韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19권 제4호. 2005. 11. 715-731

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19 No 4, Nov. 2005. 715-731

유추를 통한 분수 연산에 관한 연구[1)]

김 용 태 (광주교육대학교 수학교육과)
신 봉 숙 (시화초등학교)
최 대 욱 (광주교육대학교부설초등학교)
이 순 희 (풍암초등학교)

I. 서 론

제 7차 교육과정에서 분수는 3-가 단계에서 부분-전체개념으로써 연속량의 등분할로 도입하여 4-가 단계의 동분모분수의 덧셈과 뺄셈, 4-나 단계에서 비와 몫의 개념, 5-가 단계 이분모분수의 덧셈과 뺄셈, 5-나 단계에서 분수의 곱셈과 나눗셈을 지도한다. 분수의 사칙연산이 알고리즘화 되어 아동은 분수의 연산을 개념적으로 이해하지 못하여 문제해결에서는 더욱 낮은 성취도를 드러내고 있다. 이는 분수의 학습을 하는 동안 아동은 개념의 도입에서 색종이 접기, 구체물 자르기 등으로 약간의 조작활동을 하지만 연산이 시작되면서 거의 조작활동 없이 형식적인 기호의 조작으로 일관되어 대부분의 아동이 개념의 파지가 되지 않는 상태에서 기계적인 계산을 하는 경우가 많다. 특히, 분수의 나눗셈은 연산의 의미를 계산 알고리즘에 연결시키지 못한 채 형식적 기호의 조작으로만 지도되어 교사나 학생에게 여전히 어려운 문제로 남아 있다. 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위해 전평국과 박혜경(2003)의 연구에서 초등학교 5학년 아동은 분수의 기호 표현에 대한 의미를 경험적 지식과 연결시키지 못하고 있으며, 분수에서의 나눗셈을 자연수에서의 나눗셈과 관련시키기 위해 동분모 분수에서의 나눗셈이 분자들끼리의 나눗셈과 같다는 사실을 학생들 스스로가 깨닫도록 이끄는 것이 중요하다고 하였다. 이는 '÷(분수)'는 '×(분수의 역수)'가 되는 과정을 보여주기에 부족하여 나눗셈이 곱셈의 역연산이 됨을 지도하기에는 미흡한 점이 있다. 5-나 단계에서는 곱셈으로 표현함으로써 예를 들면 $2\div3=2\times\frac{1}{3}$이 됨을 지도한다. 그런데 많은 아동은 몫이 자연수인 나눗셈의 의미를 정확히 모른 채 $2\div3$이 $2\times\frac{1}{3}$이 되는 과정을 기계적이고 방법만을 암기하여 (분수)÷(자연수), (분수)÷(분수)의 학습이 계속된다. 임재훈 등(2005)은 분수 나눗셈 알고리즘의 의미를 포함제, 단위 비율 결정, 비 또는 측정

---

1) 본 논문은 광주교육대학교 2004년도 학술연구비 지원에 의해서 연구되었음.

* ZDM분류 : F43
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 유추, 분수 나눗셈.

단위 세분, 곱셈의 역연산, 분수의 곱셈으로부터의 유추 등 다섯 맥락으로 나누어서 설명하였고, 분수 나눗셈은 제수의 역수를 곱하는 의미를 명확하게 다루어야한다고 하였다. 그를 위해서는 단위 비율 결정 맥락에서 제수의 역수는 줄이고 늘이는 연산자로 설명하는 것이 타당한 것으로 보았다 (Siebet, 2002). 본 연구에서는 분수의 덧셈, 뺄셈과 직사각형 모델을 통한 곱셈지도 지도 방안을 퀴즈네어 색 막대를 활용한 선행연구를 중심으로 요약한다. 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위하여 (분수)÷(자연수)의 교수 · 학습에서 조작 자료를 이용하여 분수 나눗셈의 의미와 계산 알고리즘의 연결을 알아본다. 그런 다음 (분수)÷(분수)의 전단계인 (분수)÷(자연수)의 지도 방안을 연구한다. 고대 이집트에서 행해졌던 물물교환이나 피라밋 건축에 비의 개념으로 유리수(분수)를 도입하여 사용하였던 점(Gillings, 1972)을 상기하면, 분수 연산은 비의 측면에서 지도해야 되겠지만, 나눗셈은 분수 곱셈의 역연산이므로 직사각형 모델을 이용하여 지도하는 것이 바람직하고 일관성이 있다. 그러나 직사각형 모델을 이용한 나눗셈은 포함제가 되므로, 분수 지도에 가장 적합한 퀴즈네어 막대를 활용하여 (Piaget, 1971) 분수 나눗셈을 포함제를 통하여 지도하고, 이에 따른 유추과정을 조직화하여 분수로 나누는 것은 그의 역수를 곱하는 것과 같음을 이해시키는 교수 · 학습 방안을 모색한다.

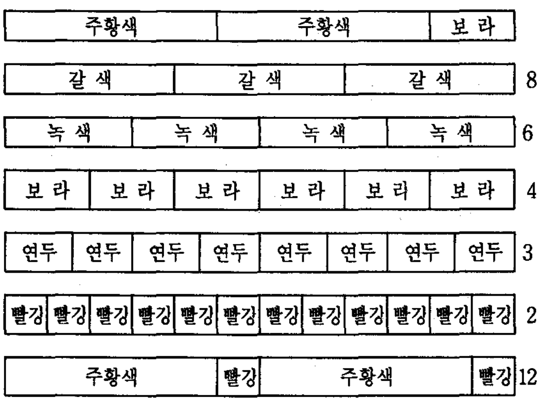
II. 분수의 사칙연산

분수의 사칙연산 중에서 덧셈, 곱셈에 관한 지도방안 중에서 퀴즈네어 막대를 이용한 선행연구를 소개하고 나눗셈 지도방안을 중심으로 논하기로 한다.

1. 퀴즈네어 막대를 활용한 분수 지도 (이영주 외, 1999)

가. 약수 구하기

퀴즈네어 색 막대를 사용하여 24의 약수를 다음과 같이 구한다.



<그림 1> 약수 구하기

나. 최소공배수 구하기

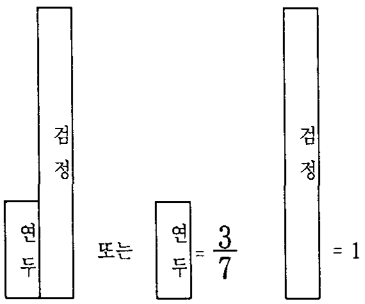
퀴즈네어 색 막대를 사용하여 24의 약수를 다음과 같이 구한다. 방법은 3과 4의 최소공배수 구할 때, 흰 막대를 1로 보고 연두색 막대와 보라색 막대를 각각 나란히 늘어놓아 맞추어 보아 첫 번째로 길이가 같아질 때의 흰 막대의 개수를 샌다.

<table>
<tr><td colspan="3">연두색</td><td colspan="3">연두색</td><td colspan="3">연두색</td><td colspan="3">연두색</td><td>(연두색) = 3 (흰색)</td></tr>
<tr><td colspan="4">보 라</td><td colspan="4">보 라</td><td colspan="4">보 라</td><td>(보라색) = 4 (흰색)</td></tr>
<tr><td>흰</td><td>흰</td><td>흰</td><td>흰</td><td>흰</td><td>흰</td><td>흰</td><td>흰</td><td>흰</td><td>흰</td><td>흰</td><td>흰</td><td>3과 4의 최소공배수:12</td></tr>
</table>

<그림 2> 최소 공배수 구하기

다. 분수 나타내기

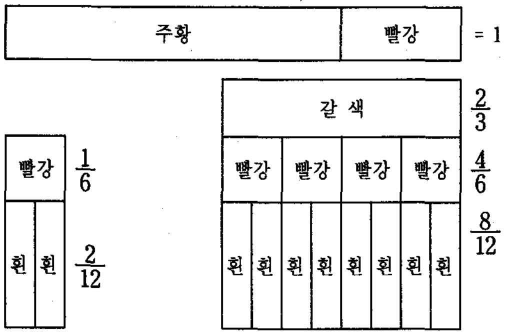
분수를 표현하기 위해서는 먼저 단위가 되는 막대를 정해야 한다. 예를 들어, 보라색 막대가 1이면 빨간 색 막대는 $\frac{2}{4}$가 되며, 연두색 막대는 $\frac{3}{4}$이 된다. 만약에 단위가 되는 막대가 다르다면, 주황색이 1일 때의 $\frac{1}{2}$이 되는 것은 노랑색 막대인데 위의 빨간색 막대와 크기가 다르다. 따라서 단위를 같게 해 주어야 한다. 예를 들어 $\frac{3}{7}$은 다음과 같이 나타낸다.



<그림 3> 분수 나타내기

라. 동치 분수 찾기

동치 분수는 동일한 길이의 막대들을 이어 해당하는 길이와 같을 경우에 찾을 수 있다. 예를 들어 주황색과 빨간 색을 합친 것이 단위라면 다음과 같이 동치분수를 구할 수 있다.



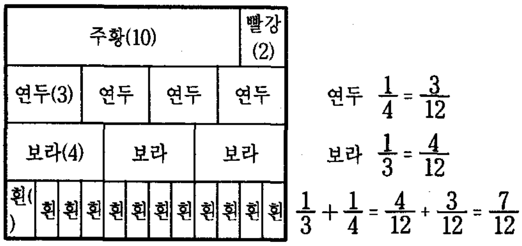
<그림 4> 동치 분수

2. 퀴즈네어 막대를 활용한 분수의 연산 지도 방법(최대욱, 2001)

가. 분수의 덧셈과 뺄셈 지도 방법

퀴즈네어 막대를 활용한 최소공배수를 구하는 활동을 통하여 공통분모를 구한 다음 분수의 덧셈과 뺄셈을 지도한다. 먼저 단위가 되는 기준 막대의 흰색 막대를 공통분모로 하고 각 막대 하나가 차지하는 흰 막대의 수를 분자로 하여 합이나 차를 구한다.

· $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ 의 경우



<그림 5> 분수의 덧셈

다시 말해 (보라=흰색 4개) + (연두=흰색 3개) = 7개의 흰색이므로 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$ 이다.

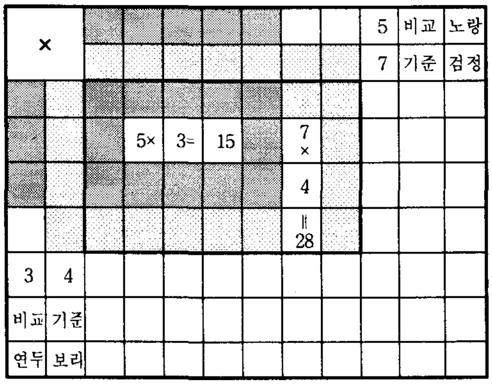
· $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ 의 경우

(보라= 흰색 4개) - (연두= 흰색 3개)= 1개의 흰색이므로 $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{1}{12}$ 임을 퀴즈네어 조작교구의 활동을 통하여 이분모 분수의 뺄셈에 대한 계산 원리를 발견할 수 있다. 분수의 뺄셈은 덧셈의 역연산으로 지도할 수 있다.

나. 분수의 곱셈 지도 방법

퀴즈네어 막대를 이용한 곱셈지도(진분수×진분수)는 직사각형 모델을 이용한다.

먼저 기준막대인 검정색과 보라색의 막대 면적을 흰색, 보라, 검정 등으로 채운 다음 개수를 알아보고, 비교막대인 노란색과 연두색의 면적을 채운 다음 두 수의 곱의 개수를 확인하여 부분(비교) : 전체(기준)의 비의 개념인 분수로 나타내면, $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times5}{4\times7}=\frac{15}{28}$ 과 같은 진분수끼리의 곱셈 계산 방법을 알게 된다.



<그림 6> 분수의 곱셈

3. 분수 나눗셈의 이해와 유추

가. 우리나라에서 분수 나눗셈이 등장하는 5-나 단계의 아동은 구체적 조작기에 해당된다(Piaget, 1970). 그런데 분수의 나눗셈은 형식적 조작으로 지도할 수밖에 없다(Fischbein, 1987). 즉, 분수 나눗셈은 '역수를 곱한다'를 지도해야 한다. 따라서 구체적 조작기인 초등학교에서 형식적 조작 학습내용인 분수 나눗셈을 지도하는 것 자체가 어렵다. 그러나 형식적 조작기인 중학교 이전에 분수의 사칙연산을 완성하기 위해서, 또는 방정식의 해를 구하기 위해서 초등학교 과정에서 분수의 나눗셈도 지도해야 한다. '제수로 나누는 것'을 '제수의 역수를 곱하는 것'으로 바뀌는 과정을 알고리즘으로만 지도하는 것을 지양하고, 나눗셈은 곱셈의 역연산이므로 논리적인 가역적 사고를 통하여 지도해야 한다. 따라서 분수 나눗셈의 개념적 이해의 중간단계로 논리적 유추로 지도하거나 형식불역의 원리의 외삽법(Freudenthal, 1983)을 원용하여 지도해야 한다. 분수의 나눗셈은 등분제, 포함제 그리고 곱셈의 역연산 등의 의미를 가지므로 본 연구에서는 이러한 여러 가지 의미를 주어진 상황에 적절하게 적용한다.

나. 분수 나눗셈의 유추

(분수)÷(분수)의 형태 나눗셈은 음수나 무한의 개념만큼이나 1차 직관이 되기가 어렵다(Fischbein, 1987). 따라서 위계상 하위개념인 (분수)÷(자연수)을 개념적으로 이해한 다음 이것의 유추로 (분수)÷(분수) 지도를 유도하는 것이 바람직하다.

1÷5의 인식론적 지도 방안은 다음과 같다.

'1÷5' 란 등분할 개념으로 보면 단위를 5등분한 것 중의 하나이다. 즉, 1의 $\frac{1}{5}$이다. 그러면 단위를 5등분한 것을 다시 5배하면 얼마인가? 이것은 나눗셈과 곱셈이 역연산이라는 사고, 즉 가역적 사고를 아동에게 주는 것으로 식으로 표현하면 다음과 같다. $\frac{1}{5}\times 5=1$, $1\div 5=1\div\frac{5}{1}=1\times\frac{1}{5}$. 이것은 ÷(분수)는 ×(역수)가 되어가는 유추과정을 보여주는 첫 단계이다. 또한 (분수)÷(자연수)의 인식론적 지도방안은 다음과 같다. '$\frac{2}{3}\div 5$'란 등분할 개념으로 보면 $\frac{2}{3}$를 5등분한 것 중의 하나이다. 즉, $\frac{2}{3}$의 $\frac{1}{5}$이다. 이것을 식으로 표현하면 다음과 같다. $\frac{2}{3}\div 5=\frac{2}{3}\div\frac{5}{1}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}$. 즉, '$\div\frac{5}{1}$'는 '$\times\frac{1}{5}$'과 같다. 다음에는 (자연수)÷(분수)의 지도를 퀴즈네어 막대를 활용하여 지도하고, 이 사실을 유추하여 (분수)÷(분수)를 지도한다.즉, (피젯수)÷(제수)는 의 계산은 (피젯수)×(제수의 역수)인 형식적인 알고리즘을 지도한다.

Ⅲ. 연구의 실제

1. 조작도구의 활용에 관한 비교 분석

분수의 개념과 연산 지도에 활용되는 교구를 몇 가지 측면에서 살펴보면 다음과 같다.

<표 1> 조작도구의 활용에 관한 비교 분석표

구분		분수막대	분수원	퀴즈네어 막대	십진블럭
장점	제작	·제작이 가장 쉽다. ·제작시 다양한 재료를 사용할 수 있다.	·평면적인 도구는 만들기 쉽다.		·기성제품이 많이 보급되었다.
	활용	·직관적, 시각적이다. ·활용 방법이 가장 쉽다.	·분수막대보다 더 직관적, 시각적이다. ·어림하기 쉽다. ·활용방법이 쉽다.	·비의 개념지도에 적합하다 ·수 조작의 자발적 구성을 유도한다.	·자연수 학습이 많이 다루므로 특별한 조작 방법 지도가 필요 없다. ·활용 방법 후속학습인 소수 지도에 직접 연관된다. ·분리량의 등분할에 적합하다.
단점	제작		·투명한 재료로 제작해야 하므로 재료가 한정된다. ·입체로 제작시 어렵다. ·제작방법이 어렵다.	·다양한 색깔로 제작하기 어렵다.	
	활용	·비의 개념지도에 눈금이 방해된다.	·비의 개념지도에 눈금이 방해된다.	·색깔로 인한 고착 가능성 우려가 있다. ·조작활동이 장시간, 많은 노력을 요구한다.	·일반 분수 지도는 어렵다.
활용상 특징		·초급단계의 아동에게 적합하다. ·눈금이 있는 도구에서 점차 없는 도구로 단계적으로 활용하면 효과적이다.	·초급단계에 아동에게 적당하다. ·눈금이 있는 도구에서 점차 없는 도구로 단계적으로 활용하면 효과적이다.	·중급이상의 아동에 적합하다.	·십진분수지도아 소수 지도에 적합하다. ·몫, 비율 분수 개념지도에 적합하다.

2. 조작교구를 활용한 분수의 나눗셈

본 장에서는 Ⅱ장에서 논한 분수 나눗셈의 교수 이론에 적합한 조작교구를 이용한 교수·학습 과정을 논한다.

가. (분수)÷(자연수)의 교수·학습 과정

1) (자연수)÷(자연수)의 계산

5-나 단계의 분수의 나눗셈에서는 (분수)÷(자연수)의 계산을 위해서 먼저 (자연수)÷(자연수)의 계산을 통해 나눗셈을 곱셈으로 나타내보도록 한다. 본 연구자는 아동이 2-나 단계에서 배운 몫이 자연수인 나눗셈 예에서 나눗셈의 의미인 등분제와 포함제를 생각하게 한다. 그런 다음 몫이 분수인 나눗셈을 제시하여 나눗셈을 곱셈으로 나타내보도록 한다.

다음은 수업의 과정을 간단하게 나타낸 것이다.

가) 6÷2의 포함제

연구자 : 사과가 6개 있어요. 이것을 한 접시에 두개씩 담으려면 몇 개의 접시가 필요한가요?

학 생 : 3개요.

연구자 : 왜 그런지 이유를 설명해 보세요.

학 생 : 6÷2는 3이니까요. 사과를 6개를 한 접시에 2개씩 담으면 3 접시가 되니까요. 그림으로 나타내볼께요.

나) 6÷2의 등분제

연구자 : 이번에도 사과가 6개가 있어요. 이것을 2개의 접시에 똑같이 나누어 담으려면 1개의 접시에는 몇 개를 담을까요?

학 생 : 3개요.

연구자 : 왜 그런지 이유를 설명해 보세요.

학 생 : 6÷2는 3이니까요.

연구자 : 그림이나 자료를 이용하여 설명해 볼까요?

학 생 : 

연구자 : 다른 계산 방법도 생각해 보세요.

학 생 : 모르겠어요.

연구자 : 우리가 알아보려는 것이 무엇이지요?

학 생 : 사과가 2개의 접시에 똑같이 담겨져 있는데 한 접시에 담긴 것이 몇 개인지 알아보는 것입니다.

연구자 : 학생이 그린 그림에서와 같이 두 개의 접시 중에서 한 접시에 든 사과의 개수를 생각하는 것입니다. 이를 분수로 나타낼 수 있나요?

학 생 : 6의 $\frac{1}{2}$이니까 3입니다.

연구자 : 이를 식으로 나타내면?

학 생 : $6\times\frac{1}{2}=3$입니다.

연구자 : 그러면 $6\div2$와 $6\times\frac{1}{2}$이 의미하는 것은 같다고 할 수 있을까요?

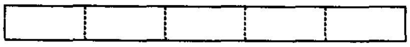
학 생 : 예

다) $1\div5$의 곱셈 표현

연구자 : 1m의 색 테이프를 똑같이 5 도막으로 나누어 꽃 5 송이를 만들려고 합니다. 꽃 한 송이를 만드는 데 쓰이는 색 테이프의 길이는 얼마인지 알아보려고 합니다. 구하려는 것이 무엇인가요?

학 생 : 꽃 한 송이를 만드는데 쓰이는 색 테이프의 길이입니다.

연구자 : 그림으로 나타내볼까요?

학 생 : 

연구자 : 색 테이프 한 도막의 길이는?

학 생 : $\frac{1}{5}$m입니다. 색 테이프 1m를 똑같이 5로 나눈 것 중의 하나이기 때문입니다.

연구자 : 그러면 계산식으로 말해볼까요?

학 생 : $1\div5$입니다.

학 생 : 1의 $\frac{1}{5}$입니다.

연구자 : $1\div5$의 뜻은 $1\times\frac{1}{5}$와 같다고 할 수 있나요?

학 생 : 예

연구자 : $1\div5$는 $1\div\frac{5}{1}$와 같이 쓸 수 있고 다시 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어 $1\times\frac{1}{5}$로 나타낼 수 있어요. 그래서 나눗셈을 곱셈으로 나타낼 수 있지요.

연구자 : $3\div5$를 곱셈으로 나타내어 보세요.

학 생 : $3\times\frac{1}{5}$입니다.

2) (분수)÷(자연수)의 계산

(분수)÷(자연수)의 계산을 지도하기 위해 여러 가지 조작자료를 이용하여 2차 직관에 의한 학

습으로 지도한다.

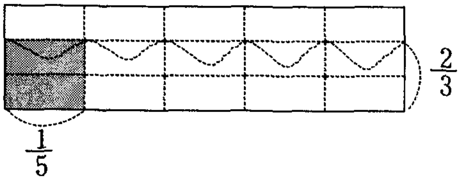
연구자 : 물통에 물이 $\frac{2}{3}$L가 있어요. 이는 5명 물을 똑같이 나누어 가지려면 한 사람이 갖는 양은?

학생 : $\frac{2}{3} \div 5$를 계산해야 합니다

연구자 : 그림으로 나타내어 볼까요?

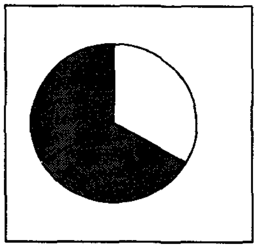
학 생 : 먼저 직사각형을 3등분하여 $\frac{2}{3}$를 표시합니다. 그것을 5로 나눈 것 중의 하나입니다.

연구자 : 맞아요. $\frac{2}{3} \div 5$는 아래 그림과 같습니다.



<그림 7> 직사각형 모델

연구자 : 다음 그림을 보고 $\frac{2}{3} \div 5$의 경우를 예로 들어보세요.



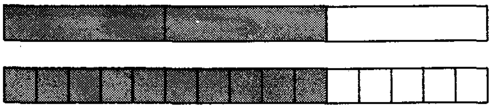
<그림 8> 분수원

학 생 : 피자가 $\frac{2}{3}$조각 있는데 이것을 5명에게 똑같이 나누어 줄 때 1명이 갖는 양은 얼마인지 알아보는 것과 같아요.

연구자 : 위의 $\frac{2}{3}$를 어떻게 5로 나눌 수 있을까요?

학 생 : 일단 각 세 조각을 5씩 나누면 작은 조각은 $\frac{1}{15}$이 되고 그 조각이 2개이니까 $\frac{2}{15}$가 됩니다.

연구자 : 다음 그림도 살펴봅시다. $\frac{2}{3}$를 5로 나누어보세요.



<그림 9> 퀴즈네어 막대

학　생 : $\frac{2}{3}$의 $\frac{1}{5}$과 같습니다.

연구자 : 위의 두 그림에서 $\frac{2}{3}\div5$는 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}$와 같다고 할 수 있습니까?

학　생 : 예

연구자 : 지난 시간과 마찬가지로 나눗셈을 곱셈으로 나타낼 수가 있어요. 즉, $\frac{2}{3}\div5=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}$ 입니다.

3. 유추에 의한 분수의 나눗셈 지도 방법

분수의 나눗셈은, 분수(유리수)의 본질이 비인 점을 감안하면, 비연산자로 지도하는 것이 바람직하다(임재훈 외, 2005)는 논리는 대단히 중요하고 바람직하다. 그러나 분수 나눗셈은 결과가 역수의 곱의 형태로 나타나기 때문에 곱셈의 역연산으로 지도하고자 한다. 먼저 피제수가 제수보다 큰 경우로 시작하여, 포함제로 지도하고 이를 유추하여 모든 분수의 나눗셈은 곱셈의 역연산이 됨을 지도한다.

가. 포함제 맥락에서의 분수의 나눗셈

피제수가 제수보다 큰 분수의 나눗셈은 위에서와 같이 포함제로 지도될 수 있다. 피제수가 제수보다 큰 분수의 나눗셈의 의미를 이해하기 위해서는 우선 '피제수가 1인 나눗셈', 즉 1 ÷(자연수 또는 분수)의 의미를 이해해야한다(임재훈 외, 2005). 예를 들면, $1\div\frac{3}{5}$은 포함제 맥락에서 다음과 같이 결과를 얻는다(Siebert, 2002).

1 안에는 $\frac{3}{5}$이 1번 들어가고 $\frac{2}{5}$가 남는다. $\frac{2}{5}$안에는 $\frac{3}{5}$이 $\frac{2}{3}$번 들어가므로, 1안에는 $\frac{3}{5}$이 총 $\frac{5}{3}$번 들어가는 셈이다. 따라서 $1\div\frac{3}{5}=\frac{5}{3}=1\times\frac{5}{3}$이다. 이로부터 '피제수와 제수의 역수를 곱한다.'라는 알고리즘이 유도된다. 포함제의 의미로, $\frac{5}{3}$는 1 속에 $\frac{3}{5}$가 포함된 횟수이다. 따라서 이는 곱셈의 뜻에 의해서 $\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}=1$이다. 그러나 $2\div\frac{3}{5}$은 1 안에 $\frac{3}{5}$이 $\frac{5}{3}$번 들어있으므로 2안에는 $\frac{5}{3}$가 두 번들어있다, 즉 $\frac{5}{3}\times2$이다. 따라서 $2\div\frac{3}{5}=\frac{5}{3}\times2$ 가 된다. 이 것은 (피제수) ÷

(제수)=(피제수)×(제수의 역수)가 아니라 (피제수)÷(제수)=(제수의 역수)×(피제수)가 되어 교과서에 제시된 표준 알고리즘과 일치하지 않는다(임재훈 외, 2005).

나. 생활에 쓰이는 분수

몇 번이나 몇 배에서 몇은 일반적으로 자연수이다. 그러나 자연수 사이의 양을 나타내는 일상용어도 많이 쓰이고 있다. 예를 들어보자.

1) 반 세기= 1세기의 반 = 1세기의 반 번, 반 바퀴, 반으로 접기 등은 $\frac{1}{2}$을 의미하는 일상용어이다., 사 반 세기는 $\frac{1}{4}$를 나타내고 또한 한바퀴 반, 두 세기 반 등은 대분수를 의미하는 일상용어이다.,

2) ~의 1/3 은 ~의 1/3배 또는 1/3번을 의미한다.

3) 십중 팔구는 $\frac{8}{10}$ 또는 $\frac{9}{10}$을 의미한다.

또한 늘이기는 (1보다 큰 수) 배 또는 (1보다 큰 수) 번으로 이해가되고, 줄이기는(1보다 작은 수) 배 또는 (1보다 작은 수)번와 같이 유추하여 이해할 수 있다. 이를 지도하는 방법으로는 볼록렌즈를 통과한 상은 (1보다 큰 수) 배로 이해하고, 오목렌즈를 통과한 상은 (1보다 작은 수)배로 이해할 수 있다. 또한 지도에 쓰이는 축척을 예로 하여서 축척 1:100은 1/100 으로 줄이기, 즉1/100배로 이해할 수 있다.

다. 분수 나눗셈

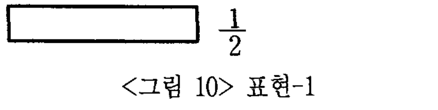
분수 나눗셈을 퀴즈네어 막대의 조작활동을 통하여 분수의 곱셈으로 변환하는 과정을 알아보자. 또한 이를 통하여 얻어지는 결과를 유추하여 일반적인 분수 나눗셈 알고리즘을 도출하여 본다.

1) 활동 I

가) $1 \div \frac{1}{2}$의 곱셈 표현

먼저 기준 막대를 정하고 기준막대의 $\frac{1}{2}$인 막대를 찾는다.

예: 기준막대는 붉은막대, $\frac{1}{2}$인 막대는 흰 막대



<그림 10> 표현-1

$1 \div \frac{1}{2}$는 1속에 $\frac{1}{2}$이 2번 들어있다(1은 $\frac{1}{2}$의 2배이다). 따라서 $1 \div \frac{1}{2}$=2이다.

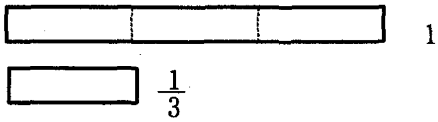
그런데 $1 \times 2 = 2$ 임을 안다. 다시 말하면 $1 \div \frac{1}{2} = 1 \times 2$ 이다.

여기에서 $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ 인 관계가 있음을 확인한다.

나) $1 \div \frac{1}{3}$의 곱셈 표현

먼저 기준 막대를 정하고 기준막대의 $\frac{1}{3}$인 막대를 찾는다.

예: 기준막대는 초록막대, $\frac{1}{3}$인 막대는 빨강막대



<그림 11> 표현-2

$1 \div \frac{1}{3}$는 1속에 $\frac{1}{3}$이 3번 들어있다(1은 $\frac{1}{3}$의 3배이다). 따라서 $1 \div \frac{1}{3} = 3$이다.

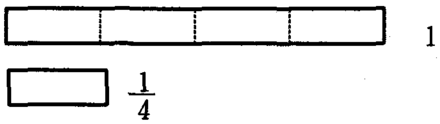
그런데 $1 \times 3 = 3$ 임을 안다. 다시 말하면 $1 \div \frac{1}{3} = 1 \times 3$ 이다.

여기에서 $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ 인 관계가 있음을 확인한다.

다) $1 \div \frac{1}{4}$의 곱셈 표현

먼저 기준 막대를 정하고 기준막대의 $\frac{1}{4}$인 막대를 찾는다.

예: 기준막대는 갈색막대, $\frac{1}{4}$인 막대는 빨강막대



<그림 12> 표현-3

$1 \div \frac{1}{4}$는 1속에 $\frac{1}{4}$이 4번 들어있다(1은 $\frac{1}{4}$의 4배이다). 따라서 $1 \div \frac{1}{4} = 4$이다.

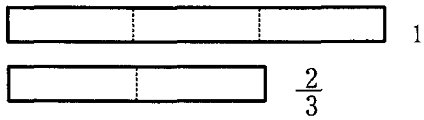
그런데 $1 \times 4 = 4$ 임을 안다. 다시 말하면 $1 \div \frac{1}{4} = 1 \times 4$ 이다.

여기에서 $\frac{1}{4} \times 4 = 1$ 인 관계가 있음을 확인한다.

라) $1 \div \frac{2}{3}$의 곱셈 표현

먼저 기준 막대를 정하고 기준막대의 $\frac{2}{3}$인 막대를 찾는다.

예: 기준막대는 연두색막대, $\frac{2}{3}$인 막대는 빨강막대



<그림 13> 표현-4

$1 \div \frac{2}{3}$는 1속에 $\frac{2}{3}$가 1번 반이 들어있다(1은 $\frac{2}{3}$의 1과 $\frac{1}{2}$배이다). 따라서 $1 \div \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$이다.

그런데 $1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ 임을 안다. 다시 말하면 $1 \div \frac{2}{3} = 1 \times \frac{3}{2}$ 이다.

여기에서 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$ 인 관계가 있음을 확인한다.

마)유추에 의한 활동 I의 논리적 의미

0이 아닌 두 자연수 a, b에 대하여,

$1 \div \frac{a}{b}$는 1 안에 $\frac{a}{b}$가 포함되는 횟수이다(1은 $\frac{a}{b}$의 배이다). 그러므로 $\frac{a}{b} \times$(횟수)는 1이다

그런데 횟수$= \frac{a}{b}$가 됨을 알았다. 따라서 $1 \div \frac{a}{b} = 1 \times \frac{a}{b}$이다. 이 때 $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$이다.

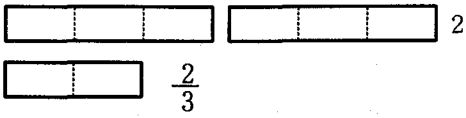
즉, 1÷(0이 아닌 분수)=1×(분수의 역수)이다.

2) 활동 II

가) $2 \div \frac{2}{3}$의 곱셈 표현

기준막대는 연두색막대, $\frac{2}{3}$인 막대는 빨강막대.

연두색막대 두개를 잇는다. 그 안에 빨강 막대가 포함되는 횟수를 센다.



<그림 14> 표현-5

$2 \div \frac{2}{3}$는 2속에 $\frac{2}{3}$가 3번 들어있다. 따라서 $2 \div \frac{2}{3}=3$이다.

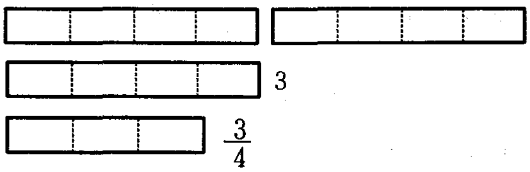
그런데 $2 \times \frac{3}{2}=3$ 임을 안다. 다시 말하면 $2 \div \frac{2}{3}=2 \times \frac{3}{2}$이다.

그 이유는 다음과 같다.

$2 \div \frac{2}{3}=(2 \times 1) \div \frac{2}{3}=2 \times (1 \div \frac{2}{3})=2 \times \frac{3}{2}=3.$

여기에서 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}=1$ 인 관계가 있음을 확인한다. $2 \div \frac{2}{3}=2 \times \frac{3}{2}$이다.

나) $3 \div \frac{3}{4}$의 곱셈 표현



<그림 15>표현-6

$3 \div \frac{3}{4}$는 3속에 $\frac{3}{4}$이 4번 들어있다. 따라서 $3 \div \frac{3}{4}=4$이다.

그런데 $3 \times \frac{4}{3}=4$ 임을 안다.

그 이유는 다음과 같다.

$3 \div \frac{3}{4}=(3 \times 1) \div \frac{3}{4}=3 \times (1 \div \frac{3}{4})=3 \times \frac{4}{3}=3.$

다시 말하면 $3 \div \frac{3}{4}= 3 \times \frac{4}{3}$이다.

여기에서 $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}=1$인 관계가 있음을 확인한다.

다) 유추에 의한 활동 II의 논리적 의미

(1) 활동 I과 마찬가지로

(자연수)÷(0이 아닌 분수)=(자연수) ×(분수의 역수)

또는

(2) (자연수)÷(0이 아닌 분수)=(자연수) ×(1안에 분수가 포함되는 횟수)로 이해한다.

이러한 사실에서 다음과 같이 유추할 수 있다.

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = (\frac{2}{3} \times 1) \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times (1 \div \frac{3}{4}) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

일반적으로

(3) (분수 $_1$)÷(0이 아닌 분수 $_2$)=(분수 $_1$) ×(1안에 분수 $_2$가 포함되는 횟수)로 이해하면 결과적으로 (분수 $_1$)÷(0이 아닌 분수 $_2$)= (분수 $_1$)×(분수 $_2$의 역수)로 된다.

IV. 연구결과의 기대효과 및 활용

본 연구를 통하여 다음과 같은 효과를 얻게 될 것으로 기대한다.

첫째, 분수 개념과 분수의 연산을 통합한 개념 지도가 개발되어 아동의 사고 과정과 학습 활동을 계획하고 실현하는데 과학적인 설계의 기초를 마련한다.

둘째, 본 연구를 통해 조작활동을 통한 분수의 개념과 사칙연산 지도 순서 상의 어려움을 해소하여 분수 지도 순서 연구의 기초를 마련한다.

셋째, 수학과 자연과학에서 중요한 추론직관은 한 두 가지의 사실을 귀납하여 일반적인 사실을 유추하게 되는 능력을 말 한다(Fischbein, 1987). 분수 나눗셈을 일차직관으로 받아들여지는 사실을 토대로 곱셈의 역연산으로 일반화한다는 사실과, 가역적 사고를 신장하는 효과를 얻게 될 것이다. 또한 본 논문에 수록된 지도과정을 그대로 학교수업에 투입하면 교실수업 개선에 도움이 될 것으로 기대한다.

V. 결 론

'곱하면 커지고 나누면 작아진다'을 굳게 믿은 후에 '곱하면 작아지고 나누면 커진다'는 사실을 알게 되면 아동은 실망하게 된다. 이 것이 분수나 소수 연산에 아동이 어려움을 느끼는 이유 중에 하나이다. 선행 직관이 고착되어 후행 직관 형성을 방해하는 것이다(Fischbein, 1987). 이러한 상황을 극복하기 위해서는 기존의 스키마를 재구성하고(Piaget, 1970) 선행지식과 후행지식이 공존한다는 사실을 아동이 받아들이도록 지도하여야 한다. 분수 나눗셈 알고리즘은 포함제, 단위 비율 결정, 비 또는 측정 단위 세분, 곱셈의 역연산, 분수의 곱셈으로부터의 유추 등 다섯 맥락으로 나누어진다(임재훈 외, 2005). 이 중에서, 분수(유리수)의 본질이 비인 점을 감안하면, 비연산자로 지도하는 것이 바람직하다(임재훈 외, 2005)는 논리는 대단히 중요하고 바람직하다. 그러나 분수 나눗셈은 결과가 역수의 곱의 형태로 나타나기 때문에 곱셈의 역연산으로 지도해야 좋을 것으로 본다. (분수)÷(0이 아닌 분수)는 먼저 피제수가 제수보다 큰 경우로 시작하여, 포함제로 지도하고 이를 유추하여 모든 분수의 나눗셈은 곱셈의 역연산이 됨을 지도한다. 이를 위해서는 구체적 조작 연령기에 있는 초등학교 아동은 적절한 조작활동을 통해서 지도되어야 하고 퀴즈네어 막대가 바람직하다(Piaget, 1971). 또한 일상

생활에서 쓰이는 분수를 나타내는 언어를 적절하게 선택하여서 분수 배라는 어휘가 자연스럽게 지도될 수 있다고 본다. 분수 나눗셈 알고리즘을 정확하게 이해하게 된 아동에게는 수학의 세계란 괴로운 대상이 아니고 논리적이고 아름다운 놀이터가 될 것으로 기대한다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학 3-가~6-나, 서울:교육부.

교육부 (1999). 초등학교 교육과정 해설(Ⅰ),(Ⅳ), 서울:교육부.

이영주 외 (1999). 수학교육에서의 퀴즈네어 막대 활용 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <한국수학교육학회 논문집> 3, pp.26-67, 서울: 한국수학교육학회.

임재훈 · 김수미 · 박교식 (2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구 : 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로, 학교수학 7(2), pp.103-122.

전평국 · 박혜경 (2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 15, pp.71-76, 서울: 한국수학교육학회.

최대욱 (2001). 퀴즈네어 막대를 활용한 분수곱셈 학습프로그램 적용 효과에 관한 연구, 석사학위 논문, 광주교육대학교.

Cuisenaire Company of America (1995). *Learning with Cuisenaire Rods,* White Plains, N.Y. : Cuisenaire Company of America, Inc.

Fischbein E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics, An Educational Approach.* D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland.

Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an educational task,* D.Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland.

__________. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* D.Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland.

Gillings Richard J. (1972). *Mathematics in the times of the Pharaohs.* Dover Publications, Inc., New York.

Piaget J. (1970). *Genetic epistemology.* The Norton Library, W.W.Norton&Company.Inc., New York.

_______ (1971). *Science of Education and the Psychology,* Longman Group Limited.

Rosamond, W. T. (1992). *Start with Manipulatives,* White Plains, N.Y. : Cuisenaire Company of America, Inc.

Siebert, I. (2002). Connecting informal thinking and algorithm: The case of division of fractions, In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios and proportions* pp.247-256, Reston, VA: NCTM.

A Study on Operations with Fractions Through Analogy

Kim, Yong Tae
Gwangju National University of Education

Shin, Bong Sook
Siheung Elementary School

Choi, Dae Uk
Elementary School affiliated to Gwangju National University of Education

Lee, Soon Hee
Poongam Elementary School

There are five contexts of division algorithm of fractions such as measurement division, determination of a unit rate, reduction of the quantities in the same measure, division as the inverse of multiplication and analogy with multiplication algorithm of fractions.

The division algorithm, however, should be taught by 'dividing by using reciprocals' via 'measurement division' because dividing a fraction by a fraction results in 'multiplying the dividend by the reciprocal of the divisor'. If a fraction is divided by a large fraction, then we can teach the division algorithm of fractions by analogy with 'dividing by using reciprocals'. To achieve the teaching-learning methods above in elementary school, it is essential for children to use the maniplatives. As Piaget has suggested, Cuisenaire color rods is the most efficient maniplative for teaching fractions. The instruction, therefore, of division algorithm of fractions should be focused on 'dividing by using reciprocals' via 'measurement division' using Cuisenaire color rods through analogy if necessary.

* ZDM classification : F43
* 2000 Mathematics Classification : 97D40
* key word : analogy, division algorithm of fractions