 교사양성 대학에서의 대수 영역의 학습과 지도, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.481-501.

신현용 · 이강섭 · 한인기 · 류익승 (2005). 중등학교 수학교사 양성을 위한 현대대수학 교재 개발 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **44(3)**, pp.337-360,.

우정호 · 민세영 (2002). 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구, 대한수학교육학회지 수학교육학연구 **12(3)**, pp.409-424.

우정호 · 민세영 · 박미애 (2003). 역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구: Branford를 중심으로, 대한수학교육학회 2002년도 동계 수학교육학 연구발표대회 논문집, pp.617-634.

장혜원 (2003). Clairaut <기하학 원론>에 나타난 역사발생적 원리에 대한 고찰, 대한수학교육학회 2002년도 동계 수학교육학 연구발표대회 논문집, pp.635-650.

이상구 · 박종빈 · 양정모 · 김익표 (2004). 바둑판을 이용한 흑백 게임의 최적해를 구하는 선형대수학 알고리즘, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **43(1)**, pp.87-96.

Allenby, R. B. J. T. (1991). *Rings, Fields and Groups, An Introduction to Abstract Algebra*, 2/E, Butterworth-Heinemann.

Anderson M. & Feil T. (2005). *A First Course in Abstract Algebra: Rings, Groups and Fields*, CRC Press.

Asiala, M.; Brown, A.; DeVries, D.; Dubinsky, E.; Mathews, D. & Thomas, K (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, *Research in Collegiate Mathematics Education II*, Issues in Mathematics Education (CBMS), American Mathematical Society, pp.1-32.

Asiala, M.; Dubinsky, E.; Mathews, D.; Morics, S. & Oktac, A. (1997). Development of Students' Understanding of Cosets, Normality and Quotient Groups, *Journal of Mathematical*

Behavior **16(3)**, pp.241-309.

Berggren, J. L. et al. (2002). *Microsoft Encarta*, Microsoft Corporation.

Branford, B. (1908). *A Study of Mathematical Education*, Oxford: Clarendon Press.

Brown, A.; DeVries, J.; Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups, *Journal of Mathematical Behavior* **16(3)**, pp.187-239.

Dubinsky, E.; Dautermann, J.; Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory, *Educational Studies in Mathematics* **27**, pp.267-305.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research, In D. Holton et. (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp.273-280.

Dummit, D. & Foote, R. (1999). *Abstract Algebra,* 3/E, Wiley

Durbin, J. R. (2000). *Modern Algebra: An Introduction*, 5/E, Wiley.

Eves, H. (1983). *Great Moments in Mathematics After 1650*, Mathematical Assn of America, 오혜영 · 허민 역 (1994). 수학의 위대한 순간들, 경문사.

Fraleigh, J. B. (2003). A *First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley.

Gallian, J. A. (2002). *Comtemporary Abstract Algebra*, Houghton Mifflin.

W.J. Gilbert & K. N. Nicholson (2004). *Modern Algebra with Applications*, Wiley

Goodman, F. (1998). *Algebra: Abstract and Concrete (Stressing Symmetry)*, 2/E, Prentice Hall.

Hazzan, O. (1999). Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts, *Educational Studies in Mathematics* **40**, pp.71-90.

Herstein, I. N. (1999). *Abstract Algebra*, Wiley.

Hillman, A. P. & Alexanderson, G. L. (1993). *Abstract Algebra: A First Undergraduate Course*, Pws Pub Co.

Hungerford, T. W. (1997) *Abstract Algebra*, 2/E : *An Introduction*, Saunders College.

Judson T. W., (1994). *Abstract Algebra*, PWS Pub Co.

Kline, M., et al. (1962). On the mathematics curriculum of the high school. *American Mathematical Monthly* **69**, pp.189-193.

Leron, U. & Dubinsky, E. (1995). An Abstract Algebra Story, *American Mathematical Monthly*, **102(3)**, March, pp.227-242.

Leron, U.; Hazzan, O. & Zazkis, R. (1995). Learning Group Isomorphism: A Crossroads of Many Concepts, *Educational Studies in Mathematics* **29**, pp.153-174.

McCoy, N. & Janusz, G. (2001). *Introduction to Abstract Algebra*, 6/E, Harcourt Academic Press.

Nicholson, W. K., (1999). *Introduction to Abstract Algebra,* 2/E, Wiley.

O'Connor, J. J. & Robertson E. F. (1994). The Development of Ring Theory, *MacTutor History of Mathematics*[http://www-history.mcs.st-andrews. ac.uk/HistTopics/Ring_theory.html].

O'Connor, J. J. & Robertson E. F. (1996). The Development of Ring Theory, *MacTutor History of Mathematics*[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Development_group_theory.html].

Redfield, R. (2001). *Abstract Algebra: A Concrete Introduction,* Addison-Wesley.

Rotman, J. J. (2000). *First Course in Abstract Algebra,* 2/E, Prentice-Hall.

Seldon, A. & Seldon, J. (1987). Errors and Misconceptions in College Level Theorem Proving, *Proceedings of the Second International Seminar-Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*, Cornell University, NY, pp.457-470.

Steinbring, H. (1998). Epistemological constraints of mathematical knowledge in social learning settings, In *Mathematics education as a Research Domain: A search for identity,* Sierpinska, A & Kilpatrick, J.(Ed.),, Britain: Kluwer Academic Publishers, pp.513-516.

Tall, D. (1989). Different Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm, In Wagner, S. & Kieran, C. (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* **4**, NCTM, pp.87-92.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Using Visual and Analytic Strategies: A study of students' understanding of permutation and symmetry groups, *Journal for Research in Mathematics Education* **27(4)**, pp.435-457.

Two Approaches to Introducing Abstract Algebra to Undergraduate Students

Hye Sook Park
Dept. of Math. Education, Seowon University, Chongju, Chungbuk 361-742, Korea
hyespark@seowon.ac.kr

Suh-Ryung Kim
Dept. of Math. Education, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
srkim@snu.ac.kr

Wan Soon Kim
Dept. of Math., Hoseo University, Asan, Chungnam 336-795, Korea
kimws@office.hoseo.ac.kr

There can be two different approaches to introducing Abstract Algebra to undergraduate students: One is to introduce group concept prior to ring concept, and the other is to do the other way around. Although the former is almost conventional, it is worth while to take the latter into consideration in the viewpoint that students are already familiar to rings of integers and polynomials. In this paper, we investigated 16 most commonly used Abstract Algebra undergraduate textbooks and found that 5 of them introduce ring theory prior to group theory while the rest do the other way around. In addition, we interviewed several undergraduate students who already have taken an Abstract Algebra course to look into which approach they prefer. Then we compare pros and cons of two approaches on the basis of the results of the interview and the historico-genetic principle of teaching and learning in Abstract Algebra and suggest that it certainly be one of alternatives to introduce ring theory before group theory in its standpoint.

* ZDM Classification : H45
* MSC2000 Classification : 97C90
* Key Word : historico-genetic principle, ring theory, group theory.