韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 19권 제4호. 2005. 11. 733-767

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19 No 4, Nov. 2005. 733-767

# 탐구 지향 미분방정식의 개발 실제: 교수실험을 통한 접근

권 오 남 (서울대학교)

## Ⅰ. 서 론

### 1.1 대학 교육의 문제점

대학은 설립 이념이나 교육의 목적 및 대상에 있어 초·중등학교와는 구별된다. 초·중등학교가 사회의 일원으로서 기능을 수행하는데 필요한 보편적이고 기초적인 내용을 습득하게 하는 것이 목적이라면, 대학은 이를 바탕으로 학문을 탐구하고 사회의 지도자를 양성하는 것이 목적이다. 그런데 대부분의 교수들은 이러한 대학의 고등교육으로서의 기능에 대하여 사회적 책임감을 가지고 지도하기보다는, 과거의 관습에 따르거나 개인의 경험을 바탕으로 학생들을 가르치고 있으며, 많이 알면 잘 가르칠 수 있다는 논리를 바탕으로 대학교육에 임하고 있는 경향을 보인다. 그러나 교수방법이 교육의 목적을 달성하기 위한 수단이라는 의미로 해석될 때, 이는 대학의 강의활동에 관련되는 지식, 기술, 자질 태도 등이 향상 될 수 있도록 도와주는 대학 수준의 체계적인 모든 활동 및 지원이라고 여겨지며, 지속적인 연구가 필요한 부분이라는 것을 알 수 있다.

그러나 우리나라 대학교육에 있어서 때때로 교수들은 연구 능력은 갖추고 있어도, 교수방법에 대해서는 관심이 없다는 것을 부인하기는 어렵다(배천웅, 이준옥, 최원형, 1996). 교수활동의 주체로서 대학교수의 역할에 대한 인식이 부족하며, 교수 임용의 조건에서만 보더라도 알 수 있듯이 교육경력보다는 연구경력이 더 중요하게 여겨지므로, 잘 가르치는 일은 별다른 관심의 대상이 아니었다. 실제로 황정규(1985)의 연구결과에서도 정보 전달 방법으로 이루어지는 암기 위주의 설명적인 교수방법의 형태가 64.4%로 나타났으며, 우리나라 대학의 교양교육의 실태에 대하여 대학생 213명을 면담하여 교수방법에 대하여 조사한 결과에서도 여전히 암기 위주의 강의 중심의 교수 주도 강의가 42.2%로 가장 높았다(전성연, 1995). 이와 같은 결과를 볼 때 대학의 교육에서 설명 중심의 강의가 가장 많이 사용되는 교수방법임을 알 수 있다.

물론 교수방법을 몇 가지로 유형화하고 어떤 방법이 효과적이거나 혹은 비효과적이라고 단정할 수는 없다. 강의식 강의도 효율적으로 이루어진다면 효과적일 수 있으며, 강의에 의해 강의가 진행된

* 이 연구는 서울대학교 신임교수 연구정착금으로 지원되는 연구비에 의하여 수행되었음.
* ZDM분류 : D45
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 탐구지향, Realistic Mathematics Education, 미분방정식, 대학수학교육, 교수실험

다고 하여도 교수가 구체적으로 어떠한 행동을 하는가에 따라서 강의의 효과는 달라질 수 있다. 그런데 담당교수의 교수방법에 대한 학생들의 반응을 조사한 연구에서 흥미와 관심 유발이 부족하다는 항목이 가장 많게 나타났고, 강의는 체계적인 준비를 바탕으로 필요한 지식과 정보를 전달하는 방법임에도 불구하고 강의 준비가 철저하게 이루어지지 않고 있으며, 더구나 학생들의 이해 수준을 고려하지 않는 일방적이고 획일적인 방법으로 이루어지고 있다는 점을 지적하고 있다는 것은 우리나라 대학의 강의식 강의가 비효과적임을 보여준다고 할 수 있다(배천웅, 이준옥, 최원형, 1996).

그리고 이런 현상은 수학교육에서도 예외라고 할 수 없다. 이성호(1989)의 연구에서 토론과 논술이 주가 되어야 하는 인문과학이나 사회과학 분야는 물론이고, 수학과가 포함된 자연계 전공과목에서 개설된 강좌의 82.6%, 자연계 교양과목에서는 90%가 설명 중심의 강의식 강의이며, 탐구나 토의법으로 지도한 강좌가 0%임을 보여주는 자료가 이를 입증하고 있다. 특히 대학이 설립된 이후 지속적으로 안정된 강좌를 확보하고 있던 수학과는 1980년대부터 다양하게 개발된 교육 환경의 변화를 받아들여 교육 내용과 교육 방법, 교육 과정을 개선하는데 소극적일 수 밖에 없었다고 할 수 있다(김덕선, 양정모, 이상구, 2004).

그러나 최근 대학교육이 초·중등학교 이상으로 대중화되고, 전공도 학부제로 운영됨에 따라서 대학에서의 교육환경과 교과과정 및 교육방법에도 많은 변화가 생기고 있으며, 현대사회에서 필요로 하는 암호론, 금융수학, 보험수학 등과 같은 과목이 수학전공 학생들에게 필요하게 되었으며, 선형대수학, 미분적분학, 이산수학과 같은 수학 과목은 경상계열이나 공학계 학생들에게 필수적인 과목이 되면서 다양한 교육방법에 대한 중요성이 대두되고 있다. 김덕선·양정모·이상구(2004)는 이런 추세에 따라 대학 멀티미디어 콘텐츠를 개발하여 시각적이고 직관적으로 수학적 내용을 이해하고 답함으로 학습할 수 있는 교수방법을 개발하는 등 대학 수학교육의 새로운 모델을 개발하고자 하기도 하였다. 그러나 아직은 내용을 학습자에게 어떻게 전달할 것인가에 초점을 둔 하향지향적 접근으로 보여지며, 본 강의에서는 이러한 점을 보완하여 학습자 중심의 상향지향적 접근으로의 교수방법으로, 하나의 대안을 제시하고자 하였다.

### 1.2. 기존 미분방정식 강좌의 문제점

전통적으로 미분방정식은 교수가 몇몇 특정한 유형의 미분방정식의 해석적 해법을 제시한 뒤 학생은 제시된 동일 유형의 연습문제를 반복적으로 연습하는 방식의 강의를 통해 지도되어 왔다. 미분방정식의 응용에 관련된 문제는 생략되거나 극히 제한적으로 다루어져왔다. 미분방정식에 주요 개념과 관련된 정리는 명제만 제시되고 증명의 난이도로 인해 대체로 생략되는 경우가 많다. 이와 같은 지도방법은 자연현상을 모델링하기 위한 언어로서 발명된 미분방정식의 수학사적 의미를 반영하지 못하고 있으며, 학생들의 문제해결적 사고 발달에 기여하지 못한다는 비판을 받아왔다. 이러한 맥락에서 본 연구는 1980년대 중반 Artigue와 Gautheron에 의해 제창된 미분방정식 교육개혁이 제시하는 교수학적 관점을 비판적으로 공유하면서 대학 수학교실에서 미분방정식을 보다 의미있게 지도할 수

있는 탐구 지향적 수학 교수-학습 모델을 개발하는 것을 목적으로 하는 강의개발 연구의 일환으로 이루어졌다.

# Ⅱ. 미분방정식의 내용과 특성

## 2.1 탐구 지향 미분방정식의 내용

미분방정식(微分方程式 , differential equations)은 미지의 함수와 그 도함수간의 관계를 나타내는 방정식이다. 미분방정식에 대한 연구는 미적분학과 동시에 이루어졌으며, 특히 뉴턴이 외부의 힘과 그 힘을 받는 물체의 운동 간의 관계를 설정한 제 2운동 법칙을 만들면서 시작되었다. 오늘날에는 물리학뿐만 아니라, 화학・생물학・공학・경제학・경영학 등에 이르기까지 여러 분야에 널리 쓰이고 있으므로 미분방정식은 수학, 과학, 공학 등의 여러 분야에서 필수적이며 중요한 역할을 하고 있음을 알 수 있다.

이 교과는 주어진 현상을 미분방정식(변화율방정식)으로 나타내는 방법, 해를 구하는 여러가지 방법, 그리고 구한 해의 해석에 초점을 두고 있다. 특히 미분방정식이 함수의 변화율과 함수와의 관계를 나타내고 있다는 학생들의 이해에 바탕을 두고 변화율방정식이라는 표현을 사용하였다. 미분방정식의 해를 구하는 방법은 그래프적(graphical), 수치적(numerical), 해석적(analytical) 방법을 포함하며, 1, 2차 미분방정식, 선형연립 미분방정식 등을 공부한다.

## 2.2 탐구 지향 미분방정식의 목표

일반적으로 미분방정식의 목표는 다양한 미분방정식들에 대한 다양한 해법을 이용하여 해를 구하는 것이다. 하지만 미분방정식은 역사적 배경에서 볼 때, 자연현상을 설명하기 위해 출현한 것으로, 단지 해법을 익혀서 해를 구하는 것만이 목표가 아니라 그 해를 해석함으로써 여러 자연현상에 적용하는 것이 목표라 할 수 있다. 따라서 다양한 미분방정식 해법을 목표로 학습하는 것은 미분방정식의 일부만을 학습하는 것이다. 이에 본 연구의 교과 목표는 다음과 같이 크게 두 가지로 나타낼 수 있다.

첫째, 학생들이 미분방정식의 기본 개념을 개념적으로 심도 깊게 이해하고 미분방정식을 해석하는 방법을 개발한다. 이 교과에서는 미분방정식의 개념을 반영하면서 학생들이 쉽게 접근할 수 있는 실생활과 관련된 맥락 문제(contextual problem)가 연구팀에 의해 구성되어 학생들에게 제시되었다. 학생들은 이러한 문제를 이해하고 해결하면서 미분방정식의 핵심 개념들을 스스로 발견하고 자연스럽게 받아들일 수 있으며, 이러한 이해를 바탕으로 미분방정식과 그 해를 문제상황과 관련하여 해석할 수 있다.

둘째, 학생 각 개인에게 의미있는 해의 발견을 통하여 수학적 문제해결력을 기르고, 소그룹의 의사소통을 통하여 수학적 사고를 발달시킨다. 이것은 문제해결을 위한 수학적 토의, 자신의 수학적 사고를 설명하기, 다른 학생들의 수학적 사고를 이해하기, 그리고 수학적 정당화의 방법을 개발하기 등을 포함한다. 이러한 과정을 통하여 길러진 문제해결력과 수학적 개념에 대한 심도 깊은 이해를 바탕으로 학생들은 미분방정식의 해를 구하는 것에서 그치지 않고 미분방정식을 다른 학문이나 실생활에 관련시켜 생각할 수 있다.

### 2.3 적용한 교수법

본 미분방정식 강의에 적용한 교수법의 유형은 토의법으로 볼 수 있다. 일반적으로 토의법은 공동학습의 한 형식으로써 학습집단을 일정한 조직으로 고정시키지 않고, 다양한 집단을 구성하여 여러 가지 학습자원을 매개로 토론을 전개하는 사회화된 학습형태이다.

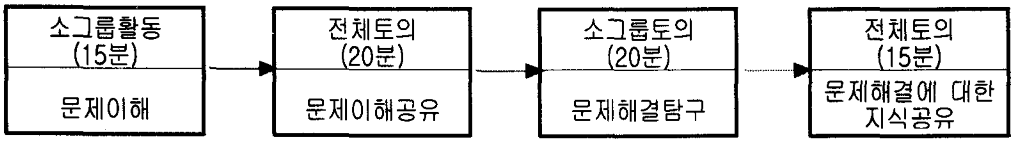
토의학습에서는 학생들의 자유로운 토론을 통한 하나의 통합된 결론을 기대한다. 사실에 대해서 이론적으로 근거있는 내용을 다른 구성원들과 동등한 처지에서 발언하고, 그 내용을 서로 비판, 보충, 검토하여 서로의 의견 대립을 지양함으로써, 통합된 결론을 이끌어 내기 위하여 각자가 문제해결에 협력하려는 자세를 가져야 한다. 따라서 토의학습에서는 구성원 각자가 상호간에 대등한 입장에서 자기 의견을 발표하는 동시에 다른 사람의 의견을 경청할 수 있는 태도를 가지고 있어야 한다(배천웅, 이준옥, 최원형, 1996).

본 강의에서 이러한 형태의 교수방법은 학생들로 하여금 수학적 개념에 대한 사고를 공유하고, 서로 일치하지 않는 부분에 대해서는 질문과 토론 그리고 반박의 과정을 통하여 수학적 개념에 대한 정당화할 수 있도록 도우며, 교수자는 다양한 발문을 통하여 학생들의 사고의 유연성과 독창성을 자극하여 새로운 개념을 학습할 수 있도록 돕는 역할을 한다.

본 강의에서 토의의 자료로 제공된 활동지는 Realistic Mathematics Education(RME)의 주요 원리인 안내된 재발명의 원리에 근간하여 개발된 것이며, 이는 탐구가 가능한 맥락 문제들로 구성되어 있고, 다음은 이러한 형태의 토의학습이 이루어진 구체적인 과정과 개발된 활동지의 주요 원리인 안내된 재발명의 원리를 기술하였다.

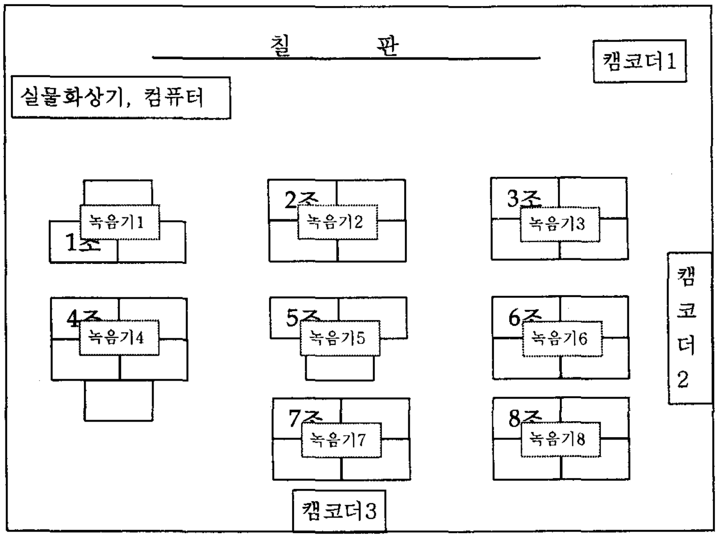
#### 2.3.1 탐구 지향 토의학습

미분방정식의 강의방법은 3-5인의 그룹으로 이루어진 탐구학습과 토의학습으로 이루어진다. 개발된 활동지를 탐구하기 위한 강의 활동은 대체로 다음과 같은 과정으로 도식화할 수 있다. 활동지의 난이도에 따라 다음의 사이클을 한 차시 안에 2-3회까지 반복할 수 있다.




<그림 2.3-1> 미분방정식 교실 활동 과정

먼저 그 날 탐구할 활동지를 배포하면 학생들은 약 15분간에 걸친 소그룹활동을 통해 문제의 의미를 파악한 뒤, 이어 약 20분간 전체토의를 통해 문제의 의미를 공유한다. 문제의 의미가 공유된 후 학생들은 문제해결방법을 탐구하기 위해 다시 대략 20분간 소그룹토의에 들어가며, 소그룹토의 후 약 15분간의 전체토의에서 문제해결에 대한 지식을 공유한다. 학생들이 소그룹활동을 하는 동안 담당교수는 교실을 순회하며 학생들의 소그룹토의를 촉진한다. 전체토의에 대한 아이디어를 도출하고, 이러한 정보 하에 전체토의 과정에서 학생들의 사고를 안내하는 발문을 통해 학생들 스스로 수학적 개념을 재발명할 기회를 제공한다. 다음에 제시한 <그림 2.3-2>는 교실구조와 강의를 기록하기 위한 장비의 배치도이다.




<그림 2.3-2> 강의실 구조

### 2.3.2 교수계열(instructional sequence)의 원리: 안내된 재발명

RME 이론은 네덜란드의 수학교육학자인 Freudenthal의 이론을 지지하는 사람들이 수십 년간 연구해온 수학교육의 한 사조로 '인간 활동으로서의 수학'이라는 관점에 그 뿌리를 두고, 안내된 재발명, 점진적인 수학화, 수준 이론, 교수학적 현상학을 그 기본 원리로 삼고 있다(정영옥, 2000).

본 강의개발연구에 핵심적인 RME 이론의 교수학적 아이디어는 '점진적 수학화'를 통한 '안내된 재발명'이며 이 교수학적 원리는 맥락 문제의 활용과 사회적 상호작용에 기초한 '발생적 모델'을 통해 구현되었다. '수학화'란 비수학적 대상을 수학적인 것으로, 또는 수학적으로 덜 발달된 대상을 보다 현저하게 수학적인 것으로 변환시키는 과정을 의미한다(Freudenthal, 1993). Treffers(1991)는 '점진적 수학화'를 '수평적 수학화'와 '수직적 수학화'로 세분하여 설명하고 있다. 수평적 수학화란 실제적인 문제상황에 내재한 수학적 관계를 추상화하여 유용한 수학적 도구와 연결함으로써 해결가능한 문제로 변환하는 과정이다. 수평적 수학화가 경험적 세계에서 기호적 세계로의 전이라면, 수직적 수학화는 기호적 세계에서 진행되는 수학적 수준의 비약이다. 점진적 수학화는 의미있는 수학적 개념의 구성에 있어 구체적 맥락 속에서의 활동이 중심이 된다. 즉, 의미있는 수학 교수-학습은 학생들에게 경험적으로 그리고 수학적으로 실제적인 맥락 문제의 탐구를 통해 비형식적이고 구체적인 문제해결전략을 구성하는 것에서 출발해야함을 의미한다(Gravemeijer & Doormann, 1999). 따라서 본 탐구지향 미분방정식 강좌에서는 교수에 의해 사전에 고안된 맥락문제를 수록한 활동지가 학생들에게 제공되어 수학적 상호작용의 기반이 되었다. 또한 학생들의 탐구 활동은 단순히 주어진 문제의 답을 찾는 것에 그치지 않고 문제 상황과 해법이 함축하고 있는 수학적 원리를 규명하는 것까지 확장되었다.

또한 RME 교수설계이론의 핵심은 Freudenthal(1991)이 언급했듯이 수학은 "인간의 활동(human activity)"이라는 것이다. RME에서 중요한 것은 학습자가 한 단계의 수준에서 보다 높은 단계의 수준의 새로운 이해를 할 수 있도록 과제 순서를 조직하고 배열하는 것이다. 즉, 적절한 안내된 재발명의 과정을 거쳐 기호, 알고리즘, 그리고 정의를 더 잘 이해하게 되면서 수학화의 과정에 도달하게 하는 것이다(Rasmussen & King, 2000). 따라서 본 교실에서는 교수에 의해 사전에 고안된 맥락 문제를 수록한 활동지가 학생들에게 제공되었고, 수학적 상호작용의 기반이 되었다. 또한 학생들의 탐구활동은 단순히 주어진 문제의 답을 찾는 것에 그치지 않고 문제상황과 해법이 함축하고 있는 수학적 원리를 규명하는 것까지 확장되었다(권오남, 김영신, 2002).

# Ⅲ. 연구방법 및 절차

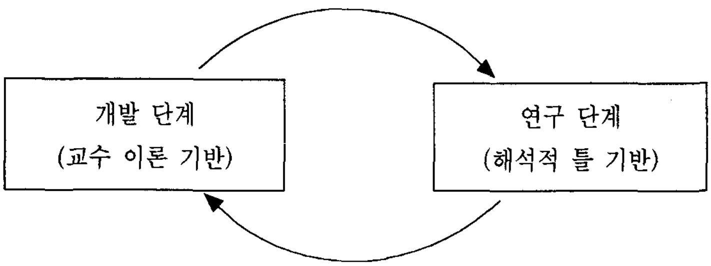
## 3.1 개발연구를 통한 교수실험: 탐구 지향적 미분방정식

미분방정식은 역사적으로 변화하는 현상을 수학적으로 탐구하고 설명하기 위한 언어로 발명되었다. 그러나 전통적인 미분방정식 강의는 수학적 현상의 탐구 능력의 배양보다는 특정 유형의 미분방정식에 대한 대수적 해를 구하는데 필요한 알고리즘의 지도와 반복적인 연습에 중점을 두고 이루어져왔다. 이와 같은 교육적 관행은 수학적 힘과 문제해결력의 배양과 같이 최근의 학교수학개혁이 지향하는 목적을 수행하는데 부적절하다. 이러한 맥락에서, 본 강의개발연구는 미분방정식 교육개혁이

제시하는 교수학적 원리와 RME 이론을 이론적 바탕으로 하여 미분방정식의 의미있는 지도에 기여할 수 있는 강의모델을 개발하는 것에 초점을 두고 있다.

1980년대 시작된 미분방정식교육개혁운동은 미분방정식 지도에서 해석적 방법뿐만 아니라 수치적 방법, 그래프를 활동한 방법, 기하적 방법, 질적 방법 등의 다양한 수학적 방법을 지도하여 미분방정식을 결과로서의 해법이 아닌 해를 구성해가는 과정에서 경험하는 사고를 접하는 것의 중요성을 강조하였다. 이와 같은 지도방법은 궁극적으로 자연현상을 묘사하고 탐구·분석하는 언어로서 미분방정식을 접하는 기회를 제공하여 학습자의 수학적 모델링 능력을 배양하는 것으로 이어진다. 따라서, 미분방정식교육개혁운동에서는 개발된 웹기반 자료의 활용을 강조한다. 실제로 NSF 지원을 받아 개발된 IDEA(Internet Differential Equation Activities)와 같이 미분방정식과 관련된 많은 실제적 상황과 문제상황을 그래프로 시각화하는 것을 도와주는 자바애플릿을 제공하는 웹사이트가 개발되어 있다. 이처럼 미분방정식 교육개혁운동은 전통적인 미분방정식 강의의 개선을 위해 많은 유용한 논의를 제공하였지만 시행과정을 통해 개선되어야 할 몇몇 한계점이 지적되고 있다. 첫째, 기존의 미분방정식 개혁운동은 내용 중심의 변화를 추구해왔다. 학생들의 수학적 힘을 개발하는데 내용중심의 개혁은 불충분하다. 또한 그래프를 활용하는 방법과 수치적 방법을 지도의 초기 단계에 한정하는 것은 학생들의 탐구 활동, 나아가 수학적 아이디어를 재발명하는 과정에 참여할 수 있는 기회를 제한한다. 이와 같은 지도상의 제한점으로 인해, 기존의 미분방정식 개혁운동은 학생들의 개념적 이해와 문제해결력에 있어서 의미있는 변화를 유도하지 못했다는 지적을 받고 있다 (Habre, 2000; Kwon, 2002; Rassmussen, 2001).

본 연구는 RME 원리에 입각한 강의개발연구(developmental research)이다. 개발연구는 교수이론에 기반한 교수개발과 계획단계 및 경험적 방법론에 기반한 연구단계의 순환으로 구성된다 (Gravemeijer, 1994a, 1994b). 그 과정을 그림으로 도식하면 다음의 <그림 3.1-1>과 같다.




<그림 3.1-1> 개발연구 순환 과정

RME 이론을 토대로 한 교수를 설계하기 위해 사고실험과 교수실험이 순환적으로 이행되는 개발연구는 Freudenthal(1991)의 교수개발에 대한 철학을 반영한 것이다. Freudenthal(1973)은 수학을 인

간이 활동을 통해 역사적으로 구성한 지식으로서 수학을 지도하는 바람직한 방법은 완성된 닫힌 지식 체계로서가 아니라, 학생들에게 경험적·수학적으로 의미있는 맥락으로부터의 점진적 수학화를 통해 학습되는 실행 수학을 지도하는 것이라고 주장하는 RME 이론을 제안하였다. 그는 RME 이론을 반영하는 수학교과과정개발에서 "연구-개발-보급"의 세 단계로 이루어진 전통적인 교육과정개발모델은 현실적으로 비효율적임을 지적하면서 연구와 개발이 지속적으로 피드백을 제공하는 유연한 교대과정으로 구성된 개발연구 모델을 제안하였다.

개발 연구는 지도하고자 하는 주요한 미분방정식 개념의 집합을 구성하고 각각의 개념과 관련하여 학생들에게 경험적이고 수학적으로 실재적인 맥락문제를 개발하는 것에서 출발한다. 연구자는 사고실험(thought experiment)을 통해 미분방정식 개념과 관련하여 학생들에게 경험적으로 그리고 수학적으로 실제적인 맥락은 무엇인지 예상·선정하여 이들 맥락 속에 내재된 수학적 원칙을 점진적으로 수학화해갈 수 있는 일련의 활동과 질문을 구성한다. 이들 활동과 질문은 일련의 활동지로 만들어져 강의 시간에 학생들에게 제시되어 학급 내에서 수학적 상호작용의 토대를 형성한다. 이처럼 의도하는 교수-학습 활동이 교실에서 어떻게 진행되고 어떤 결과를 낳을 것인지에 대한 교사의 예상은 실제적인 교실 상황에서 진행되는 교사 실험 과정에서 수집된 자료를 통해 다시 검증된다. 즉, 학생들이 실제로 가진 수학적 경험, 수학학습 결과 등은 연구자가 예상하고 의도한 것과 일치하는가? 만일 일치하지 않는다면 그 이유는 무엇이고 현재 개발된 교과과정은 어떻게 수정되어야 하는가? 개발연구는 교수실험을 통해 수집된 자료의 분석과 분석결과를 통한 반성에 기초하여 보다 이론과 실재에 부합하는 수학교과과정, 나아가 수학교육이론의 개발로 이어지는 순환적 모델을 따른다 (Gravemeijer, 1994b). 개발연구에서 교수실험 과정은 교사와 학생 사이의 상호작용을 통해 경험적으로 실제적인 맥락문제를 탐구하는 것으로 이루어진다. 따라서, 학생의 자율권이 유지되면서 학생의 비형식적인 해결이 더 정교한 수학적 해결로 정당화된다. Cobb(2000)에 의하면 수학학습과 수학에 대한 유사한 본질에 기초를 둔다는 점에서 발생관점(emergent perspective) 과 RME 이론은 양립 가능하다. 즉, 교수실험(teaching experiment)과 개발연구는 모두 수학이 인간의 창조적 활동이고 수학학습은 문제를 해결하고 상황에 대처하는 효율적인 방법을 개발하며 수학적 실체를 낳는 중에 수학적 발달이 이루어진다는 것을 전제로 하고 있다.

교수실험을 분석한 결과 연구자는 학생들이 스스로 재발명하는 과정과 교사가 학습을 안내하는 과정을 중재한 접근을 취하게 된다. 결국 교수실험을 통한 개발연구는 이론적 분석을 수행하고, 이 분석결과에 기초한 교수를 수행하고, 질적·양적 데이터로부터 교수효과를 평가하고, 이론적 관점을 수정해 나가는 교육연구방법이다. 따라서, 사고, 학습, 교수를 이해하는 이론적 관점을 가지게 할 뿐만이 아니라 인지의 측면과 다양한 교육형태의 결과를 서술할 수 있게 해주는 교육적 의의를 가진다 (Schoenfeld, 2000).

탐구 지향 미분방정식 교실에서 발생적 모델은 사회적 상호작용에 기초한다. 본 프로젝트 교실에서는 분석적 방법을 포함한 다양한 수학적 방법의 적용을 통해 학생들의 미분 방정식에 대한 개념적

이해를 지향하는 강의로 구성되었다. 또한, 지도하고자 하는 미분 방정식 개념을 반영하는 맥락 문제가 구성되어 학생들에게 제시되고, 학생들은 소집단 토론과 전체집단 토론을 통해 문제해결을 위한 탐구를 통해 문제를 해결하였다. 본 강의에서 교수는 학생들 자신의 수학적 활동과 토의를 통해 지도하고자 하는 수학적 아이디어가 재발견될 수 있도록 배려하는 역할을 담당했다. 학생들이 소집단 토론을 하는 동안 학생들 사이를 오가며 그들의 수학적 토의가 발전적일 수 있도록 돕고, 소집단 토의에 이어지는 전체 토론에서는 학생들이 소집단 토론 결과 형성된 수학적 의미를 공유하는 과정에 참여하는 것을 촉진하는 역할을 했다. 이러한 사회적 상호작용은 문제상황과 해법에 함축되어 있는 수학적 의미를 탐구하고 수학적 토의를 통해 학생 개개인의 수학적 의미의 조정하고 공유된 수학적 의미가 점진적으로 발생·확립되어가는 것을 목표로 하였다.

### 3.2 자료 수집

본 연구는 2003년 서울대학교 수학교육과 2학년 2학기 전공 선택으로 개설된 미분방정식 개론 강좌을 통해 이루어 졌으며, 모든 강의는 캠코더 3대와 각 조별 오디오 레코더로 기록하였다. 미분방정식 강좌는 수학교육과 학부 2학년생을 위해 개설된 과목이지만 타 학년 및 타 학과 학생도 수강이 가능한 과목이었다. 참여한 학생은 수학교육과 23명, 생물교육과 4명, 윤리교육과1명, 화학교육과 1명, 화학과 1명으로 총 30명이었다.

협동학습을 위해 자리배치를 3-5명의 학생들을 한 그룹으로 함께 앉도록 했으며, 각 조의 구성원은 학기 초에 자율적으로 서너 명씩 짝짓도록 한 후 한 학기동안 유지했다. 각 조에는 조장을 두지 않고 자유롭고 주체적으로 토의에 참여할 수 있도록 했다.

교수그룹은 강의 담당교수 1명(연구책임자), 대학원생 전담조교 1명, 타 대학 교수 2[1)]명과 대학원생2명으로 이루어졌다. 소그룹토의가 진행되는 동안 강의 교수는 각 소그룹을 순회하면서 학생들의 의견을 청취하거나 때에 따라서 토의의 방향을 안내하기도 하였다. 소그룹토의가 충분히 진행되면 강의교수가 소그룹을 순회하면서 얻은 정보를 바탕으로 전체토의를 안내한다. 전체토의에서 한 학생이 자신의 소그룹에서 토의한 내용을 발표하면 학생들을 그 발표를 듣고 자유롭게 보충 설명 및 추가 질문을 하면서 개념들을 이해하고 공유했다. 매차시 강의 관찰 후 필드 노트가 작성되었고 강의에 대한 반성과 토의가 이루어졌다. 강의는 크게 전체토론과 소집단토론부분으로 나뉘는데 전체토론상황에서 녹화는 학급전체를 대상으로 하며 소집단토론 상황에서 각각의 캠코더는 특정 소집단의 상호작용에 초점을 두었다. 소집단 녹화 자료는 사례연구에 유용한 자료를 제공한다. 모든 강의 녹화는 담화 분석을 위해 전사되었다. 참고로 2004학년도 2학기 미분방정식 개론 강좌의 동영상 자료는 서울대학교 교수학습센터에서 CD로 제작하여 발행하였다[2)].

본 강좌의 교재로는 Blanchard, Devaney 와 Hall (2002)이 저술한 Differential Equations(2판)이 채택되었지만 학생들은 매 차시 활동지 위주의 학습을 하였기 때문에 실질적으로 강의실에서 사용한

교재는 없었다. 강의를 위해 개발한 활동지 및 자료는 한 학기(16주)용 대학 미분방정식 내용으로 일계 미분방정식과 연립 미분방정식으로 구성되어 있으며 일련의 흐름을 가질 수 있도록 하였다. 새로운 주제를 제시할 때에는 경험적으로 실제적인(experientially realistic) 맥락 문제로 시작하였다.

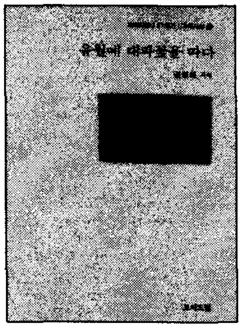
# Ⅳ. 탐구 지향 미분방정식의 실제

## 4.1 교수-학습자원

**활동지(Worksheet)**

본 강의는 소그룹토의와 전체토의가 매우 중요한 역할을 한다. 따라서 강의시간에 적극적이고 능동적인 태도(발표, 질문, 토의 등)로 임하는 것이 중요하다. 이를 위해 활동지를 개발해 사용하였으며, 교재를 참고자료로만 사용되었다. 활동지는 토의를 통해 개념을 발견하고 문제해결력을 기른다는 목표에 맞도록 매시간 제작되었으며, 제작시에는 교수그룹이 모두 참여하여 학생들의 사고과정을 예측하여 각 문항을 세부적으로 조정하였다. 활동지에는 물고기의 수, 커피의 온도에 관한 문제 등과 같은 실생활 문제 뿐만 아니라 용수철의 진동과 같은 물리적인 문제도 포함되었다. 다만 매차시 새로운 상황이 제시되는 것이 아니라 지난 차시 혹은 지난 주제와 동떨어지지 않도록 흐름을 유지했다. 또한 각 활동지는 한 문항으로 이루어진 것이 아니라 안내된 재발명의 원리에 따라 학생들의 사고를 점진적으로 유도할 수 있도록 단계별로 여러 문제로 이루어졌다. 다음 활동지는 1차시에 주어진 미분방정식의 해를 구하는 방법을 가르치기 보다는 학생들이 변화율의 질적 의미에 대해 생각할 기회를 주기 위한 활동지이다.

| 01. 먹이사슬 | 학번 | |
|---|---|---|
| | 이름 | |



권영해 「유월에 대파꽃을 따다」

즐거운 먹이 사슬

흰수염고래는 한입에
수십만 마리의 크릴새우를 먹어치운다
수많은 새우가 한 마리의 고래를 즐겁게 한다

아프리카 사바나에는
한 마리의 얼룩말을 두고
표범과 재칼과 대머리독수리들이 달라붙어
식사를 즐긴다
말 한 마리가 여러 입을 살린다

주위를 둘러보면
세상은 하나의 정글
우리는 누군가의 적이며
모두의 친구이다

http://poemalbatross.com.ne.kr/jeulgeon%20meogi.htm

※ 재원이는 고등학교 때 담임선생님이셨던 권영해선생님의 홈페이지에서 선생님이 지으신 위의 시를 읽고, 다음과 같은 두 연립변화율방정식(system of rate of change equations)을 생각하였다.

<u>연립변화율방정식 A</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x\left(1-\dfrac{x}{10}\right) - 20xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -5y + \dfrac{xy}{20} \end{cases}$$

<u>연립변화율방정식 B</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0.3x - \dfrac{xy}{100} \\ \dfrac{dy}{dt} = 15y\left(1-\dfrac{y}{17}\right) + 25xy \end{cases}$$

위의 식에서 $x$와 $y$는 각각 시간 $t$에 대한 먹이사슬의 두 종(포식자와 피식자)의 수를 의미한다. A, B의 두 연립변화율방정식 중 하나는 흰수염고래와 크릴새우의 관계에서와 같이 포식자가 피식자 보다 큰 동물인 경우이고, 다른 하나는 대머리독수리와 얼룩말의 관계에서와 같이 피식자가 포식자 보다 큰 동물인 경우를 나타낸다. 이 때, 여러 마리의 포식자가 한 마리의 피식자를 먹는 경우에는 한 마리의 피식자가 포식자 수를 증가시키는데 막대한 영향을 미칠 수 있는 것이다. 각각의 상황을 나타내는 연립변화율방정식이 무엇인지 생각해 보고, 그 이유를 다양한 방법으로 설명해 보자.

<그림 4.1-1> 활동지의 예

**쪽지(Reflection Journal)**

쪽지는 그 날 학습한 내용의 중요한 개념, 발표나 토의를 통하여 알게 된 것, 질문사항 등을 정리하여 제출하도록 한 것이다. 쪽지는 학생들에게는 그 날의 강의에 대한 복습 및 반성의 시간을 제공하고, 교수그룹에게는 학생들의 강의에의 이해도를 측정할 수 있는 수단이 되었다. 다음 그림은 학생들에게 배부된 쪽지의 윗부분이다. 아래쪽은 여백으로 남겨두어 학생들이 직접 작성토록 했다.

| Reflective Journal<br>2003년 월 일 ( 요일) | 학과 | |
|---|---|---|
| | 학번 | |
| | 이름 | |

★ 오늘 학습한 내용 중에서 중요하다고 생각되는 개념은 무엇인가요?
★ 오늘 강의시간에 이루어진 발표나 토의를 통하여 알게 된 것은 무엇인가요?
★ 오늘 학습한 내용 중에서 질문이 있나요?
☆ 가급적 볼펜을 사용하며, 연필을 사용할 때에는 진하게 쓰도록 합니다.

<그림 4.1-2> 쪽지의 예

**E-Journal**

E-Journal의 목적은 수학적 사고에 대한 깊은 이해와 수학을 알고 행하는 것의 의미가 결여된 학생들에게 좀 더 생각할 수 있는 기회를 주기 위한 것으로 불규칙적으로 한 학기동안 5번 요구되었다. 학생들에게 제시된 주제는 다음과 같다.

<표 4.1-1> 학생들에게 제시된 E-Journal 문제

| 횟수 | 문제 |
|---|---|
| 1 | In class, three different meanings of $\frac{dx}{dt}$ were suggested:<br>1. The rate of change of a quantity $x$.<br>2. The growth of a quantity $x$.<br>3. How $x$ changes with time.<br>In your opinion, are these the same thing? Are they different? Why? |
| 2 | Explain what the phrase "mathematical model" means to you, what previous experiences you have had with mathematical models, and how the mathematical use of the word model is similar to and/or different from the everyday use of the word model (e.g. fashion model, model airplane, model student, etc.) |
| 3 | When you solve an equation like $x^2-3=1$, you come up with two numbers $x=2$ and $x=-2$. What does it mean to solve a rate of change equation? |
| 4 | Suppose we had two differential equations, $\frac{dy}{dt}=ty^4$ and $\frac{dy}{dt}=t^4y^4$. If we compared the solutions to the two equations with the same positive initial condition ($y(0)=k>0$), which solution would grow faster? Why? |
| 5 | Come up with a salty tank scenario that matches the differential equation, $\frac{dS}{dt}=3-\frac{S}{30}$. |

E-Journal의 주제는 수학 문제가 아니라 강의시간에서 나타난 중요한 아이디어에 대한 학생들의 아이디어를 쓰는 것으로 자신의 생각을 논리적으로 서술하도록 하였다. E-Journal은 홈페이지의 E-Journal 게시판에 글을 올리도록 하여 자신의 생각을 다른 학생에게 알리고 자신도 다른 학생들의 생각을 알 수 있도록 하여 이해의 깊이를 더할 수 있도록 하였다.

E-journal

NAME [ 박주한 ] - 2003. 09. 15. PM 9:48

ⓡ 화학교육과 2002-13681 박주한 read [ 12 ]

In class, three different meanings of dx/dt were suggested:
1. The rate of change of a quantity x.
2. The growth of a quantity x.
3. How x changes with time.

In your opinion, are these the same thing? Are they different? Why?
--------------------------------------------------

각 문항을 해석해보면
1. x 양이 변하는 비율
2. x 양의 증가
3. 시간에 따라 x가 어떻게 변하는가

dx/dt는 시간(t)를 변수로 갖는 x라는 함수가 어떤 시간 t의 근방에서 얼마나 변하는지를 의미합니다. x의 함수 값을 그래프로 나타낼 경우 dx/xt는 (t, x(t))에서의 순간 기울기로 표현 될 수 있겠죠.
결국, dx/dt값을 알면 그때의 t값에서의 함수x의 변화율(그래프 상에 표현하면 순간 기울기)를 알 수 있습니다. dx/dt값이 '+'이면 x함수의 증가를, '-'이면 x함수의 감소를 의미합니다.
t가 들어가 있으므로 시간에 관한 함수임을 알 수 있고, 위에서 말한 내용이 3번에 잘 포함되어있으므로 3번이 적절한 설명이라고 생각합니다.

To e-mail... view printer...

218.232.6.244 - Mozilla/4.0 (compatible; MSIE 5.5; Windows 98; MSIE5.5/BRT)

답장 목록

<그림 4.1-3> E-journal의 예

**포트폴리오(Course Portfolio)**

포트폴리오는 학습내용에 대한 이해 과정을 기록하는 것이며, 중간시험과 기말시험 시 2회 제출하도록 하였다. 포트폴리오의 내용은 쪽지, 활동지 학습 내용, 숙제, E-Journal 등의 모든 것을 대상으로 하되, 학생 자신에게 의미 있는 내용을 선택하고 용어해설과 개념망을 반드시 포함하도록 하였다. 용어해설은 미분방정식(변화율방정식)의 중요한 용어로 생각되는 단어나 구절을 선택하여 그에 대한 짧은 설명을 자신의 말로 풀어서 정리하면 된다. 포트폴리오를 통해 강의내용을 자신이 재구성하여 체계적으로 정리함으로써 자신의 지식이 되도록 하고 중간고사와 기말고사 대비에 도움을 주도록 하였다.

<그림 4.1-4> 포트폴리오의 예

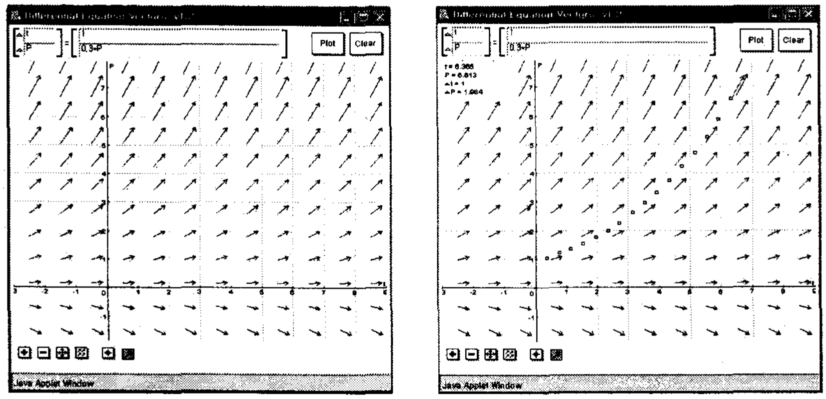
**팀프로젝트(team project)**

프로젝트는 학습내용에 대한 전반적인 성취도를 평가하기 위한 것으로 기말에 제출하도록 하였다. 프로젝트의 주제는 미분방정식의 응용(실생활에서의 문제 등)과 관련 있도록 팀구성원들이 협의하여 선정하고, 팀구성원은 2~4명으로 자유롭게 구성하도록 했다. 다만 학생들이 동등한 수준으로 프로젝트에 참가하도록 하기 위하여 프로젝트 보고서의 처음에 각 구성원이 한 일을 반드시 기록하고, 학습내용을 직접 적용한 해 본 후의 학생들의 생각을 알기위해 마지막엔 각자의 후기를 포함하여야 하도록 하였다. 학생들이 제출한 프로젝트는 응용수학을 비롯해서 물리문제, 날씨문제, 의료문제 등 다양한 문제를 포함했다.

## 4.2 강의보조매체

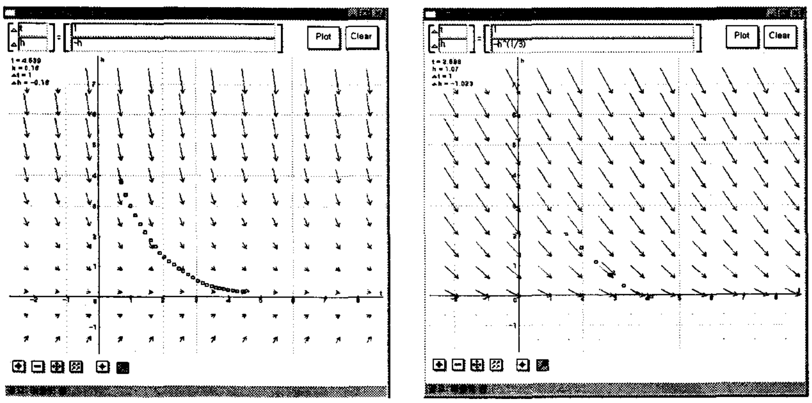
### 자바 애플릿(java applet)

미분방정식의 개념을 학습하기 위해 크게 3차시 가량을 컴퓨터실에서 강의를 하였고 주요 내용은 다음과 같다. 자바 애플릿을 사용하여 주어진 미분방정식의 기울기장(slope field)을 그려, 해의 그래프 개형을 알 수 있을 뿐만 아니라 $\Delta t$와 $\Delta p$로 단계적으로 기울기장을 이어봄으로써 오일러 방법을 재발명할 수 있는 점진적 활동을 하였다.



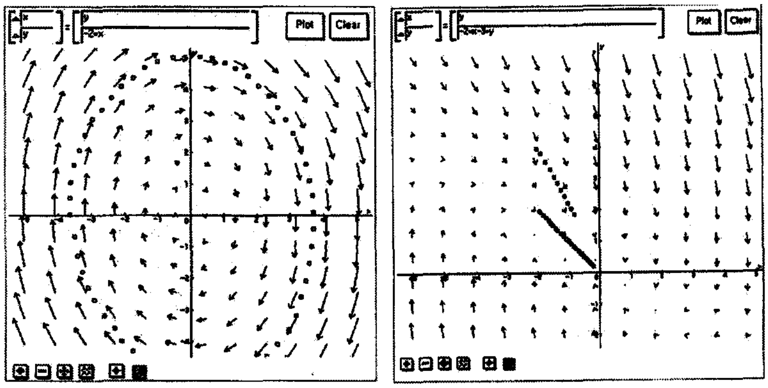

<그림 4.2-1> 자바 애플릿 화면

다음 차시에는 자바 애플릿을 통하여 하강하는 비행기 높이를 예측하기 위한 해를 탐구하는 시간을 가졌다. 이는 미분방정식의 중요한 정리 중 하나인 유일성정리를 학생들 스스로 발견하게 하기 위한 도구이자 정리에 대한 이해를 돕기 위한 매체로 활용되었다.



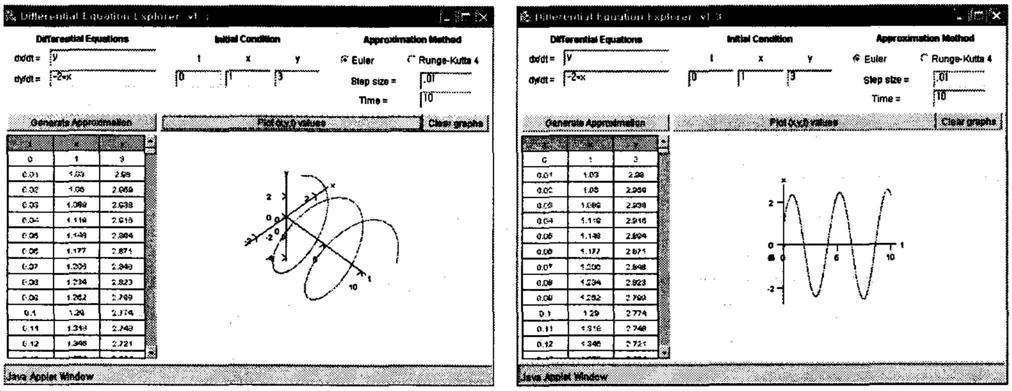

<그림 4.2-2> 유일성정리에 대한 자바 애플릿 화면

마지막 차시에는 자바 애플릿을 통해 선형연립미분방정식의 위상도의 관찰하고 위상평면에서의 직선해의 발견과 직선해의 기울기에 대한 대수적인 해법에 대해 논의하였다.



<그림 4.2-3> 직선해 발견을 위한 자바 애플릿 화면

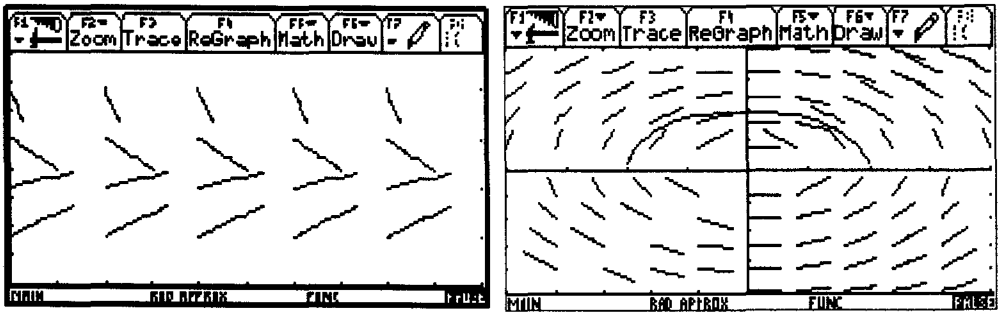
또 다른 자바 애플릿을 제공하여 3차원 그래프를 그려보고 마우스를 사용해서 그래프를 돌리면서 2차원 그래프와의 관계를 함께 관찰할 수 있도록 하였다.



<그림 4.2-4> 3차원 그래프를 그린 자바 애플릿 화면

**그래픽 계산기**

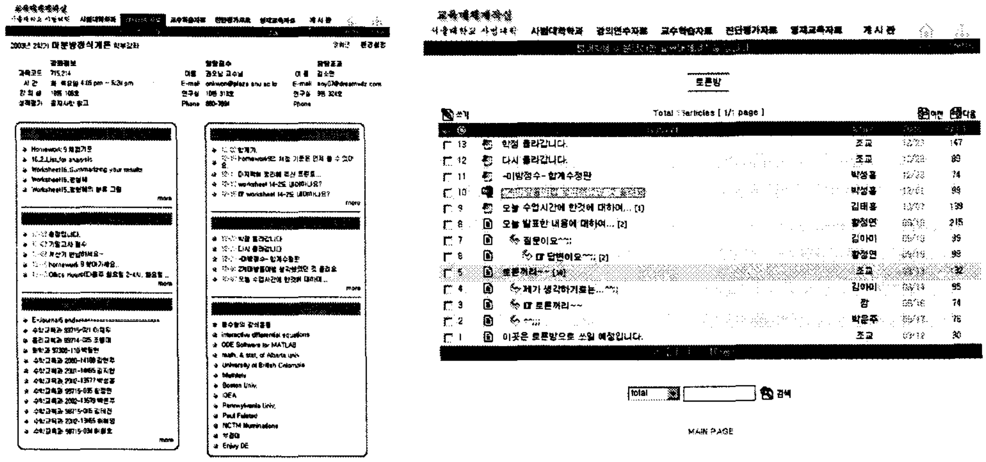
교실 환경이 컴퓨터실을 항상 사용할 수 있지 않았기 때문에 학생들이 언제든지 기울기장을 관찰할 수 있도록 그래픽 계산기를 이용하기도 했다. 그래픽 계산기는 컴퓨터를 이용할 수 있는 환경에서 뿐만 아니라 학생들이 모여서 토론할 수 있는 곳에서는 언제든지 활용할 수 있도록 모든 학생에게 한 학기동안 나누어 주었다.




<그림 4.2-5> 그래픽 계산기의 활용의 예

**게시판의 활용**

미분방정식은 강의 외에 의사소통 수단으로 인터넷 게시판을 활용하였다. 인터넷 게시판에는 공지사항을 포함하여, 복습과 강의 외 토의를 위한 활동지 게시, 과제물 제출, 학생들의 의사소통을 위한 자유게시판과 토론방, 그리고 동기유발 및 학습보조를 위한 관련 사이트를 포함하였다. 인터넷 게시판은 학생들과 교수그룹 사이의 끊임없는 의사소통의 장이 되었으며, 적극적인 학습 참여를 위한 발판이 되었다.



<그림 4.2-6> 인터넷 게시판 활용의 예

## 4.3 평가방법

본 연구에서는 학생들의 활동이 중심이 되므로 평가도 학생들의 모든 활동과 위에서 언급한 모든 교수-학습자원들을 포함할 수 있도록 구성했다. 이 강의는 소그룹토의와 전체토의가 매우 중요한 역할을 하기 때문에 출석 및 강의참여도가 10% 포함되었다. 그리고 포트폴리오와 팀프로젝트가 각각

10%, 쪽지와 E-Journal이 각각 5% 포함되었고, 활동지는 강의참여도에 포함하여 평가하였다.

또한 연습문제의 일부와 교수그룹이 개발한 문제를 숙제로 제시하였으며 평가역역의 10%를 포함시켰다. 연습문제는 본인 스스로 해결함을 원칙으로 하되, 제출 전 토의는 가능하도록 하였다. 연습문제의 채점은 답 보다는 과정에 중점을 두었고, 다른 사람의 해를 보고 베끼면 감점을 하고, 시간을 특히 엄수하도록 하여 공정성을 기하였다.

시험은 중간시험과 기말시험 2번을 실시하였으며(각 25%), 문제는 강의시간에 다룬 범위 내에서 서술형 문제로 제시하였다. 특히 미분방정식에 대한 개념적 이해 정도를 측정하기 위한 개념적 문제(conceptual problem)와 학생들이 미분방정식의 정확한 해를 구하는 대수적인 전략을 사용하여 주어진 미분방정식을 푸는 능력을 평가하기 위한 절차적 문제(routine problem)개발하여 문제에 포함하였다.

마지막으로 평가점수에 포함되지는 않았지만 학생들의 이해도와 수학에 대한 생각을 파악하기 위한 인터뷰와 학생들의 정의적 영역의 변화를 측정하기 위하여 Carlson(1997)이 제작한 설문지 VAMS(Views About Mathematics Survey)를 수정 보안하여 시행하였다.

## V. 탐구 지향 미분방정식의 효과: 상호작용과 능동적 참여

탐구 지향 미분방정식의 효과를 정량적으로 정성적으로 분석하였다. 정량적 분석의 주요 결과는 탐구 지향 미분방정식의 학생들이 강의식 미분방정식 학생들보다 개념적 평가도구에서 통계적으로 유의한 차이가 있었으며, 절차적 평가도구에서는 탐구 지향 미분방정식 교수 설계의 주안점이 아니었음에도 불구하고, 탐구 지향 미분방정식 학생들과 강의식 미분방정식 학생들의 성취도에서 통계적으로 유의한 차이가 보이지 않았다. 자세한 논의는 권오남, 주미경(2005)에서 찾아볼 수 있다. 또한 미분방정식 강의를 수강하고 일년 후 두 집단의 학생들을 비교해 본 결과 탐구 지향 미분방정식 수강 학생들의 유지(retention) 효과가 통계적으로 유의하게 있었다. Kwon 등(2005)에서 유지 효과에 관한 논의가 되어 있다. 본 절에서는 탐구 지향 미분방정식의 정성적인 분석만을 제시한다.

본 미분방정식 강좌의 효과는 크게 상호작용과 능동적 참여로 구분될 수 있다. 본 강좌는 활동지, 쪽지, 자바 애플릿 등의 교수학습자원을 활용함으로써 강의 구성요소 간의 활발한 상호작용과 학생들의 능동적 참여가 이루어졌다.

### 5.1 상호작용

Bruner, Vygotsky를 비롯한 상황학습이론가들은 인간의 고등정신이 사회적 상호작용을 통하여 발달한다고 강조하였듯이, 상호작용은 교실에서의 사회적 협상의 과정이 될 수 있다(양용칠, 2002). 미분방정식 교실 내에서 일어나는 상호작용은 강의구성원인 교수, 학생, 교수-학습자원(instructional resource)의 세 구성요소가 주축이 되었다. 세 구성요소 간의 상호작용을 살펴보면 다음과 같다.

### 5.1.1 교수와 학생간의 상호작용

미분방정식 강의에서 교수와 학생간의 상호작용은 전체토의, 소그룹토의, 쪽지 등에서 찾아볼 수 있다. 교수와 학생간의 상호작용은 교수의 역할에 따라 조력자와 토의의 구성원으로 구분할 수 있다.

첫째, 강의상황에 있어 교수는 학생들의 사고가 향상될 수 있도록 이끄는 조력자의 역할을 하였다. 교수의 발문이 학생들의 문제해결을 위한 발판(scaffolding)이 되었으며, 소그룹토의에서 문제해결에 진척이 없는 경우 교수의 도움을 받아 토의가 진행되었음을 볼 수 있다. 다음의 예에서 볼 수 있듯이, 학생들은 소그룹토의에 참여한 교수의 발문을 통해 문제에 대한 인식을 새롭게 하고 있으며, 교수는 적분에서 미분, 미분에서 편미분으로 해결방법을 이끌어주고 있다. 그리고 테크놀로지의 확대(zoom out)기능이 수학적으로 어떻게 연결될 수 있는지 교수가 질문을 함으로써 도와주고 있다. 한 학생의 쪽지 내용을 보면 그 학생은 교수의 발문을 힌트로 삼아 변화율방정식에서 계수의 역할을 깨닫게 되었다.

K교수: 했던 거, 어떤 거요? 했다고 다 기억을 하는 건 아니잖아요?
우: 그러니까 개체가 없다고 가정한다면
K교수: 아, 개체가 없다고 가정할 때
우: 다른 개체의 변화율이 어떻게 되는지
K교수: ...(중략)... 그 개체가 없다고 가정하면, 두 개체가 한 개체의 문제로 되는 거잖아요? ...(중략)...그 것 밖에 없나요? 한 개체가 없다고 가정할 때 그거 밖에 없나요?...(중략)...
미: 편미분...
K교수: 적분을 할 수 있나요?
우: 아니 미분이요, 편미분
K교수: 편미분을 해서 할 수 있을 것 같아요?
우: y에 대해서 미분하면 2y.

소그룹토의(13차시-Group2) 중에서

중요하다고 생각되는 개념: 한조가 발표를 끝내고 교수님께서 "계수는 생각해보셨나요?"라는 힌트를 주셨는데 그 "계수"가 가장 중요했던 개념 같다. 실제로 문제 속 연립변화율방정식에서 그 "계수"에 의해 답이 결정되었기 때문이다.

쪽지(2차시) 중에서

둘째, 교수가 학생들의 토의에 참여하여 새로운 구성원의 역할을 하고 있다. 이로써 학생들의 토의가 활성화되었을 뿐 아니라, 학생들은 교수의 견해를 받아들여 새로운 사고를 검증하는 기회를 제공받았다. 교수의 격려로 인해 강의시간에 토의된 지식을 학생이 전개해 나갈 수 있었으며, 이의 결과로 학습과 동기가 높아질 수 있었다. 다음 예에서처럼, 교수는 학생들의 사고를 단계별로 안내하고 있음을 볼 수 있다

우: 그러니까 이게 만약 양수라면 y가 증가하니까 dt분에 dx가 증가하는거죠.

K교수: 아 증가한다고요? ...(중략)...
우: 더 많을수록 증가율을 높이니까
K교수: 높이니까
우: 공,공,공생인가?
K교수: 공, 그렇죠, 공생이죠. 일종의 협력관계
우: 협력관계

소그룹토의(13차시-Group2) 중에서

미: 모이는데
기: 원점, 다 똑같은거 아니야?
K교수: 모인다구요?...(중략)...
미: 방향이 달라지는 포인트가 아닌가요?
K교수: 방향이 달라지는 포인트?
미: 여기는 아래로 하고 여기는 위로, 여기도 아래로 하고, 여기는 위로 하고
K교수: 방향이 아래로 가서
미: 그 담엔 밑에가 점점 이렇게, 이런 식으로
K교수: 이런 식으로? 직선 같은 게 있다는 거에요?
미: 네...네...
K교수: 직선 같은게?

소그룹토의(16차시-Group4) 중에서

### 5.1.2 학생과 학생간의 상호작용

학생과 학생 간의 상호작용은 토의과정과 쪽지에서 두드러지게 나타났다. 학생과 학생 간의 상호작용으로 학생들은 자신의 사고에 대한 반성과 다른 견해에 대한 이해를 할 수 있었다.

첫째, 학생들은 다른 학생과의 상호작용으로 자신의 사고에 대한 반성을 할 수 있었다. 토의를 통한 의사소통은 모든 참여자들의 의견, 태도를 바꿔주는 효과가 있었다. 다음의 예를 보면, 학생들은 변화율방정식에서의 중요한 관점을 토의를 통해 획득했으며, 자신의 사고에 대한 검토를 시도했음을 볼 수 있다. 학생들 간의 상호작용으로 문제해결이 훨씬 원활해졌으며, 자신의 지식에 대한 자각과 오류수정이 가능하게 되었다.

토의를 할 때, 다른 토의자가 '얼룩말의 영향력이 큰 것에 착안을 해서...'라는 말을 했는데, 그 '영향력'이라는 것을 어떻게 방정식에 적용해서 해석해야 하는가? 하는 의문이 생겼고, 이 문제를 그런 관점에서 바라볼 수 있다는 것을 알았다.

쪽지(2차시)중에서

다른 조에서 발표할 때 평행이동에 대한 이야기를 했었는데, 처음에는 그것이 틀렸다고 생각했다. 설명을 듣고보니 긍정할 수 있었으며, 나에게는 좀더 명확한 설명과 연구가 필요한 것 같다.

쪽지(4차시)중에서

민: 이게 0이 된다면 x=y 같을 때,
호: 그게? 아, 그게 0이 될 때?
민: 여기서는 그림으로 보면
호: 그렇지 x=y가 같이
민: 같아지는 순간이 없잖아.
호: 응 그렇게 될 수가 없잖아.
민: 이게 꼭 그래프 기울기를 보고 해야 한다면
호: 어 그래프 기울기가 정확하다면

소그룹토의(14차시-Group3) 중에서

둘째, 학생들은 다른 학생과의 상호작용을 통해 다른 견해에 대한 이해를 할 수 있었다. 학생들은 자신의 사고와 다른 사람의 사고를 비교하여 자신의 견해를 반성하는 기회와 다른 견해를 이해하는 기회를 제공받게 되었으며, 다른 사람의 관점을 인정하는 동안 자신의 관점을 발전시키고 변호하는 과정을 거치게 되었다

...나의 문제 접근방식을 다른 수강생들에게 소개하고, 또 그 반대의 과정을 거치면서 단순히 문제풀이 능력뿐 아니라, 창의적 사고와 의사소통능력을 향상시킬 수 있는 좋은 기회라고 생각된다. 첫 번째 활동지의 내용은 먹이사슬과 관련된 것이었다. 주어진 두 연립변화율방정식 중 △ 포식자/△ 피식자 의 값이 더 큰 것을 결정하는 것이 포인트인 문제라고 여겨졌지만, x값과 y값 중 어느 것이 포식자인지 피식자인지를 찾아내는 것부터가 문제였다. 구체적인 수치를 대입하려고 했으나, 적절한 x와 y값을 찾아내는 것도 수월치 않았다. 다른 조의 발표를 들으면서 나의 생각을 보완할 수 있었다.

쪽지(2차시) 중에서

웅: 평행해가 (0.0) 하나 밖에 안 생기는데
한: 아니, 여기는 직선해라고 그랬잖아.
웅: 어? 직선해 뭐?
한: 평형해면은 위치, 가속도하고 속도하고 다 변하지 않아야 되고
현: 그런데 직선해는 속도가 변하잖아.
한: 여기 지나가면은 가속도는 변하지 않는단 말이야. 속도는 어떻게 되는지 잘 모르겠는데 일단 가속도를 0으로 놓고 풀면은 속도값이 벡터가 그냥 기울이가 0인 채로 이렇게 생기겠지?
웅: 그럼 그것도 평형해에요?
한: 그건 직선해라고 했잖아. 여기서. 직선해.
웅: 그건 평형해 아니죠?
한: 그렇지.

소그룹토의(16차시-Group4) 중에서

### 5.1.3 학생과 교수-학습자원 간의 상호작용

학생과 교수-학습자원 간의 상호작용도 미분방정식 강의에서 찾아볼 수 있었다. 여기서, 미분방정식 강의에서의 교수-학습자원은 활동지, 자바 애플릿 등을 지칭하는 것이다.

첫째, 활동지를 통한 맥락(context)에서의 학습을 통해 학생과 교수-학습자원 간의 상호작용이 이루어졌다. 활동지 문제의 범교과적 소재들은 학생들의 학습에 사고와 인식의 새로운 방식을 야기시켰으며, 경험적·수학적으로 실제적인 문제를 통해 맥락에서의 학습이 강조되었다. Brown(1989)에 의하면, 학습은 상황에 맞는 활동을 통해서 일생동안 지속적으로 일어나므로, 여러가지 상황에서 출발된 맥락에서 이루어져야 한다. 활동지에서 찾아볼 수 있는 경험적으로 실제적인 문제의 예는 다음과 같다. <06. 점박이 올빼미>, <09. Cooling coffee> 등과 같이 실생활 소재를 비롯하여, 생물학, 물리학, 문학 등 여러 학문에서 찾아볼 수 있는 미분방정식이 학습의 출발점이 되었다.

**<06. 점박이 올빼미>**

※ 한 생물학자는 캐나다 Pacific Northwest의 숲 속에 살고 있는 점박이 올빼미 수의 변화에 대한 연구를 하고 있다. 이 과학자가 점박이 올빼미의 수에 대한 모델로 사용한 변화율방정식은

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{P}{5}\right)\left(\frac{P}{8} - 1\right)$$

이다(단, $P$의 단위는 올빼미 100마리이고, $t$의 단위는 년(年)이다).

...(중략)...

3. 1961년, 미국의 기상학자 Edward Lorenz(1917~)는 복잡하게 움직이는 대기의 순환에 관한 본질적인 성격을 잃지 않으면서 간단하게 단순화시킨 방정식을 고안해서 이론적으로 대기의 모델을 연구하고 있었다. ...(중략)...극히 사소한 차이가 가면 갈수록 증폭되어 걷잡을 수 없이 그래프를 흐트려 놓고 있었다. 그것은 바로 카오스였다...(중략)...1972년 Washington의 회의에서는 갈매기 대신에 더욱 시적인 표현인 나비로 발전시켜, "예측: 브라질에 있는 나비의 날개짓 때문에 텍사스에 토네이도가 발생하다"를 발표하였다. 이처럼 초기치의 미묘한 차이가 크게 증폭되어 엉뚱한 결과를 나타내는 것을 「나비효과(butterfly effect)라고 부른다.
이러한 Edward Lorenz의 나비효과(butterfly effect)를 앞에서 살펴본 점박이 올빼미의 경우와 연관지어 설명해 보자.

<그림 5.1-1> 06. 점박이 올빼미 활동지

**<09. Cooling coffee>**

※ 아라네 조 친구들은 커피를 마시며 이야기를 나누다가 뜨거운 커피의 온도가 식어가는 비율을 나타내는 변화율방정식을 만들어보기로 하였다. 그들의 아이디어는 시간에 따라 변하는 커피의 온도를 재고, 그들이 측정한 자료로부터 변화율방정식을 만드는 것이었다.
아래의 표는 아라네 조에서 식어가는 커피의 온도를 측정한 자료이다. 실온은 21℃이었고, 커피의 온도는 14분 동안 2분 간격으로 측정하였다.

<그림 5.1-2> 09. Cooling coffee 활동지

둘째, 테크놀로지의 활용을 통해 학생과 교수-학습자원 간의 상호작용이 이루어졌다. 본 강좌에서

는 미분방정식 자체에 대한 이해와 그 해의 역동적 체계에 대한 이해를 강조하고 있으며, 그 특징은 다음과 같이 세 가지로 요약될 수 있다. 그래프나 테크놀로지를 사용하는 시각화를 통하여 미분방정식과 해에 대한 이해를 도울 수 있고(Manoranjan, 1999), 미분방정식에 대한 수치적 접근이 가능하였고(Shampine & Gladwell, 1999), 마지막으로 컴퓨터 테크놀로지의 활용을 통하여 미분방정식에 관한 통합적 이해가 가능해졌다(West, 1999).

다음 예는 확대(zoom)기능을 이용하여 기울기에 대한 탐구를 시도하고 있는 예로서 테크놀로지를 기반으로 획득한 사실을 문제해결에 이용하고 있다. 또한 구체적 조작물(예, pipe cleaner)을 이용하여 실제 상황을 직접 시연함으로써 활동지 문제에 대한 이해를 도울 수 있었다.

> 조교: x축을 지나갈 때 왜 이상한데? 지나가면 안될 거 같아?
> 호: 그 때 그런거 있었잖아요. 그래픽계산기 할 때, 이렇게 바뀌는 부분이 있었잖아요. [window stetting에 관한 활동지에서 본 것을 생각하고 있었다.] 그런 것처럼 해함수가 x축에서 걸리면 화면에서는 이렇게 쭉 나가도 실제로는 이렇게 안될 것 같아요. ...(중략)...
> 조교: 아, 기울기? 그러면 이것도 기울기고 이것도 기울기여야지 이 식이 되지. 이거는 기울기고, 이것도 기울기야?
> 철: 아, 아닌가? 그러니깐 x값 변화량 분에 y값 변화량이니까...
> 조교: 아, 그래서 이게 기울기라고?
> 철: 네., 그렇게 생각을 했는데. 그래서 그걸 k라고, 어떤 일정값이라고
> 민: (그림이 다 그려졌나보다...) zoom, zoom, zoom 해야 돼. 더. 더. 더....아, zooom을 해야 될 경우- 해야된다....(중략)...
> (교수님께서 pipe cleaner를 나누어주셨다.)
> 철: 아, 이게 뭐하는거지?
> 호: 아, 이거 총 닦는 건데?
> 호: 그러니까 봐봐, 이게 위에서 이렇게 봤을 때 처음에는 이렇게 되잖아? 안으로 들어가지? 근데 있잖아. 이렇게 2루트 2보다 크다. 그렇게 되면은 위에서만 봤을 때 y=-x, y=-2x를 따라서 들어가잖아. ...(중략)...
> 철: 어떻게? 직선처럼?
> 호: 그렇지. 돈다고 해도 어디까지 간 후에는 이렇게 되지. 직선, 원점을 통과하는 직선
>
> 소그룹토의(16차시-Group4) 중에서

셋째, 활동지의 문제 또한 테크놀로지의 높은 활용도를 요구한다. 학생들이 활동지의 문제를 해결하기 위해선 테크놀로지의 적극적인 활용이 필요하였다. 이러한 테크놀로지의 높은 활용도는 하나의 수학적 사실을 다양한 표상(representation) 속에서 생각함으로써 자신의 사고에 대한 반성과 확신을 거쳐, 사고의 다양성을 기를 수 있는 토대가 되었다. 그러한 예를 들어보면 다음 그림과 같다.

**<03-1. Tangent vector fields>**

※ Java Applet 프로그램인 DEV Applet을 사용하여 미분방정식 $\frac{dP}{dt}=0.3P$ 에 대한 tangent vector field를 그려보자. 이 프로그램은 홈페이지에서 다운받아 사용할 수 있다.(edunet4u.snu.ac.kr→미분방정식 게시판→강의록)

1. $\begin{bmatrix} \triangle t \\ \triangle P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0.3*P \end{bmatrix}$ 의 그래프를 그리면 컴퓨터 스크린에서는 어떻게 나타날지 대하여 토의하고 컴퓨터에 그려 확인해보자.

...(중략)...

4. Graph 창의 왼쪽 위에는 4개의 값이 보일 것이다. 이것의 의미에 대하여 생각해보고, 생각한 것을 자세히 적어보자.
5. Graph 창의 왼쪽 아래에는 6가지 모양의 버튼이 있다. 각 버튼의 역할에 대하여 생각해보고, 자세히 적어보자.

<그림 5.1-3> 03-1. Tangent vector fields 활동지

**<05-1. Preposed Paths of Descent>**

3. 비행기가 언제 착륙할 것인지 예측하기 위해 Java Applet 프로그램을 사용하여 각각의 tangent vector field를 만들어 보자.

(1) 변화율방정식 $\frac{dh}{dt}=-h$ 의 tangent vector field 위에서 점을 찍어가면서 초기조건이 $t=0$ 일 때 $h=2$ (단, 2는 200 또는 2000 feet 높이라고 생각할 수 있다)인 경우의 해의 그래프를 생각해 보자. 또한 변화율방정식 $\frac{dh}{dt}=-h^{\frac{1}{3}}$ 에 대하여도 마찬가지로 해의 그래프를 생각해 보자. 두 개의 그래프 중에서 평형해 $h(t)=0$과 만나는 것은 어느 것인가, 둘 다 인가, 또는 둘 다 아닌가?

(2) 변화율방정식 $\frac{dh}{dt}=-h$ 의 tangent vector field 위의 한 점에서 마우스를 좌우로 움직이지 말고 아래쪽으로 똑바로 옮겨보자. $h=0$ 에 가까워질 때 tangent vector의 변화율은 어떻게 되는가? 이 변화율방정식에 따른다면 유한한 시간 내에 비행기가 착륙할 수 있을까? 변화율방정식 $\frac{dh}{dt}=-h^{\frac{1}{3}}$ 에 대하여도 생각해 보자.

<그림 5.1-4> 05-1. Preposed Paths of Descent 활동지

넷째, 본 강좌에서는 학생과 교수-학습자원 간의 상호작용을 통해 획득된 학생들의 수학적 발달을 볼 수 있었다. 미분방정식 강의에 사용된 여러가지 교수-학습자원을 활용하여 학생들은 자신의 사고에 대한 검증과 확신을 가지게 되었으며 수학적 사실과 현실을 연결지어 생각하였다. 경험적·수학적으로 실제적인 문제를 통해 맥락에서의 학습을 중심으로 구성된 교수-학습자원을 통해서 학생들은 수학의 아름다움, 수학과 타 학문과의 연계성, 수학적 사실의 현실성에 대하여 고찰할 기회를 가지게 되었다.

방정식 하나에도 자연세계의 절대규칙이 숨어있음에 감탄했다....(중략)...수학의 미에 대해 처음 느끼게 되었다.(감상적으로 들릴지 몰라도 내게는 놀라운 경험이었다.)

쪽지(4차시) 중에서

하강하고 있는 비행기 변화율방정식에서 h의 지수범위에 따라서 비행기의 착륙가능성이 달라진다는 것을 알았고, 그게 참 흥미로웠다....(중략)... 현실을 수학적으로 modeling한다는 것이 어떠한 것인지 느낄 수 있는 경험이었다.

쪽지(12차시) 중에서

$dh/dt=-h$의 미분방정식에서는 비행기의 고도 h가 0이 되지 않는다. 그래서 이 식은 무의미한가 생각했었는데, 지면에 가까운 높이에서는 비행기가 바퀴를 이용하여 착륙할 것이므로 실생활과 연관지어 생각해보면 의미있는 방정식인 것 같다.

쪽지(14차시) 중에서

### 5.2 능동적 참여(active participation)

탐구 지향 토의학습의 묘미이기도 하겠지만 이런 강의를 진행할 때 가장 흥미로운 점은 학생들 스스로의 변화이다. 학습에 대하여 수동적인 입장이었던 학생들이 스스로 만든 수학적 실체 속에서 의도적 활동을 하는 것을 곳곳에서 찾아볼 수 있다. 학생들은 수학 개념을 스스로 정의하기도 하고, 늘 새로운 의문을 가지며, 이 의문이 다른 탐구의 원인으로 제공되기도 한다. 또한 학생들 스스로 답을 찾아내는 과정에서 자신감을 가지게 되며 자신이 가지고 있던 사고를 변화시킬 수 있는 기회를 가지게 된다.

#### 5.2.1 학생들의 자발적인 정의(spontaneous definition)

어떤 수학적 개념을 정의함에 있어 교재에 있는 정의를 그대로 사용하는 것이 아니라 학생들 스스로 여러가지 표현을 사용하게 된다. 탐구 지향 토의학습의 목표 중 하나는 학생들이 직접 수학을 창조함으로써 진정한 수학 학습자가 될 수 있게 해주는 한 가지 방법이라는 신념에 기초하고 있다. 이때 중요한 요소는 교사와 학생 모두 학습과정에 대한 학습자의 기여를 인식하고 학습자가 해답에 이르는 길을 찾을 수 있다는 것을 인식하는 것이다.

호: 그러니까 혼자 독립된 존재로 하나 그냥 존재하는 거고.
민: 그냥 또 다른 하나의 solution, 해.
철: 그런데 그거 sink라고 계속 생각을 해도 돼?
호: 아니, 그건 그럼 뭐라고 해야 되나? 어떤 말 그대로 평형해. 하하
철: 하하.
민: 그 자체가 해인 거예요.

호: source도 아니고.
조교: 그럼 지금까지 못 보던 거네?
호: 네, 지금까지 못 보던 거예요.
조교: 그럼 이름을 붙이면 어떨까?
철: 뭐라고 붙이지? 따. 하하..
민: 그 자체다.
조교: 하하, 따야? 따.
철: 하하, 아무도 자기 주변으로 안가려고 하니까.
희: 왜? 다 그러면 멀어지는 게 따 아니야? 그러면?
호: 말 그대로 평형해네. 그냥.

소그룹토의(16차시-Group3)중에서

직선해는 사실 미분방정식의 해(해함수)가 아니다. 어떤 특정한 선형연립 미분방정식에서, 해함수를 $xy$ 평면에 정사영 시켰을 때 혹은 위상 평면상에 해의 움직임을 나타내었을 때 직선을 따라서 원점으로 향하는 해가 있다. 직선해란 바로 그 $xy$ 평면 상의 '직선'을 일컫는 말이다. 직선해에서의 '해'는 미방을 만족시키는 함수라는 의미의 '해'와는 다른 의미로 단지 비유적인 표현일 뿐이다. 이는 혼동의 우려가 있는 표현으로 별로 적절치 못한 용어라고 생각된다.

연의 포트폴리오 중에서

민: sink 한다고 했을 때, 이 축을 따라서 간다기 보다는 두 개의 직선을 따라서 이동해서
K교수: 벡터들이 접근해서 평형해로 가니까
철: 종민이가 이름을 붙였는데요. 가이드 라인 이라고

쪽지(17차시-Group3)중에서

### 5.2.2 의문 제기(posing questions)

활동지의 질문 자체가 어떤 하나의 옳은 정답을 구하는 것이 목적이 아니라 그 과정을 이해하고 그러한 결과가 나오게 된 과정을 학생들 스스로 의미있게 받아들일 수 있도록 하는 것에 목적을 두고 있기 때문에 문제를 해결해 가면서 문제의 의도를 파악하려는 경향을 가지게 된다. 또한 앞으로 이 문제가 어떻게 발전해 나갈지 호기심을 가지고 활동지에 나온 질문을 더 깊이 탐구하려고 하는 경향을 가지게 되었다.

$\frac{dP}{dt} = something$ 형태의 변화율방정식이 P에 관한 식인지 t에 관한 식인지 아직 명확한 결론을 내리지 못했다. 이번 식에서는 이와 같이 p=f(t)로 표현할 수 있을 때는 t에 관한 식처럼 보이지만 다른 x, y가 들어가는 식은 t로 표현할 수 없었고 또 접근하는 방법에서도 t를 생각하지 않았기에 t에 관한 식으로 볼 수 없다고도 할 수 있을 것 같다. x, y 그리고 p와 t 사이에 관계식이 존재하는데 순간적으로 둘 사이의 관계를 생각하지 않고 독립적으로 생각해도 되는지 아직 명확하지 않고 이 부분이 가장 궁금하다.

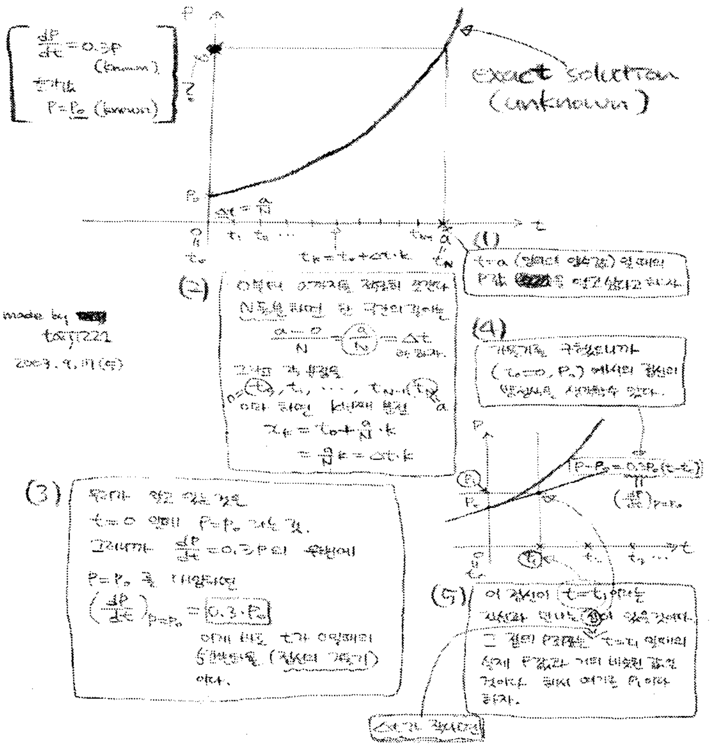
쪽지(2차시) 중에서

지난 시간 스키 문제를 다루면서 과연 연립 미분방정식에서 식이 두 개만 있으면 해함수를 구할 수 있을지 궁금해졌다.

쪽지(14차시) 중에서

### 5.2.3 탐구(exploration)

강의시간 안에서 또는 밖에서 많은 탐구가 이루어졌다. 다음 그림에 제시된 예는 일계 미분방정식의 일반해를 구하는 과정을 어떻게 구했는지 한 학생이 인터넷 게시판에 올려놓은 그림이다. 이 그림은 다른 학생들의 사고에 많은 영향을 끼쳤으며 다른 상황에서도 일반해를 구할 수 있는지, 또 다른 방법은 없는지 등을 탐구하려는 경향이 생겨났으며 그 결과도 다양한 형태로 학생들에게 제시되었다.




<그림 5.2-1> 연이가 오일러 방법을 구한 과정에 대한 설명

홍 : 그래프가 S자로 꺾이는 것을 알 수 있어요.(대부분의 학생들이 이 이야기에 동의한 것 같음) 기울기가 증가하다가 6.25가 되는 순간에 기울기가 증가하긴 하는데 감소하므로 S자 모양이 되다가 12.5가 되는 순간 극단적으로 0이 되죠.

또한 학생들에게 그룹별로 주어진 과제에서 미분방정식이 실생활에 응용되는 사례를 찾아 그 식을 만들고 해석하는 것이 제시되었는데 어떤 조에서는 미분방정식을 이용하여 상황을 모델링하고 그 결과 핵폐기물의 심해 매립을 금지하게 되는 결정적 사건을 찾아 미분방정식이 어떻게 적용되고 있는지 수학적으로 밝히기도 하고 또 다른 조에서는 실생활에서 접할 수 있는 소재를 찾아 대화 형식을 빌려 문제를 해결하기도 하였다. 팀 프로젝트는 팀별 색깔이 잘 드러나고 있음을 볼 수 있었다. 다음은 어느 조에서 제시한 팀 프로젝트의 예이다.

<표 5.2-1> 팀 프로젝트의 예

| |
|---|
| 빨래가 마르려면 얼마만큼의 시간이 걸릴 것인가?<br>이것은 우리가 실생활에 있어서 자주 생각하게 되고, 이것 때문에 자주 어려움을 겪는다. 빨래가 예상한 시간안에 마루지 않아서 곤욕을 치른 경험은 누구나 있을 것이다. 하지만 미분방정식을 배우면 그것을 걱정하지 않아도 된다.<br>(중략)<br>승철박사 : 어허허 난감하겠구나, 아마 소개팅 나가려고 산 옷이겠지? 그럼 우리 언제까지 마를지에 대해 알아보도록 하자꾸나. 실험에 의하면 공기 중의 축축한 다공성 물질은 현재의 습기함량에 비례하는 속도로 습기를 잃는다는 사실이 알려져 있단다.<br>뽀람 : 속도 dy/dt는 y에 비례하니까 dy/dt=ky가 되겠군요.<br>승철박사 : 오호 똑똑하구나. 이것을 풀면 어떻게 될까?<br>$\int_1 1/y\,dy = \int_1 kdt$ 에서<br>ln y = kt + c (c는 상수)에서 $y = e^{kt+c} = C * e^{kt}$가 되겠지?<br>뽀람 : 그럼 초기조건을 이용해 C를 구해요.<br>승철박사 : 그럼 t=0일 때의 y값을 y(0)라고 하면 y(t)=y(0) $e^{kt}$가 되겠지.<br>뽀람 : 아, 그렇군요, 그런데요 습도가 줄어드는 것을 보니까요 원래 습도가 y(0)일 때 한시간 후에는 y(0)/2가 되었더라구요.<br>(후략) |

### 5.2.4 사고의 변화

한 학기 동안 이루어진 강의는 학생들의 사고에도 긍정적인 영향을 많이 끼친 것을 알 수 있다. 먼저 학생들은 그동안 수학에 대해 형식적이고 실생활과 관련이 없는 것으로 생각해 왔었는데 수학이 실생활과 밀접한 연관을 가지고 있음을 확인할 수 있는 계기가 되었으며 수학 개념을 정의와 공식을 외우는 것만이 아닌 그 의미를 파악하고 중요성을 깨달을 수 있게 되었다. 또한 이런 방식의 강의는 기존의 강의 위주의 강의에 익숙해져 있는 학생들에게 새로운 경험을 제공해 주었으며 특히 교사를 염두에 두고 있는 사범대학교 학생들에게 미래의 교수법을 생각해볼 수 있는 기회를 제공해 주었다.

근 : 초등학교에서 고등학교까지는 배우면서 실생활에 많이 연관되어 있다고 생각했는데 대학에서 배우면서 정리하고 증명하고 그런데 이번 미분방정식 강의 같은 경우는 좀 다르지만 밖의 실생활에 연관되어서 많이 공부를 했지만 다른 과목들 같은 경우에는 교수님이나 학생들도 연관성을 말씀을 안 해 주시거나 못 찾거나 그렇거든요. 그렇게 느낄 수밖에 없는 것 같아요. 독립적인 세계라고 느낄 수밖에 없었던 것 같아요.

람 : 이런 말이 먼저 나오게 된 것도 포트폴리오를 하면서 팀 프로젝트를 하면서 쓰던 말 때문에 생각나서 그런거든요 그전 까지 해석에서 배운 걸 보면 정리 증명 정리 증명 어쩌면 그런게 배운걸 배운 후에 실생활 응용이란 걸 할 수 있을지 모르지만 그런 걸 알지 못하고 배웠으니까 그런데 미분방정식은 그렇지 않았거든요. 그런데 다른 자대나 그런데서 미분방정식을 배운 애들한테 물어보면 단순히 문제 풀이예요. 전혀 물고기 수 이런 것은 택도 없고 자율미분방정식 푸는 방법 변수분리법 그런 거만 배우고 나가는데 그런 식으로 강의를 나가거든요. 그래서 제 생각은 해석이나 우리가 정리나 증명을 위주로 했던 강의도 이런 식으로 강의 해 나간다면 실생활의 보다 연관을 찾을 수 있고 더 쉽게 다가갈 수 있을 거라는  생각도 들었구요 이 강의를 통해서 그렇게 해석이나 이런 거 공부안하면 시험을 못 보는 어렵게만 느꼈던 게 아니라 내가 다가갈 수 있고 쉽게 접근할 수 있다고 생각했거든요 팀 프로젝트를 하면서도 실제로 미분방정식을 만들어서 하면서 아 이런 거구나 하는 생각을 많이 했어요.

승 : 외국의 강의 방식은 이러이러한데 우리나라 강의 방식은 이게 문제야 그러잖아요 요번 학기에 강의는 옛날에 들었던 이상적인 강의 같아요 대개 좋았어요 대개 느낀 점이 많았는데 이런 경험을 가지고 현장에 나가서 교사가 되서 쓰면 좋겠다

승 : 그 전에는 해석학을 하면서 단순히 막연히 어디에 대충 사용되고 선형대수학 같은 경우에 컴퓨터에서도 많이 유용하게 사용되고 이런 것은 알았어도 내가 할 수 있는게 없어서 이걸 배워서 뭘 하나 이런 생각도 들었거든요. 이번 학기 대개 좀 수학에 대한 생각이 좀 바뀐 것 같아요. 좀 실험적일 수 있다는 팀 프로젝트하면서도 재미있는 것을 했었는데 빨래가 얼마나 빨리 마를까 이런 것도 우리가 조건만 잘 찾아내고 영향 주는 조건을 잘 찾아내고 무슨 환경만 잘 찾아내면은 그것도 미분방정식으로 풀 수 있다는 것을 알았거든요. 그런 것도 대개 놀라웠고 그런 면에서 수학이 실생활에서 많이 동떨어졌다는 생각에서 순수 수학이라고 생각했는데 그래도 뭔가 하는게 있구나

한 : 계단식으로 나가는게 되게 좋았어요 다른거랑 비교해보면 새로운 개념이 나오면 그걸 이용해서 또 새로운 걸 나가고 새로운게 나와서 또 그걸 이용해서 그러는데 이건 eigenvector 도입 할 때도 대수적으로 맨날 풀다가 그러면 규칙이 적당히 나오잖아요 거기에다가 그런 규칙을 간단히 표현하기 위해 eigenvalue란 걸 해서 행렬로 풀면은 간단하게 된다. 처음에 그것의 필요성을 많이 인식시켜 주고 그게 나오니까 그 의미가 와닿잖아요 바로 eigenvalue 가 도입되면서 전개가 됐으면 이게 편리하네 그 정도만 알고 아니 편리한 것도 모르죠 이렇게 풀어야 하는 줄만 알고 이렇게 넘어가죠 근데 약간 노동을 필요로 하는 방법에서 머리를 쓰는 방법으로 넘어가니까 그 방법들의 필요성을 많이 느끼게 된 것 같아요

웅 : eigenvector 하니까 저도 생각나는데 저는 선형대수를 일 학기 때 들었거든요 한 학기 들으면서 그냥 determinant A 마이너스 람다 A가 영이라고 외었거든요 외우고 그걸 시험에 게 당연한 듯이 멋있게 적어놓고 전개하고 그랬는데 저는 미분방정식이 선형대수를 다루는 건 아니지만 여기 와서 그걸 이해했거든요 그런 점에서 봤을 때 단계를 밟아나가는게 여러 분야를 이해하는데 참고가 되는 것 같아요

마지막 인터뷰 중에서

## V. 결 론

탐구 지향 토의학습의 장점은 학생들이 자신의 수준에서 여러 가지 답을 낼 수 있고 각각의 답을 소그룹간 또는 전체 학생들 간의 토론을 통해 비교 수정해가면서 자신의 답을 정정해 갈 수 있고 새로운 질문이 제기되기도 하고 여러 가지 아이디어를 얻을 수 있다는 것이다. 이 강의가 처음부터 학생들이 받아들이기 쉬운 강의는 아니었으나 강의를 거듭하면서 자신감을 가지게 되었고 자신에 대한 자긍심을 가지게 되는 계기가 되었다.

면담자: 토론식 강의의 장점이 뭔 거 같아요?
철: 생각을 할 수 있게 하는 거요 토론을 하려면 생각을 해야 하는데 안 그러면 보통 생각을 안 하거든요 받아들이기만 하니까 그건 기억에 오래 남지 않고 그냥 단순한 지식밖에 안 되는 것 같아요

람: 고등학교에서도 수학을 좋아하고 했지만 대학교에 와서는 별로 좋아한다는 느낌을 받지 못했는데요 미분방정식 강의를 들으면서 내가 이해하고 잘 할 수 있는 수학이 있구나 내가 잘 할 수 있는 학문이란 생각이 들었어요 내가 풀 수 있다.

마지막 인터뷰 중에서

그러나 이런 강의를 하기 위해서는 여러 가지 제반 요건이 많이 필요한 것도 사실이다. 첫째, 강의 환경에 대한 문제이다. 이 강의는 토의학습 위주로 이루어지기 때문에 소그룹별로 함께 앉아 토의를 할 공간이 필요하다. 현재 강의가 이루어진 교실에서는 30명의 학생들이 4명씩 함께 앉아 토의를 하기에 공간이 너무 좁아 다른 조의 이야기가 토의를 할 때 방해 요인으로 작용하였으며 조교들이 다니면서 토의 과정에 조언을 해주기 쉽지 않은 상황이었다. 따라서 토의학습이 가능한 교실이 구비될 필요가 있다.

둘째, 인적자원에 대한 문제를 들 수 있다. 이 강의에 참여한 인적자원을 살펴보면 강의를 담당하는 교수 외에 교수 2명이 참여하였고 강의 조교 1명 외에 2명의 조교가 참여하여 비디오를 촬영하고 학생들에게 조언을 해주었으며 강의 내용을 전사하였다. 한 과목의 강의를 위해 이렇게 많은 사람들이 참여하는 것이 일단 쉬운 문제가 아니다.

셋째, 장비에 관한 문제를 들 수 있다. 이 강의는 매시간 캠코더를 사용하여 기록 보관되었기 때문에 캠코더와 비디오 테이프가 있어야 한다. 각 그룹별로 소그룹 토론을 녹음하였기에 오디오 레코더가 필요하였다. 또한 캠코더를 특정 소그룹 토론에 초점을 맞추기 위해서는 그 그룹에 마이크를 놓고 녹음을 해야 나중에 소그룹 토론 과정을 명확하게 잡을 수 있다. 이렇게 많은 장비에 지출되는 금액을 한 개인이 모두 부담하기에는 어려움이 있다.

마지막으로 학생들에게 많은 부담이 있다는 것이다. 학생들이 한 학기에 한 과목만 듣는 것이 아니기 때문에 이 강의에 많은 시간을 투자하는 것이 어려울 수 있다. 이 강의에서는 매 강의 시간에 최선을 다해 참여해야 함은 물론 강의 시간 외에도 원하는 결과를 얻기 위해서 따로 만나야하는 수

고를 해야 했으며 많은 자료를 찾아야 했다. 다음은 학생들이 이 강의에 대해 얼마나 부담스러워했는지에 관한 인터뷰 자료이다.

면담자 : 이 강의는 다 참여를 해야 하잖아요 부담스럽지 않았어요?
철 : 부담스럽긴 했는데요 그래도 좋았던 것 같아요. 가끔 부담도 줘야죠.
면담자 : 어떨 때 부담을 느꼈어요?
람: 어려울 때 워크시트를 하면서 저희는 획기적인 것을 내지 못했다고 했잖아요 획기적인 것이 나올 단계가 되면 빡세다 따라가기 힘들어서 뭘 하는지 모르겠고 쓸 것도 없고 이해하는 척 하고 대충 써서 낼 때도 있고 그렇거든요? 이해하는 척
람 : 강의시간에 문제가 많이 되었던 것은 시간이었던 것 같거든요 정규 강의 시간보다 너무 오바된 적이 많으니까 워크시트를 다음 시간까지 조별끼리 토론을 해오라고 해오라는 것도 제가 아는 뭐조는 대개 잘 모여요 애들이 자기들끼리 토론을 많이 해서 제가 많이 꼈었거든요 그 조에서 줏어들은게 많은 것 같아요 게네들은 아무 것도 모르는데 자기네들끼리 시작을 해서 하나씩 풀어가드라구요 아 이런 거구나 하는 생각을 했어요.

마지막 인터뷰 중에서

RME 이론에 기반을 둔 탐구지향 미분방정식 강의의 효과에 관한 결과는 인지적인 측면에의 분석(권오남, 주미경, 2005; Kwon, et al., 2005)과 학습의 정의적 측면에 대한 교실 담화 자료의 질적 분석(Ju & Kwon, 2003)으로 보고되었다. 이러한 탐구지향 미분방정식에 관한 연구 결과를 통해 입증된 탐구지향 미분방정식의 인지적·정의적 측면에서의 효과는 현대의 수학교육이 추구하는 교육적 이상을 현장에서 구현할 수 있는 미래의 수학교사교육모델이 될 수 있음을 시사하며 이러한 가능성에 대한 체계적인 연구에 기반을 둔 수학교사교육 프로그램의 개발 및 확장이 필요하다. 탐구지향 미분방정식 강의를 진행하기 위해 쏟아야 하는 열정과 노력은 말할 것도 없고 많은 사람들이 참여로 이루어진 강의인 만큼 이 강의에 대한 학생들의 기억은 남다를 수 밖에 없다. 앞으로 탐구 지향 토의학습이 보편화되기를 바라는 마음으로 한 학생의 포트폴리오에 제시되었던 소감문을 인용을 결어로 대치하고자 한다.

이번 한 학기 동안의 기억으로는 미분방정식 강의밖에 기억에 남는 게 없다. 수많은 숙제와 Reflective journal, 그리고 Worksheet들, 거의 다른 것에는 신경 쓸 틈이 없었던 것 같다. 처음에 이런 식의 토론 강의를 통해 얻어지는 것이 있을까? 수학 강의에 이런 방식이 효과가 있을까? 상당한 의문이었지만, 상당히 많은 것들을 얻은 것 같다. 나름대로 강의 시간에 생각을 가장 많이 한 강의가 아닌가 생각된다. 계속되는 연장강의에 몸이 피곤하긴 했지만, 이번 강의를 통해 배운 내용들은 쉽게 잊혀지지 않을 것이고, 또 그러기를 바란다. 그리고 새로운 사람들을 만난 것도 가장 큰 행운으로 생각한다. 서로 의견을 주고 받는 가운데 그 동안의 쌓인 '정'으로 고생하면서 함께 자라온 형제처럼 느껴진다. 이 기회로 미분방정식에 관심을 가지는 사람들도 많이 생긴 것 같다. 임용고시에 이 과목이 빠져 있는 게 아쉽지만, 틈나는대로 더 깊이 공부하고 싶은 과목이기도 한다. 그동안 수고하신 조교님들과 교수님께도 감사드리고 싶다.

팀프로젝트 마지막 소감문에서

1) 본 연구를 위하여 수고한 연구보조원인 서울대학교 대학원생 박정숙, 김소연, 이경은에게 고마움을 전한다. 수많은 토론을 통해 탐구지향 미분방정식 자료를 공동 개발한 San Diego University의 Rasmussen 교수에게 감사의 뜻을 표한다. 또한 본 연구의 진행과정 동안 교실관찰을 통해 건설적인 피드백과 격려를 아끼지 않은 이화여자대학교 신경희 교수, 신라대학교 주미경 교수에게도 감사의 뜻을 표한다.

2) 서울대학교 교수학습센터( http://ctl.snu.ac.kr )는 본 논문에 보고된 강의를 우수 강의로 선정하여 2005년에 CD로 제작하였다. 강의 개선 사례에 대한 동영상 자료는 교수학습센터를 통하여 구할 수 있다.

# 참 고 문 헌

권오남 · 김영신 (2002). 미분방정식 교수-학습에서의 RME접근. 수학교육포럼, **1**, pp.111-133.

권오남 · 주미경 (2005). 탐구 지향 미분방정식 교수-학습의 효과 분석. 수학교육, **44(3)**, pp.375-396.

김덕선 · 양정모 · 이상구 (2004). 대학에서의 수학교육 환경-현재와 미래. 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집>, **18(2)**, pp.35-45.

배천웅 · 이준옥 · 최원형 (1996). 교수방법의 탐구. 대전: 한남대학교출판부.

양용칠 (2002). 강의설계를 위한 학습심리학. 서울: 교육과학사.

이성호 (1989). 한국의 대학교수. 서울: 학지사.

전성연 (1995). 대학의 교육과정과 강의. 서울: 학지사.

정영옥 (2000). 수학교육 연구 동향-네덜란드의 현실적 수학교육, 대한수학교육학회지 학교수학, **2(1)**, pp.283-310.

황정규 (1985). 한국 대학생의 교수-학습 방법의 실태와 문제점 탐색. 서울: 한국대학협의회.

Blanchard, P., Devaney, R., & Hall, R. (1998). *Differential equations*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole.

Brown, J. S.; Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher,* **18**, pp.32-43.

Cobb, P. (2000). Conducting experiments in collaboration with teacher. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science*. Lawrence Erlbaum Associates.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1993). Thoughts on teaching mechanics: Didactical phenomenology of the concepts of force. *Educational Studies in Mathematics,* **5**, pp.70-87.

Gravemeijer, K. (1994a). *Developing realistic mathematics education*. Utrect: CD-β Press.

Gravemeijer, K. (1994b). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* **25(5)**, 443-471.

Gravemeijer, K., & Doormann, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A Calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics,* **39**, pp.111-129.

Habre, S. (2000). Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. Journal of Mathematical Behavior, **18(4)**, 455-472.

Kwon, O. N. (2002). Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations. *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate level)* (2nd, Hersonissons, Crete, Greece, July 1-6, 2002). **ED 472 048**.

Ju, M. K., & Kwon, O. N. (2003). Perspective Mode Change in Mathematical Narative: Social Transformation of views of Mathematics in a University Differential Equations Class. *Paper presented at the 7th annual conference on Research in Undergraduate Mathematics Educations*, Scottsdale, Arisona.

Kwon, O. N., Rasmussen, C., & Allen, K. (2005). Students' Retention of Mathematical Knowledge and Skills in Differential Equations. *School Science and Mathematics,* **105(5)**, pp.1-13.

Manoranjan, V. S. (1999). Qualitative study of differential equations. In M. J. Kallaher (Ed.), *Revolutions in differential equations: Exploring ODEs with modern technology* (pp 59-66). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Rasmussen, C., & King, K. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* **31(2)**, pp.161-172.

Rassmussen, C. (2001). New Direction in Differential Equations: A Framework for Interpreting Students' Undrstandings and Difficulties. Journal of Mathematical Behavior, 20, 55-87.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society, 47***(6)**, 641-649.

Shampine, L. F., & Gladwell, I. (1999). Teaching numerical methods in ODE courses. In M. J. Kallaher (Ed.), *Revolutions in differential equations: Exploring ODEs with modern technology* (pp.67-78). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a Mathematics program for primary education. In L. Streefland(Ed.), *Realistic Mathematics Education in primary school* (pp.21-57). Utreclt: C αβ Press.

West, B. H. (1999). Technology in differential equations courses: My experiences, student reactions. In M. J. Kallaher (Ed.), *Revolutions in differential equations: Exploring ODEs with modern technology* (pp.79-89). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

# An Inquiry-Oriented Approach to Differential Equations: Contributions to Teaching University Mathematics through Teaching Experiment Methodology

**Oh Nam Kwon**
Department of Mathematics Education., Seoul National University, Seoul, 151-742, Korea
E-mail: onkwon@snu.ac.kr

During the past decades, there has been a fundamental change in the objectives and nature of mathematics education, as well as a shift in research paradigms. The changes in mathematics education emphasize learning mathematics from realistic situations, students' invention or construction solution procedures, and interaction with other students of the teacher. This shifted perspective has many similarities with the theoretical perspective of Realistic Mathematics Education (RME) developed by Freudental. The RME theory focused the guide reinvention through mathematizing and takes into account students' informal solution strategies and interpretation through experientially real context problems. The heart of this reinvention process involves mathematizing activities in problem situations that are experientially real to students. It is important to note that reinvention in a collective, as well as individual activity, in which whole-class discussions centering on conjecture, explanation, and justification play a crucial role.

The overall purpose of this study is to examine the developmental research efforts to adpat the instructional design perspective of RME to the teaching and learning of differential equation is collegiate mathematics education. Informed by the instructional design theory of RME and capitalizes on the potential technology to incorporate qualitative and numerical approaches, this study offers as approach for conceptualizing the learning and teaching of differential equation that is different from the traditional approach.

Data were collected through participatory observation in a differential equations course at a university through a fall semester in 2003. All class sessions were video recorded and transcribed for later detailed analysis. Interviews were conducted systematically to probe the students' conceptual understanding and problem solving of differential equations. All the interviews were video recorded. In addition, students' works such as exams, journals and worksheets were collected for supplement the analysis of data from class observation and

interview.

Informed by the instructional design theory of RME, theoretical perspectives on emerging analyses of student thinking, this paper outlines an approach for conceptualizing inquiry-oriented differential equations that is different from traditional approaches and current reform efforts. One way of the wars in which thus approach complements current reform-oriented approaches in differential equations centers on a particular principled approach to mathematization.

The findings of this research will provide insights into the role of the mathematics teacher, instructional materials, and technology, which will provide mathematics educators and instructional designers with new ways of thinking about their educational practice and new ways to foster students' mathematical justifications and ultimately improvement of educational practice in mathematics classes.

* ZDM classification : D45

* 2000 Mathematics Classification : 97D40

* key word : inquiry-oriented mathematics, Realistic Mathematics Education, differential equations, collegiate mathematics education, teaching experiment