

Robust PID Controller Design using Sensitivity Function

吳源根[†]·林東均^{*}·趙兌暻^{**}
(Won-Geun Oh · Dong-Kyun Lim · Tae-Kyung Cho)

Abstract - In this paper we present a new PID controller design method using IMC design. The PID controller is derived based on the ∞ -norm of sensitivity function to guarantee stability and performance robustness. This new PID controller is suitable for the plant with right half plane zeros or with time delay. The Simulation results show that the new method is superior to Ziegler-Nichols, Morari-Zafiriou, Mattezzoni-Rocco methods in respects in overshoot and settling time.

Key Words : PID, IMC, Sensitivity, Robustness

1. 서 론

최근에 이론적으로 정교한 제어기 설계 이론이 많이 개발되었으나, 상용화의 문제점과 설계상의 간편성 때문에 아직도 산업계에서는 PID제어기가 많이 사용되고 있다. PID제어기의 설계법은 고전적인 방법[1][2][3], 현대의 최적제어 이론을 적용한 설계법[4][5], 그리고 지능제어이론을 적용한 방법등[6]이 있으며 현재까지도 다양한 연구가 이루어지고 있다. 이중 최적제어 이론을 적용한 설계법은 PID제어기의 강인성과 안정성을 보장할 수 있도록 한다는 점에서 큰 의미가 있다고 할 수 있다. 특히 최근에는 IMC(Internal Model Control)구조에 PID제어기 설계법을 적용한 연구가 활발히 이루어지고 있다.

IMC 설계법은 Morari와 Zafiriou[5]가 제안한 제어기 설계법으로써 전달함수를 이용해서 주파수 영역에서 설계되며 현대 제어 이론에서 중요하게 거론되는 내부안정성(internal stability), 안정도-강인성(stability robustness), 성능-강인성(performance robustness), 그리고 H_∞ 노름 최소화 등의 개념을 설계 시에 반영할 수 있으며, 그 절차가 잘 정립되어 있기 때문에 비교적 간단한 설계과정을 거쳐 LTI(Linear time-invariant) 플랜트에 대한 강인한 제어기를 설계 할 수 있다는 장점이 있다.

Mattezzoni와 Rocco[4]는 IMC구조의 PID 제어기에 H_∞ 방법을 적용한 연구를 보였다. 그들은 IMC 구조의 내부 안

정성이 보장되면서 안정-강인성과 성능-강인성을 보장하는 PID제어기를 설계하기위해 감도 함수와 가중치 함수가 조합된 식의 ∞ -노름값이 1 보다 작도록 설계 파라미터를 선정하였다. 하지만 이와 같이 설계 파라미터를 선정하였을 경우에는 응답 시간이 길어지는 것과 가중치 함수를 구해야하는 단점이 있었다.

본 논문에서는 IMC 구조를 이용하여 PID 제어기 설계에 대한 기존 연구의 단점을 개선하기 위해 새로운 강인한 IMC-PID 제어기 동조 방법을 제안하고자 한다. 이 설계법에서 제어 대상 플랜트는 먼저 시간 지연을 갖는 1차 모델로 근사된 다음 이를 이용하여 전체 시스템의 감도함수를 구하였다. 다음으로 강인성을 보장하는 PID제어기는 이 감도함수의 최대값을 설정함으로써 조직적으로 구해진다. 따라서 기존의 방법에 비해서 간편하면서도 직관적인 설계법이라고 할 수 있다. 모의실험 결과 제안된 방법이 기존의 방법에 비해서 좋은 성능을 보이는 것을 확인할 수 있었다.

2. IMC를 이용한 PID 제어기 설계

이 절에서는 우평면 영점을 갖거나 시간 지연이 있는 시스템에 대해서 IMC제어 구조를 이용하여 PID 제어기를 설계하는 과정을 보인다. 그림 1에 일반적인 IMC 구조의 블록선도(a)와 이를 일반적인 피드백 시스템으로 변환한 블록선도(b)를 보였다. 그림 1(a)에서 공칭 모델(nominal model) $G^o(s)$ 는 비최소위상 플랜트라고 가정한다면 최소위상과 비최소위상 부분을 분리해서 $G^o(s) = G_m^o(s)G_{nm}^o(s)$ 와 같이 쓸 수 있다. 여기서 $G_m^o(s)$ 은 최소 위상 플랜트이고 $G_{nm}^o(s)$ 은 크기가 1인 비최소위상 플랜트이다. 이때 일반적인 IMC 제어기 설계절차에서 제어기 $Q(s)$ 는 기준입력 R 로부터 출력 Y 의 공칭 페루프 전달함수를 설계자가 원하는 형태가 되도록

[†] 正 會 員 : 順天大 工大 멀티미디어工學科 副教授 · 工博
E-mail : owg@sunchon.ac.kr

^{*} 正 會 員 : 漢陽사이버대 컴퓨터學科 副教授 · 工博

^{**} 正 會 員 : 祥明大 情報通信工學科 教授 · 工博

接受日字 : 2005年 6月 2日

最終完了 : 2005年 7月 4日

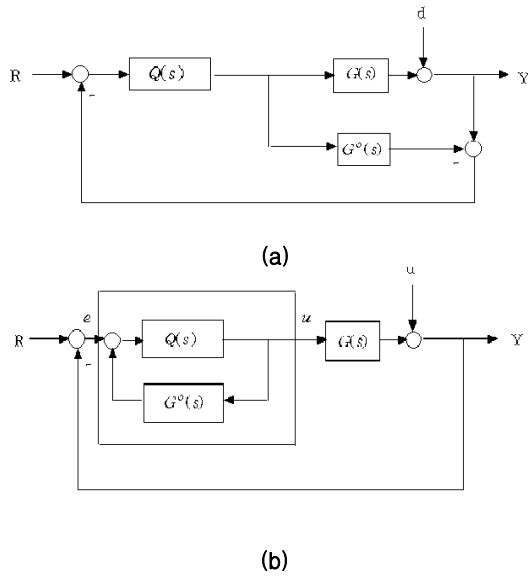


그림 1 블록선도 (a) IMC 구조 (b) 일반적인 제어기 구조로 표현한 IMC 구조

Fig. 1 block diagram (a) IMC Structure (b) IMC with general feedback structure

를 설계하는 것이 보통이며, 공칭 모델의 최소 위상 부분을 보상할 수 있도록 (1)과 같이 선정한다.

$$Q(s) = -\frac{F(s)}{G_m(s)}, \quad F(s) = \frac{1}{(T_F s + 1)^n} \quad (1)$$

여기서 n 은 $G_m^o(s)$ 의 차수이다. 이와 같은 IMC 제어 구조를 이용해서 PID 제어기를 설계하기 위해 그림 1(a)의 IMC 제어 구조를 일반적인 제어기 형태로 다시 구성하면 그림 1(b)와 같다. 그림 1(b)에서 오차 e 로부터 제어기 출력 u 의 전달함수는 아래와 같다.

$$R(s) = \frac{Q(s)}{1 - G^o(s)Q(s)} = \frac{F(s)}{G_m(s) - G^o(s)F(s)} \quad (2)$$

여기에서 공칭 모델 $G^o(s)$ 를 다음과 같이 시간지연을 갖는 1차 플랜트라고 가정하자.

$$G^o(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} e^{-d_m s} \quad (3)$$

(3)을 (1)에 적용하면 $G_m(s)$, $F(s)$ 는 다음과 같다.

$$G_m(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1}, \quad F(s) = \frac{1}{T_F s + 1} \quad (4)$$

여기서 (4)를 (2)에 대입한 다음 $e^{-d_m s}$ 항을 1차 파데 근사로 나타낸 후 정리하면 일반적인 피드백 제어기로 나타낸 IMC 제어기의 전달함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R(s) = \frac{1}{K_m(d_m + T_F)s} \frac{(\tau_m s + 1) \left(\frac{d_m}{2} s + 1 \right)}{\frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)} s + 1} \quad (5)$$

일반적인 PID 제어기의 전달함수는 아래 (6)과 같으므로 (5)와 (6)을 비교하면 IMC구조에서 PID 제어기 동조 파라미터를 해석적으로 구할 수 있다.

$$R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}} \right) \quad (6)$$

즉, (6)을 정리하면

$$R(s) = \frac{1}{T_i K_p} \times \frac{\left(T_i T_d + \frac{T_i T_d}{N} \right) s^2 + \left(T_i + \frac{T_d}{N} \right) s + 1}{\frac{T_d}{N} s + 1} \quad (7)$$

이와 (5)를 정리하면

$$R(s) = \frac{1}{K_m(d_m + T_F)s} \frac{\tau_m d_m s^2 + \left(\tau_m + \frac{d_m}{2} \right) s + 1}{\frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)} s + 1} \quad (8)$$

이므로, (7)과 (8)을 정리하면 IMC-PID 설계에 필요한 값들을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_i = \tau_m + \frac{d_m}{2} - \frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)} \quad (9)$$

$$T_d = \frac{\tau_m d_m}{2T_i} - \frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)} \quad (10)$$

$$K_p = \frac{T_i}{K_m(d_m + T_F)} \quad (11)$$

$$N = \frac{2T_d(T_F + d_m)}{T_F d_m} \quad (12)$$

(9)~(12)에서 설계 파라미터는 T_F 이며, 이 값이 결정되면 PID 제어기의 모든 파라미터를 구할 수 있기 때문에 IMC-PID는 1개의 자유도를 갖는 제어구조라고 할 수 있다. 그러므로 T_F 값은 전체 제어 시스템의 성능을 결정하는 중요한 파라미터이나 Morari와 Zafiriou[5]의 연구에서는 T_F 를 선정하는 조직적인 방법을 제시하지 못하였고 단지 $T_F = 0.25d_m$ 를 제시하였을 뿐이다. 다음 절에서는 감도함수를 이용하여 강인성이 보장되도록 이 값을 조직적으로 설계하는 방법을 제시한다.

3. 설계 파라미터 T_F

3.1 T_F 의 선정기법

2절에서 논의된 것처럼 T_F 는 IMC-PID의 성능을 결정하는 중요한 파라미터이다. 이에 대한 조직적인 선정방법에 대한 기존의 연구는 [4]가 있다. 여기에서 Mattezzoni-Rocco는 IMC 구조의 내부 안정성이 보장되면서 H_∞ 제어 기법을 이용하여 안정-강인성과 성능-강인성을 보장하는 PID제어기를 설계하기 위해 다음 식을 만족하는 최소의 T_F 를 선정했다.

$$\min \{T_F\} = \left\| S^0(s) \frac{1}{\tau} + T^0(s) W_2(s) \right\|_\infty \leq 1 \quad (13)$$

하지만 이와 같이 T_F 를 선정하였을 경우의 단점으로는 응답 시간이 길어지는 것과 계산과정에서 가중치 함수를 구해야하는 단점이 있었다. 본 논문에서는 이와 같은 단점을 개선하기 위해 감도함수를 이용하여 새로운 강인한 IMC-PID 제어기 동조 방법을 제안하고자 한다.

3.2 감도함수를 이용한 T_F 의 선정

그림 3은 일반적인 피드백 제어 시스템의 블록선도를 보인 것이다. 여기에서 추적 오차 $e(s)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e(s) &= r(s) - y(s) \\ &= \frac{1}{1+G(s)K(s)} [r(s) - d(s)] + \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} n(s) \\ &= S(s)[r(s) - d(s)] + T(s)n(s) \end{aligned} \quad (14)$$

(14)에서 임의의 입력 $r(s)$ 에 대하여 추적 오차 $e(s)$ 가 0이 되려면 $S(s) = T(s) = 0$ 이 되어야 하지만 $S(s) + T(s) = 1$ 이므로 동시에 0은 불가능하다. 그러나 일반적으로 기준 입력 $r(s)$ 와 플랜트 출력측으로 반영된 외란 $d(s)$ 는 저주파에서 에너지를 갖고 센서 잡음 $n(s)$ 는 고주파에서 에너지를 가지고 있으므로 $S(s), T(s)$ 의 값을 주파수에 따라 적당히 절충하여 적합한 루프 형상을 만들 수 있다면 만족스러운 제어 시스템을 설계할 수 있다. 일반적으로 루프 형상은 S 의 ∞ 노음에 의해 결정되는데 큰 값은 상승시간을 빠르게 하지만 오버슈트를 크게 한다. 반면에 작은 값은 오버슈트를 작게 하지만 상승시간을 느리게 하므로 설계 사양에 맞도록 결정해야 한다. 따라서 IMC-PID제어기 설계시에는 먼저 $|S_\infty|$ 의 값을 결정한 후 이를 만족하도록 제어기의 파라미터를 결정하여야 한다. 다음의 [정리 1]은 IMC-PID의 설계시 설계 파라미터인 T_F 와 감도 함수의 최대값 $|S_\infty|$ 공진 주파수 ω_{rs} , 대역폭 ω_{BS} 의 관계를 유도한 것으로 바람직한 루프형상이 결정되면 설계 파라미터를 결정할 수 있도록 관계식을 나타낸 것이다.

[정리 1] 감도 함수의 최대값 $|S_\infty|$ 와 공진 주파수 ω_{rs} , 대역폭 ω_{BS} 는 다음과 같다.

$$\omega_{rs} = \sqrt{\frac{-b^2 - \sqrt{b^4 - (a^2 - 2b - c^2)c^2 b^2}}{a^2 - 2b - c^2}} \quad (15)$$



그림 2 일반적인 피드백 제어 시스템
Fig. 2 Feedback control system

$$|S_\infty| = \frac{\sqrt{\omega_{rs}^4 + c^2 \omega_{rs}^2}}{\sqrt{(b - \omega_{rs}^2)^2 + a^2 \omega_{rs}^2}} \quad (16)$$

$$\omega_{BS} = \sqrt{\frac{(a^2 - 2b^2 - 2c^2) + \sqrt{(a^2 - 2b^2 - 2c^2)^2 + 4b^2}}{2}} \quad (17)$$

여기에서 a, b, c 는 다음과 같다.

$$a = \frac{d_m + 2T_F}{d_m T_F}, \quad b = \frac{2}{d_m T_F}, \quad c = \frac{2(d_m + T_F)}{d_m T_F} \quad (18)$$

[증명] 플랜트를 (3)과 같이 1차 모델로 나타내고 시간 지연항을 1차 파데 근사한 식을 $\tilde{G}(s)$ 라고 했을 때 근사적인 감도 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1 + P(s)G(s)} \\ &\cong \frac{1}{1 + P(s)\tilde{G}(s)} \equiv \frac{s^2 + cs}{s^2 + as + b} \end{aligned} \quad (19)$$

여기에 $s = j\omega$ 를 대입하면 그 크기는 다음과 같다.

$$|S(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^4 + c^2 \omega^2}}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}} \quad (20)$$

이 감도 함수를 최대로 만드는 공진주파수 ω_{rs} 는 다음을 만족한다.

$$\frac{d|S(j\omega)|}{d\omega} = 0 \quad (21)$$

여기에 (20)을 대입해서 계산하면 공진주파수 ω_{rs} 는 (15)와 같고, 감도 함수의 최대값은 (16)과 같이 구해진다. 감도 함수의 대역폭 ω_{BS} 는 이득이 $1/\sqrt{2}$ 이 되는 주파수이므로 다음과 같이 쓸 수 있으며 이를 만족하는 ω_{BS} 는 (17)로 유도된다.

$$|S(j\omega_{BS})| = \frac{\sqrt{\omega_{BS}^2 + c^2 \omega_{BS}^2}}{\sqrt{(b - \omega_{BS}^2)^2 + a^2 \omega_{BS}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (22)$$

[증명 끝]

[정리 1]을 이용해서 T_F 를 선정하기 위해서는 $|S|_\infty \leq 1.5$ 를 만족하도록 T_F 를 선택해야 한다. 그 이유는 참고문헌[7]

에 증명된 대로 $|S|_{\infty}=1.5$ 일 때, 이득 여유(gain margin) 3 이상과 위상 여유(phase margin) 39° 이상이 보장되므로, 전체 시스템에 통상적인 안정도와 성능 사이의 적절한 루프를 형성시킬 수가 있기 때문이다. 설계자가 다른 루프 형상을 원한다면 정리에 따라 각각의 설계 사양과 설계 변수 사이의 관계에 근거하여 설계 변수 T_F 를 조정할 수 있다.

4. 시뮬레이션

본 연구에서는 시뮬레이션 결과를 얻기 위해 Matlab와 Simulink를 사용하였다. 가장 제어하기 어려운 상황에서 본 논문에서 제안한 방법이 잘 동작하는 것을 보이기 위해서 대상 플랜트를 우평면 영점을 포함하면서(nonminimum phase plant), 매우 큰 지연 시간을 갖는 시스템을 시뮬레이션 대상으로 선정하였다.

[시뮬레이션 1] 고려한 시스템의 실제 전달 함수는 다음과 같다고 가정하자.

$$G_p(s) = 2.15e^{-14s} \frac{(1-2.7s)(1+6s+158.5s^2)}{(1+17.5s)^4(1+20s)} \quad (23)$$

이 시스템은 우평면에 영점이 있는 비최소위상 플랜트이며 상당히 큰 지연시간을 갖는 플랜트이다. 여기에 참고 문헌 [8][9]에 제시된 방법을 이용해서 플랜트의 계단응답으로부터 구한 1차 추정 모델은 다음과 같다.

$$G_m(s) = \frac{2.11}{63.86s+1} e^{-50s} \quad (24)$$

제어기 설계시 T_F 는 $|S|_{\infty} \leq 1.5$ 를 만족시키도록 선택하면 되므로 $|S|_{\infty}=1.5$ 일 때의 T_F 를 구하였다. 이 감도 함수의 최대값을 크게 하면 응답 시간이 빠르나 오버슈트가 증가하게 되고, 작게 하면 오버슈트는 작게 되나 응답 시간이 느리게 되므로 감도함수의 최대값은 설계 사양에 맞추어 적절하게 조절해야 할 것이다. (15)~(17)을 이용해서 설계 파라미터를 구하면 $T_F=40$ 이며, 이 값을 (9)~(12)에 대입하면 최적의 PID 파라미터는 표 1 과 같이 구할 수 있으며, 그림 3 에 크기가 1인 계단입력에 대해 4가지 PID 제어기를 사용한 출력을 보였다. 사용된 설계법은 Ziegler-Nichols 방법(Z-N), Morari-Zafiriou방법(M-Z), Mattezzoni-Rocco방법(M-R), 그리고 제안한 방법이다. 그림에서 보듯이 제안한 방법이 다른 방법에 비해서 우수한 계단응답특성을 결과를 보인다는 것을 알 수 있다.

[시뮬레이션 2] 또 다른 시뮬레이션은 비교를 위해서 참고 문헌 [2][3]에 사용되었던 플랜트를 선정하였다. 플랜트의 전달 함수는 다음과 같다.

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^2(2s+1)} e^{-3s} \quad (25)$$

여기에서 1차 추정모델을 구하면 그 전달함수는 다음과

표 1 PID 제어기의 파라미터

Table 1 Parameters of PID controller

제어기	K_p	T_d	T_i	N
값	0.43	8.14	75.34	0.78

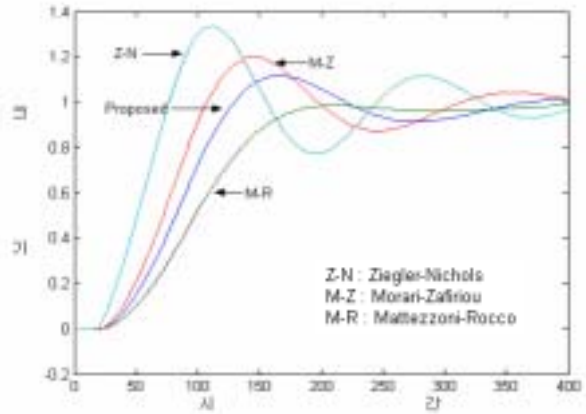


그림 3 시뮬레이션 1: 계단입력에 대한 출력비교

Fig. 3 simulation 1 : Comparison of the step response

같다.

$$G_m(s) = \frac{1}{1.54s+1} e^{-4.93s} \quad (26)$$

설계변수 T_F 는 정리 1을 이용해서 $|S|_{\infty}=1.5$ 일 때의 값을 구하면 $T_F=3.6$ 이며 (9)~(12)를 이용하여 PID제어기의 설계파라미터를 구하였다. 설계한 제어기를 적용하였을 때의 계단응답을 그림 4에 보였으며, 다른 설계법에 비해 좋은 응답특성을 보이는 것을 알 수 있다.

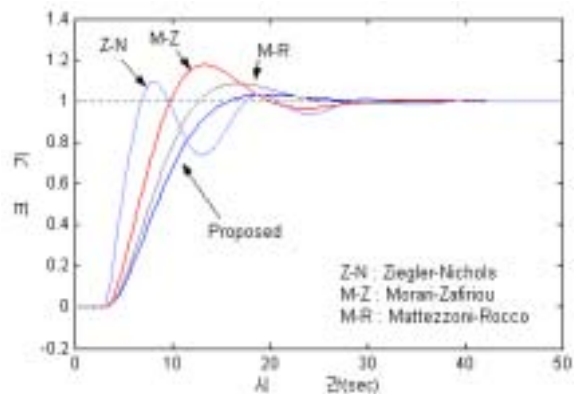


그림 4 계단입력에 대한 출력비교

Fig. 4 Comparison of the step response

5. 결 론

본 논문에서는 감도함수를 이용하여 IMC 구조를 이용한 PID 제어기의 파라미터를 결정하는 방법을 제안하였다. 기

존의 H_∞ 제어 기법을 적용한 PID 최적제어 설계법이 응답 시간이 길어지고 적절한 가중치 함수의 선정이 어렵다는 단점이 있었으나, 제안하는 방법은 감도 함수의 최대값만을 가지고 설계 사양에 맞는 루프 형상을 만들면 되므로 보다 단순하고 쉽게 적용이 가능하다는 장점이 있다. 즉, 먼저 강인성이 보장되도록 설계자가 원하는 감도 함수를 정하면 그 값에 따라 적당한 T_F 가 선정되어 루프를 형성하고, 이 값에서 PID 제어기의 파라미터가 결정된다. 시간지연이 있는 비최소위상 시스템을 대상으로 모의실험 결과 기존의 방법에 비해서 더 나은 응답을 보이는 것을 확인하였다.

감사의 글

본 연구는 2003년도 순천대학교 공과대학 학술재단의 학술연구비지원에 의하여 이루어진 연구로서, 관계부처에 감사드립니다.

참고 문헌

- [1] Ziegler, J. G. and N. B. Nichols, "Optimum Settings for Automatic Controllers", Trans. Of the ASME, pp.759-768, 1942
- [2] Yuwana, M. and D.E. Seborg, "A New Method for On-Line Controller Tuning", AIChE Jour., pp.434-440, 1982
- [3] Chen, C.L., "A Simple Method for On-line Identification and Controller Tuning", AIChE Jour., pp.2037-2039, 1989
- [4] C. Maffezzoni and P. Rocco, "Robust Tuning of PID Regulators Based on Step-Response Identification," European Journal of Control, Vol 3, no 2, pp. 125-136, 1997
- [5] M. Morari and E. Zafiriou, "Robust process control", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1989.
- [6] Doo-Hwan Park, Serk-Jun Ji, Joon-Tark Lee, "Attitude Control of Helicopter Simulator System using A Hybrid GA-PID WAVENET Controller," 전기학회논문지, Vol. 53, No. 6, pp.433-439, 2004
- [7] S. Skogestad and L. Postlethwaite, "Multivariable Feedback Control : Analysis and Design," John Wiley & Sons, pp.30-34, 1996.
- [8] Suh, B.S. D.K.Lim, "New PID Identification Algorithm Based on Frequency Scaling", Proc.40th IEEE Sym. On Circuits and Systems, Vol.1, 1997
- [9] Suh, B.S and Lee, I.B., "On-line Process Identification and PID Controller Autotuning", Korean Jour. Of Chem. Eng., Vol. 16, No. 1, pp.45-55, 1999

저 자 소 개



오 원 근 (吳源根)

1989년 한양대학교 전자통신공학과 졸업. 1997년 동 대학원 졸업(공학박사). 2001년 2월~2002년 1월 미국 Brigham Young University 교환교수. 1997년 ~ 현재 순천대학교 정보통신공학부 멀티미디어전공

부교수. 관심분야는 멀티미디어, 신호처리, 자동제어

Tel : 061)750-3832

Fax : 061)750-3830

E-mail : owg@sunchon.ac.kr



임 동 균 (林東均)

1985년 한양대학교 전자통신공학과 졸업. 2001년 동 대학원 졸업(공학박사). 2003년 ~ 현재 한양사이버대학교 컴퓨터학과 부교수. 관심분야는 자동제어, 최적제어, e-learning

Tel : 02)2281-3987

Fax : 02)2290-0629

E-mail : eiger07@hycu.ac.kr



조 태 경 (趙允暻)

1984년 2월 한양대학교 전자통신공학과 졸업. 2001년 동 대학원 졸업(공학박사). 현재 상명대학교 정보통신공학과 교수 관심분야는 초고속통신망, 자동제어, e-Learning.

Tel : 041)550-5354

Fax : 041)550-5410

E-mail : tkcho@smu.ac.kr