

## PH 수명분포를 갖는 보증제품의 수리-교체 전략

김호균<sup>1\*</sup> · B. Madhu Rao<sup>2</sup> · 배창옥<sup>1</sup> · 김승철<sup>1</sup>

<sup>1</sup>동의대학교 공과대학 정보산업공학과

<sup>2</sup>Department of Applied Statistics and Operations Research, Bowling Green State University

## Repair-Replacement Strategies for Warranted Items with Phase-Type Lifetimes

Ho-Gyun Kim<sup>1</sup> · B. Madhu Rao<sup>2</sup> · Chang-Ok Bae<sup>1</sup> · Seung-Chul Kim<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Information and Industrial Engineering, Dong-Eui University, Busan, 614-714

<sup>2</sup>Department of Applied Statistics and Operations Research, Bowling Green State University, OH 43403, USA

This paper is concerned with the question of servicing warranties for repairable items. During the warranty period, each time an item fails the manufacturer has the obligation to restore the item to operational condition either by repairing the item or by replacing it with a new item. In this paper, we consider repair-replacement strategies based on the condition of the failed item. For products with phase-type lifetime distributions where the phases represent the condition of the item, we develop algorithms to determine the expected cost of servicing a warranty and use it in making the repair-replacement decision. Illustrative numerical examples are presented. We also propose a dynamic strategy by taking the expected remaining warranty cost into consideration.

**Keywords:** warranty servicing, repair-replacement strategies, phase-type distribution, static/dynamic strategies

### 1. 서론

제품보증(warranty)제도는 생산자가 제품을 판매한 후 보증기간 동안 발생하는 고장에 대하여 수리 또는 교체 등의 조치를 해준다는 소비자와의 약정이다. 보증하에 판매되는 제품이 고장날 때, 소비자는 생산자에게 보증서비스(warranty servicing)를 요구한다. 생산자는 고장난 제품이 수리 가능한 제품일 경우 고장난 제품의 조건(condition)을 조사한 후 수리를 통해 운용(operating)조건으로 회복시킬 것인가 또는 새 제품으로 교체할 것인가를 결정한다. 이러한 수리·교체 전략은 고장난 제품의 수명 및 잔여 보증기간의 고려 여부에 따라 정적(static) 전략(Iskandar *et al.*, 2005; Jack and Murthy, 2001; Kim, 1997; Murthy and Nguyen, 1988; Nguyen and Murthy, 1986)과 동적(dynamic) 전략(Jack and Van der Dyun Schouten, 2000; Zuo *et*

*al.*, 2000)으로 구분될 수 있다. Nguyen and Murthy(1986)는 보증기간을 두 기간으로 나누고 수리 또는 교체를 수행하는 비교적 간단한 두 가지 전략을 고려하여 보증서비스비용을 최소화하는 고장시점의 한계값을 결정하였다. Kim(1997)은 제품의 수명이 PH(phase-type) 분포를 따를 경우 고장률 형태에 따라 위의 두 가지 전략을 다양하게 연구하였다. Murthy and Nguyen(1988)은 제품의 고장비용이 설정된 비용한계값보다 작을 때 수리가 이루어지는 수리비용 한계정책을 제시하고 주어진 고장분포에 대한 보증서비스비용을 최소화하는 비용한계값을 결정하였다. Jack and Murthy(2001)는 보증기간을 세 기간으로 나누어 초기 및 말기에서는 수리가 경제적이라고 생각하여 수리-교체-수리를 수행하는 전략을 제시하고, 그에 따른 두 가지 한계 파라미터 값을 결정하였다. Iskandar and Murthy(2003)와 Iskandar *et al.*(2005)은 Jack and Murthy(2001)

\* 연락저자 : 김호균 교수, 614-714 부산광역시 부산진구 엄광로 995 동의대학교 공과대학 정보산업공학과, Fax : 051-890-1619, E-mail : hgkim@deu.ac.kr

2005년 7월 접수; 2005년 9월 수정본 접수; 2005년 11월 게재 확정.

의 전략을 이차원 보증으로 판매된 제품에 확대시켰다

Jack and Van der Duyn Schouten(2000)은 고장시점에서 고장 제품의 수명을 고려하여 잔여 보증기간 동안의 기대 보증비용을 최소화 하는 동적전략을 고려하였다. 고장시점에서 제품의 상태(state)에 기초한 수리·교체 전략을 다룬 연구는 상대적으로 매우 적다. Zuo *et al.*(2000)은 제품의 상태 및 잔여 보증기간에 기초한 수리·교체 전략을 제안하고, 제품의 상태 및 잔여 보증기간의 한계를 결정하였다. 제품의 운영상태가 두 가지일 경우는 상태 1에서의 최소수리가 교체가 되므로 상태 2에서의 잔여보증의 한계값만 요구되어져 수리적 모형의 분석이 간단하다. 운영상태의 수가 2보다 클 경우는 수치방법을 사용하였으나, 제품의 상태전이는 다음 상태 또는 고장상태만으로 제한하였다.

일반적으로 제품의 운용조건은 운용년수가 증가함에 따라 퇴화되고 수리비용은 증가하게 된다. 고장난 제품의 운용조건에 기반을 둔 수리·교체 의사결정을 위해서는 제품의 상태 및 대응되는 고장특성을 기술함에 있어 제품의 운용조건을 포함시켜야 한다. PH 분포는 제품의 운용조건을 추적할 때 제품의 수명을 기술하는 데 적합한 확률분포로서, 유한 마코프체인(Markov chain)에서 흡수상태로 빠질 때까지 경과한 시간으로 정의된다(Neuts, 1989). 제품의 운용조건을 유한 마코프체인의 상태로 나타냄으로써 시간경과에 따른 제품의 퇴화는 유한 마코프체인의 상태변화로 표현될 수 있다. 생산자가 결정해야 할 또 다른 문제는 수리할 때 고장난 제품의 조건을 어느 정도까지 회복시킬 수 있을 것인지를 결정하는 수리 정도의 문제인데, 본 연구에서는 고장나기 전의 운용조건으로 회복시켜주는 최소수리(minimal repair)만을 고려하기로 한다.

본 연구에서는 PH 분포를 이용하여 알고리즘적 접근법(Neuts, 1989; Rao, 1995)으로써 수리 가능한 제품에 대한 정적 및 동적 수리·교체 전략을 제시하고 분석하고자 한다. 수리·교체 내력을 마코프체인으로 특성화하고, 기대 보증서비스 비용을 결정하여 수리·교체 의사결정에 활용하고자 한다. 이후 본 논문의 구성은 다음과 같다. PH 분포와 관련된 마코비안 도착과정(MAP; Markovian arrival process)을 2장에서 간략히 설명한다. 3장에서는 기대 총 보증서비스 비용을 계산하고 정적전략을 소개하며 MATLAB으로 구현된 수치예제의 결과를 정리한다. 4장에서는 동적전략을 설명하고, 5장에서는 결론을 요약한다.

## 2. PH 확률분포

다음과 같은 전이율행렬(infinitesimal generator)  $Q$ 와 초기 확률 행벡터(row vector)  $\alpha$  를 갖는  $m+1$ 개의 상태를 가진 연속 시간 마코프체인(CTMC : continuous time Markov chain)을 고려하자.

$$Q = \begin{bmatrix} T_m & \mathbf{T}^0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

여기서,  $\mathbf{T}^0 = -T_m \mathbf{e}$  이고  $\mathbf{e}$  는 모든 요소가 1인 열벡터(column vector)이며, 본 논문에서 나타나는 굵은 문자는 벡터를 의미한다. 만약  $m$  차원인 정방행렬  $T_m$ 이 정칙(nonsingular) 행렬이라면, 임의의 초기상태에서 결국은 상태  $m+1$ 로 흡수될 것이다. PH 분포는 흡수상태로 빠질 때까지 경과한 시간의 분포로 정의되며,  $(\alpha, T_m)$ 으로 표현된다. 이때  $\alpha_{m+1} = 0$ 이면 흡수되는 시간이 항상 0보다 크다는 것을 의미한다. PH 분포의 확률변수,  $X$ 의 분포함수는 다음 식으로 주어지고 기대값은  $E(X) = -\alpha T_m^{-1} \mathbf{e}$  로 얻어진다(Neuts, 1981).

$$F(x) = 1 - \alpha \exp(T_m x) \mathbf{e}, \quad x > 0 \quad (1)$$

재생(renewal) 간의 시간이 PH 분포인 재생과정을 PH 재생과정(phase-type renewal process)이라 한다. 단계(phase) 개념의 확장으로 Neuts(1989)에 의해 소개된 마코비안 도착과정(MAP)은 기본(underlying) 마코프체인의 전이시점에서의 포인트 과정(point process)이다. 전이율행렬  $D$ 를 갖는 기본 마코프체인이 시간 0에서 상태  $i$ 에 있다고 가정한다. 상태  $i$ 에서 지수(exponential)시간만큼 머문 후 다른 상태  $j$ 로 전이하고, 이 때 각 전이는 상태  $i$ 와  $j$ 에 종속적으로 주어진 확률로써 도착을 생성하게 된다. 이 도착과정을 MAP라 한다. MAP는  $D = D_0 + D_1$ 인 두 개의 행렬  $D_0$ 와  $D_1$ 에 의해 특성화될 수 있다. 행렬  $D_0$ 는 도착이 없는 마코프체인의 전이를 나타내고, 행렬  $D_1$ 은 도착이 있는 마코프체인의 전이를 나타낸다. 마코프변조 포아송과정(Markov modulated Poisson process)과 PH 재생과정은 보편적으로 사용되는 MAP의 경우이다(Lucantoni, 1994).

제품의 운용조건을 이산적이고 순차적인 상태 즉 ‘아주 좋음’, ‘좋음’, ‘보통’, ‘나쁨’ 등으로 구분할 수 있다. 상태의 구분은 주관적일 수 있지만, 제조설비의 경우 불량률은 상태를 구분할 수 있는 객관적인 방법이 될 수 있다. 어떤 시점에서 제품의 운용조건이 1에서  $m$ 까지 순서화되어 있는  $m$ 개의 상태 중 하나로 모형화될 수 있다고 가정하자. 여기서 상태 1은 최상(best possible)의 운용조건, 상태  $m$ 은 최악(worst possible)의 운용조건을 나타내며, 제품은 상태 1에서 상태  $m$ 까지 운용될 수 있다. 사용중에 있는 제품은 더 나쁜(퇴화된) 상태로 전이되기 전까지 각 단계에서 지수시간만큼 머무르고, 전이는 고장을 수반하기도 한다. 따라서 제품의 퇴화과정, 즉 상태의 변화는 상태공간  $S = \{1, \dots, m, m+1\}$ 을 갖는 마코프체인으로 특성화될 수 있다. 여기서, 상태  $m+1$ 은 비운용상태, 즉 고장상태를 나타낸다. 사용중인 제품의 운용조건이 개선되지 못한다고 가정한다면, 사용중인 제품의 상태변화는 상부 삼각행렬(upper triangular matrix)  $T_m$ 이 된다. 새로운 제품의 초기상태를 나타내는 벡터  $\alpha$ 에는 새로운 제품이 상태 1이 아닌 다른

상태에서도 시작될 수 있는 확률을 할당할 수 있다 예를 들면 5개의 운용상태( $m = 5$ ) 및 고장상태(상태 6)를 갖는 제품은 다음과 같은 행렬,  $T_5$ 를 갖는다.

$$T_5 = \begin{matrix} 1 & \left[ \begin{array}{ccccc} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & \lambda_{15} \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_{23} & \lambda_{24} & \lambda_{25} \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_{34} & \lambda_{35} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & \lambda_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 \end{array} \right] \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

여기서  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$ 는 더 나쁜 상태로 전이되기 전까지 상태  $i$ 에서 머무르는 지수시간의 파라미터이다.  $\lambda_{ij}, 1 \leq i < j \leq m$ 는 상태  $i$ 에 있는 제품이 상태  $j$ 로 퇴화되는 비율을 나타내고,  $T^0(i) = \lambda_i - \sum_{j=i+1}^m \lambda_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$ 는 상태  $i$ 에 있는 제품의 발생 가능한 고장률을 나타낸다. 상태  $i$ 에서 고장난 제품이 최소수리 되었다면 고장난 제품은 상태  $i$ 의 운용조건으로 회복된다. 그러나 새로운 제품으로 교체되었다면 초기 확률벡터  $\alpha$ 에 의해 상태가 결정될 것이다.

- ③ 제품이 나쁜 운용 상태에서 고장날수록 최소수리비용은 증가하며, 제품 수리비용은 교체비용보다 적게 든다.
- ④ 교체 혹은 최소수리를 수행하는 시간은 무시될 수 있다.

제품의 상태변화를 기술하는 확률적 과정은 수리·교체 내력 및 현재 상태로써 결정된다. 수리·교체 내력은 총 보증서비스비용을 결정할 수 있는 필요정보를 제공하고 현재 상태는 잔여 보증서비스 비용을 예측할 수 있게 한다. 수리·교체 내력은 다음과 같은 매크로상태로 정의된다.

$$(i : s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}); i = 0, 1, \dots, 0 \leq s_{ij} \leq i$$

여기서,  $s_{ij}$ 는 단계  $j, 1 \leq j \leq m$ 에서 이루어진 수리 및 교체 횟수를,  $i$ 는 수리 및 교체의 총 횟수를 나타낸다. 즉  $i = \sum_{j=1}^m s_{ij}$ 이다. 주어진  $i$ 에 대하여,  $s_{ij}$ 의 가능한 조합의 수  $n_i$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$n_i = \binom{i+m-1}{m-1}, i = 0, 1, \dots$$

### 3. 정적전략

먼저 분석을 위하여 다음 사항들을 가정한다.

- ① 제품수명은  $m$ 개의 운용상태를 갖는 PH 분포를 가지며,  $(\alpha, T_m)$ 으로 표현된다.
- ② 고장난 제품의 상태는 보증서비스 시점에서 검사에 의해 결정되어지며, 고장난 제품의 직전 상태가  $1 \sim r$ 이면 수리를  $r+1 \sim m$ 이면 교체를 실시한다.

$i$ 를 수준(level)이라 하면, 각 수준에서는  $n_i$ 개의 서로 다른 매크로상태가 존재한다. 각 매크로상태에서는 제품수명 분포의  $m$ 개 단계에 대응되는  $m$ 개의 개별상태 또는 마이크로상태가 존재하게 되며, 제품의 매크로상태 변화는 상태공간이  $\{(i : s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}) : i = 0, 1, \dots, 0 \leq s_{ij} \leq i\}$ 인 CTMC로 표현될 수 있다. <Figure 1>은  $m = 3$ 이고 상태 1 및 2가 수리상태, 상태 3이 교체상태일 경우( $r = 2$ )의 CTMC에 대한 전이율

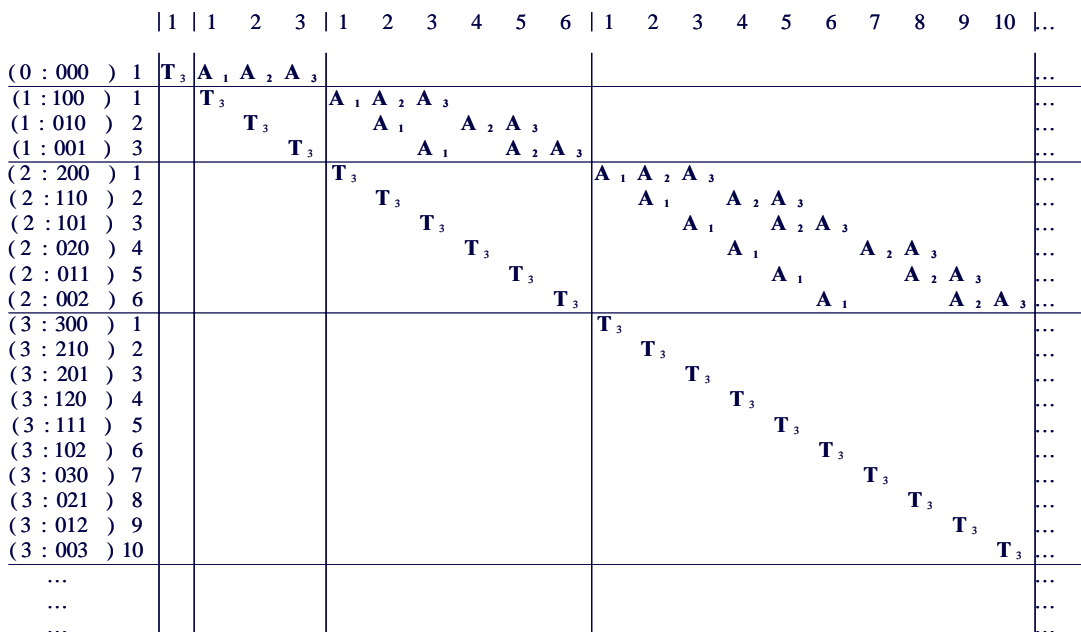


Figure 1. Infinitesimal generator  $S(3)$ .

행렬  $S(m)$ 을 보여준다. 수준  $i$ 에서의  $n_i$ 개 매크로상태가 사전편집식(lexicographic) 순서로 배열되어 있고, 각 매크로상태에 대하여 마이크로상태는 수명분포의 단계순으로 배열된다.  $m \times m$  행렬  $A_1, A_2, A_3$ 는 아래와 같이 주어지며,  $T^0(j)$ 와  $\alpha(j)$ 는 벡터  $\mathbf{T}^0$ 와  $\alpha$ 의  $j$ 번째( $j = 1, \dots, m$ ) 요소를 나타낸다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} T^0(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T^0(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ T^0(3)\alpha(1) & T^0(3)\alpha(2) & T^0(3)\alpha(3) \end{bmatrix}$$

수리·교체 상태분류가 달라질 때 행렬의 수정은 간단하게 이루어진다. 예를 들어, 상태 2가 수리상태에서 교체상태로 분류되면( $r = 1$ ), 행렬  $A_2$ 는 다음과 같이 수정된다.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T^0(2)\alpha(1) & T^0(2)\alpha(2) & T^0(2)\alpha(3) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\pi(t)$ 를  $t$ 시간에서 시스템의 상태를 나타내는 확률벡터라 하자. 벡터  $\pi(t)$ 는 서브벡터  $\pi_i(t)$ 로 구분되고 각  $\pi_i(t)$ 는  $\pi_{ik}(t)$ 들로 세분된다( $i = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, n_i$ ). 각 서브벡터  $\pi_{ik}(t)$ 는 수명분포의 단계에 따라  $m$ 차원을 갖는다. 보증기간  $W$ 동안의 기대 총 보증서비스 비용을 계산하기 위해  $\pi(W)$ 가 필요하게 된다.  $\pi(W)$ 는 다음 식에 의해 계산되며, 여기서  $\pi(0)$ 는  $[\alpha, 0, 0, \dots]$ 에 의해 주어지는 초기 확률벡터이다.

$$\pi(W) = \pi(0)e^{S(m)W} \tag{2}$$

단계  $j$ 에서 고장난 제품을 최소 수리하는 데 소요되는 비용을  $c_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), 고장난 제품을 새 제품으로 교체하는 비용을  $c_0$ 라고 하면, 보증기간  $W$ 동안 총 보증서비스 비용의 기대값,  $TC(W)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$TC(W) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s_{i1}=0}^i \sum_{s_{i2}=0}^{i-s_{i1}} \dots \sum_{s_{im}=0}^{i-s_{i1}-s_{i2}-\dots-s_{im-1}} \left[ \sum_{j=1}^r s_{ij}c_j + \sum_{j=r+1}^m s_{ij} \right] \cdot \pi(i : s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}; W) \tag{3}$$

여기서,  $\pi(i : s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}; W)$ 는 시간  $W$ 에서 매크로상태  $(i : s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im})$ 에 있을 확률이다.

### 3.1 계산 과정

식 (2)에서 지수행렬  $e^{S(m)W}$ 을 계산하기 위해서 균일화기법(uniformization)을 채택한다. 이는 수리적 안정성, 오차 제어 및 실행의 용이성 때문에 마코프체인의 시간종속분석에 많이 사용되는 방법이다(Gross and Miller, 1984; Melamed and Yadin, 1984; Stewart, 1994). 균일화기법은 발생률  $\tau$ 를 갖는 포아송과정에 종속되는 이산시간 마코프체인으로 수행된다.  $\tau$ 는 전이율행렬  $S(m)$ 의 음의 대각요소 중 최대 절대값 이상의 일정한 값으로서 여기서는 최대 절대값을 사용한다. 그러면  $\pi(W)$ 는 다음과 같이 계산되어진다.

$$\pi(W) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\tau W)(-\tau W)^n}{n!} \pi(0)\mathbf{P}^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi(n) \tag{4}$$

여기서,  $\mathbf{P} = (1/\tau)S(m) + \mathbf{I}$ 는 전이확률 행렬이고  $a_n = \exp(-\tau W)(\tau W)^n/n!$ 은  $n$ 번 포아송전이가 발생할 확률이며,  $\phi(n) = \pi(0)\mathbf{P}^n$ 은  $n$ 번 포아송전이 후의 확률벡터이다. 균일화기법을 실행하기 위하여 식 (4)에서의 무한급수(infinite series)와 전이율행렬  $S(m)$ 의 무한 상태공간이 적절한 수준에서 절단되어야 한다. 식 (4)에서 무한급수를  $N$ 번째 항에서 절단하였다고 하자. 만약  $N$ 이 다음과 같이 결정되면 무한급수에 대한 절단오차는  $\epsilon_1$ 에 의해 제한된다(Stewart, 1994).

$$\sum_{n=0}^N \frac{\exp(-\tau W)(-\tau W)^n}{n!} \geq 1 - \epsilon_1$$

무한 전이율행렬  $S(m)$ 의 절단은  $\pi(W)$ 에서 절단에 의한 손실이 미리 설정된 확률값  $\epsilon_2$ 보다 작게 되도록 한다. 수준  $L$ 의 범위를 넘는 매크로상태로의 전이를 무시하여  $L$ 의 범위를 넘는 매크로상태를 제거하는 것이다. 이는 교체 및 수리횟수가  $L$ 을 초과할 확률이 무시될 수 있을 정도로 작기 때문에 교체 및 수리의 총 횟수를  $L$ 까지로 제한함을 의미한다. Gross and Miller(1984)는 절단된 모든 상태들을 단일 흡수상태로 단일화(collapsing)시키는 개념을 제안하였다. 더구나 시스템이 흡수상태에 있을 최종 확률은 무한상태공간에 대한 절단의 오차한계를 산출하여 준다.  $\epsilon_1$ 과  $\epsilon_2$ 는 무한급수 및 무한상태공간의 절단에 의해 도입된 독립적인 오차한계를 제공한다. 통합 오차  $\epsilon$ 에 대한 한계는  $\epsilon_1 + \epsilon_2$ 가 됨을 다음 보조정리를 통해 알 수 있다.

**[보조정리]** 통합오차  $\epsilon$ 에 대한 한계는  $\epsilon_1 + \epsilon_2$ 이다.

**[증명]** 무한행렬  $S(m)$ 을 절단하여 얻어진  $\phi(n)$ 의 유한근사값을  $\phi^*(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ 이라 하면,  $\theta(n) = \phi(n) - \phi^*(n)$ 은 오류(error)벡터가 된다. 무한벡터  $\pi(W)$ 에 대한 근사값으로 차원  $m \sum_{i=0}^L n_i = m \binom{L+m}{m}$ 을 갖는 유한벡터를

$\pi^*(W)$ 라고 하자.

$$\begin{aligned} \|\pi(W) - \pi^*(W)\|_\infty &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n)a_n - \sum_{n=0}^N \phi^*(n)a_n \right\|_\infty \\ &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n)a_n - \sum_{n=0}^N \phi(n)a_n + \sum_{n=0}^N \theta(n)a_n \right\|_\infty \\ &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \phi(n)a_n + \sum_{n=0}^N \theta(n)a_n \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \phi(n)a_n \right\|_\infty + \left\| \sum_{n=0}^N \theta(n)a_n \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^N \varepsilon_2 a_n \\ &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

오차한계  $\epsilon$ 을 보증하기 위해서는 근사적으로  $\epsilon/2$ 가 되는  $\epsilon_1$ 과  $\epsilon_2$ 가 선택되어야 한다. 무한행렬  $S(m)$ 이 상부 삼각형행렬 구조를 가지므로  $\phi(n) = \phi^*(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ 이 된다. 따라서 실제 오차는  $\epsilon$ 보다 낮을 가능성이 많다. 일반적으로 실제 계산이 이루어지기 전에  $\pi(W)$ 에서의 손실을 미리 설정된 확률값  $\epsilon_2$ 에 제한시켜주는 수준  $L$ 을 결정하는 일은 쉽지 않다. 그러나 각 수준  $i$ 에서 모든  $n_i$ 개 매크로상태를 하나의 통합된 상태로 총괄시킴으로써,  $\epsilon_2$ 를 엄격하게 보장하는  $L$ 을 미리 결정할 수 있다. 통합된 결과과정(resulting process)은 특성 행렬  $D_0 = T_m$ 와  $D_1 = A_1 + A_2 + \dots + A_m$ 을 갖는 MAP가 됨을 알 수 있다. 따라서 원래의 전이율행렬  $S(m)$ 은 <Figure 2>에서와 같이  $\tilde{S}(m)$ 으로 간결화된다. 만약 수준  $L$ 에서 절단되었다면, 상태공간은  $m \sum_{i=0}^L \binom{i+m-1}{m-1} = m \binom{L+m}{m}$ 에서  $m(L+1)$ 로 감소하게 된다.  $\tilde{\pi}(W)$ 를 시간  $W$ 에서 전이율행렬  $\tilde{S}(m)$ 에 대한 확률벡터라고 하면,  $\tilde{S}(m)$ 의 상태공간의 규모가 상당히 간결화 되었기 때문에  $L$ 을 결정하기 위해 요구되는 계산량은 많지 않을 것이다.  $\tilde{\pi}(W)$ 를 통해 근사적으로  $\pi(W)$ 의 계산에서 요구되는 정도  $\epsilon_2$ 를 만족시켜주는  $L$ 을 결정할 수 있다.  $L$ 이

|     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |           |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
|     | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | ...       |
| 0   | $D_0$ | $D_1$ |       |       |       |       |       |       |       | ...       |
| 1   |       | $D_0$ | $D_1$ |       |       |       |       |       |       | ...       |
| 2   |       |       | $D_0$ | $D_1$ |       |       |       |       |       | ...       |
| 3   |       |       |       | $D_0$ | $D_1$ |       |       |       |       | ...       |
| 4   |       |       |       |       | $D_0$ | $D_1$ |       |       |       | ...       |
| 5   |       |       |       |       |       | $D_0$ | $D_1$ |       |       | ...       |
| 6   |       |       |       |       |       |       | $D_0$ | $D_1$ |       | ...       |
| 7   |       |       |       |       |       |       |       | $D_0$ | $D_1$ | ...       |
| 8   |       |       |       |       |       |       |       |       | $D_0$ | $D_1$ ... |
| ... |       |       |       |       |       |       |       |       |       | ...       |
| ... |       |       |       |       |       |       |       |       |       | ...       |

Figure 2. Condensed infinitesimal generator  $\tilde{S}(3)$ .

수리 및 교체의 총 횟수에 대한 최대값이므로 그렇게 큰 값은 아닐 것이다.

### 3.2 수치 예제

본 연구에서 개발된 알고리즘의 실행을 예시하기 위해  $m = 5$ 인 PH 수명분포를 사용한다. 오차한계  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-2}$ 으로 하여 MATLAB Ver. 7.0으로 수치실험을 수행하였으며,  $\alpha = [0.975, 0.015, 0.008, 0.002, 0.000]$ , 행렬  $T_5$ 는 다음과 같이 설정하였다.

$$T_5 = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.9863 & 0.6548 & 0.2991 & 0 \\ 0 & -3.0 & 1.4519 & 0.9688 & 0.4661 \\ 0 & 0 & -4.0 & 1.9022 & 1.2834 \\ 0 & 0 & 0 & -5.0 & 2.4271 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6.0 \end{bmatrix}$$

PH 수명분포의 파라미터 값은 상태가 퇴화될수록 고장률이 증가하도록 결정하였고, 새로운 제품의 고장시간의 기대값이 1년이 되도록 조정하였다. 새 제품은 벡터  $\alpha$  로써 5가지 상태 중 한 상태에서 시작하며, 고장났을 때 검사에 의해 고장 직전의 상태가 결정된다. 교체가 이루어지면 그 제품은 벡터  $\alpha$  로써 재시작하고, 수리가 이루어지면 고장 직전의 상태  $j$ 로 되돌려져 벡터  $\alpha_j$ 로써 재시작한다. 여기서  $\alpha_j$ 는 고장 직전의 상태  $j$  번째 요소만 1을 가지고 나머지는 0인  $m$ 차원 벡터이다. 보증이 시작될 때의 제품조건(IC: initial condition)에 따른 평균고장시간이 <Table 1>에 나타나 있다. 새 제품(IC=0)이 벡터  $\alpha$ 에 표시된 대로 상태 2, 3, 4에서 아주 일부가 시작될 수 있어, 상태 1에서 시작했을 때의 평균고장시간보다 더 작음을 알 수 있다.

5개( $m = 5$ )의 운영상태를 갖는 PH 분포에서 수리·교체를 위한 6가지 가능한 선택이 <Table 2>에 나타나 있다. 선택 0(5)은 고장난 제품에 대해 항상 교체[수리](always replace[repair])만을 수행한다. 나머지 선택들에서는 수리 또는 교체상태로 구분되며 선택들은 변수  $r$ ,  $0 \leq r \leq m$ 으로써 식별된다. 고장 발생 시, 각 상태로 회복시켜주는 수리비용  $c_1, c_2, c_3, c_4$  및  $c_5$ 는 각각 \$10, \$20, \$30, \$40 및 \$50으로 주어진다. <Table 3~5>는 교체비용  $c_0$ 가 \$50, \$100 및 \$200일 때의 기대 보증비용을 정리한 것이며, 각각의 보증기간에서 기대 보증비용을 최소화하는 선택이 회색으로 표시되어 있다.

예를 들어, 수리비용이 \$100일 경우(<Table 4> 참조)  $W \leq 0.5$ 일 때에는 선택 5,  $0.5 \leq W \leq 1.0$ 일 때에는 선택 4가 최적이다. 사용된  $c_j$  및  $c_0$ 의 값에 따라 달라지지만 예측된 대로 교체보다 수리를 수행하는 것이 더 경제적이고 특히 보증기간이 짧을 때는 항상 수리선택( $r = 5$ )이 최적임을 알 수 있다. 보증기간이 길어지면 특정한 퇴화상태에서는 고장난 제품을 교체하는 전략이 더 선호된다. 교체비용이 수리비용에 비해 상대적으로 증가하면 최적 선택은

선택 5쪽으로 움직인다.

**Table 1.** Mean time to failure based on the initial condition of the item

| Initial condition    | 0     | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|----------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Mean time to failure | 1.000 | 1.0113 | 0.6615 | 0.4371 | 0.2809 | 0.1667 |

**Table 2.** Repair/replacement options

| Option r | Repair states | Replacement states |
|----------|---------------|--------------------|
| Option 0 | -             | 1, 2, 3, 4, 5      |
| Option 1 | 1             | 2, 3, 4, 5         |
| Option 2 | 1, 2          | 3, 4, 5            |
| Option 3 | 1, 2, 3       | 4, 5               |
| Option 4 | 1, 2, 3, 4    | 5                  |
| Option 5 | 1, 2, 3, 4, 5 | -                  |

**Table 3.** Expected cost of warranty ( $c_0 = 50$ )

| W    | r = 0  | r = 1  | r = 2  | r = 3  | r = 4  | r = 5  |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.10 | 0.706  | 0.497  | 0.480  | 0.428  | 0.397  | 0.401  |
| 0.25 | 3.482  | 3.015  | 2.942  | 2.726  | 2.636  | 2.786  |
| 0.50 | 11.963 | 11.154 | 10.968 | 10.468 | 10.227 | 13.115 |
| 0.75 | 22.609 | 21.538 | 21.248 | 20.430 | 22.479 | 36.004 |
| 1.00 | 33.448 | 32.185 | 32.518 | 31.792 | 37.000 | 70.585 |

**Table 4.** Expected cost of warranty ( $c_0 = 100$ )

| W    | r = 0  | r = 1  | r = 2  | r = 3  | r = 4  | r = 5  |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.10 | 1.413  | 0.942  | 0.896  | 0.709  | 0.478  | 0.401  |
| 0.25 | 6.965  | 5.914  | 5.716  | 4.880  | 3.672  | 2.786  |
| 0.50 | 23.925 | 22.107 | 21.595 | 19.415 | 15.606 | 13.115 |
| 0.75 | 45.218 | 42.809 | 42.002 | 38.444 | 34.917 | 36.004 |
| 1.00 | 66.896 | 64.054 | 62.969 | 61.310 | 57.938 | 70.585 |

**Table 5.** Expected cost of warranty ( $c_0 = 200$ )

| W    | r = 0   | r = 1   | r = 2   | r = 3   | r = 4  | r = 5  |
|------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|
| 0.10 | 2.825   | 1.831   | 1.728   | 1.271   | 0.639  | 0.401  |
| 0.25 | 13.930  | 11.711  | 11.264  | 9.189   | 5.742  | 2.786  |
| 0.50 | 47.850  | 44.013  | 42.848  | 37.311  | 26.366 | 13.115 |
| 0.75 | 90.437  | 85.350  | 83.509  | 74.473  | 59.793 | 36.004 |
| 1.00 | 133.792 | 127.793 | 125.324 | 118.894 | 99.812 | 70.585 |

### 4. 동적 전략

앞 절에서 언급된 수리·교체 전략은 선택  $r$ 이 미리 설정되어

보증기간동안 변하지 않으므로 정적 전략으로 볼 수 있다 그러나 실제로는 보증서비스 시점에서 제품의 상태뿐만 아니라 잔여 보증기간을 고려한 다음과 같은 동적 전략이 더 효율적 일 것이다. 시점  $t$ 의 제품상태  $j(j = 1, 2, \dots, m)$ 에서 고장이 발생했을 때 다음 조건을 만족하면 교체를 수행하고, 아닐 경우에는 수리를 수행하는 것이다.

$$TC_j(W-t) + c_j > TC(W-t) + c_0 \quad (5)$$

여기서  $TC_j(t)$ 는 제품이 시점 0에서 상태  $j$ 로 시작했을 때  $(0, t)$ 동안의 기대 총 보증비용이다  $P\{TC_j(W-t) + c_j > TC(W-t) + c_0\}$ 에 대한 표현식이나 알고리즘적 해를 얻기는 불가능하지만, 정적 전략을 위한 알고리즘적 접근방식을 활용하여 근사적으로 동적 전략을 구현할 수 있다

잔여 보증을 초기 확률벡터  $\alpha$ 와  $\alpha_j$ 를 갖는 보증기간  $W-t$  동안의 새 보증으로 취급하여  $TC(W-t)$ 와  $TC_j(W-t)$ 가 구해질 수 있다. 그러나 사용된 선택  $r$ 이 특정화되어야 된다.  $c_0 = 50, 100, 200$ 인 경우에 대한 모든 선택들의 잔여 보증에 대한 기대 보증( $r = 3$ )비용을 구한 결과가 <Table 6-8>에 제공되어 있다. 만일 선택 3을 사용하고 교체비용  $c_0 = 50$ 일 경우(<Table 6> 참조), 교체비용이 수리비용에 비해 상대적으로 작기 때문에 잔여 보증기간  $W-t = 0.25, 0.50$  및  $0.75$ 일 경우 모두 교체를 수행하는 것이 경제적인임을 알 수 있다.

예를 들면, 잔여 보증기간  $W-t = 0.25$ 일 때, 교체 수행 시에 발생하는 기대 보증비용은  $\$52.726(50+2.726)$ 이고, 수리 수행 시에 발생하는 기대보증비용은  $\$64.773(40+24.773)$ 으로서 교체하는 것이 보다 경제적이다.<Table 7>은  $c_0 = 100$ , <Table 8>은  $c_0 = 200$ 일 경우의 결과를 나타낸 것으로 이 경우에는 교체비용이 상대적으로 크기 때문에  $r = 3$ 에서  $W-t = 0.25$ 일 때는 수리를 수행하는 것이,  $W-t = 0.50$  및  $0.75$ 일 경우에는 교체해주는 것이 보다 경제적인임을 알 수 있다. 이와 같이 동적 전략에서는 잔여 보증기간에 따라 수리 및 교체 의사결정이 이루어지게 된다. 정리해 보면 선택 3( $r = 3$ )을 사용하고  $W = 1.0$ ,  $c_0 = 100$ 인 경우 단계 4에서 운영되고 있는 제품에 고장이 발생했다면, 정적 전략은 잔여 보증기간에 무관하게 교체를 할 것이다. 그러나 동적 전략의 경우에서는 잔여 보증

**Table 6.** Expected cost of warranty during ( $W-t$ ) for  $c_0 = 50$

|         | $W-t = 0.25$   |               | $W-t = 0.50$   |               | $W-t = 0.75$   |               |
|---------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
|         | Replace (\$50) | Repair (\$40) | Replace (\$50) | Repair (\$40) | Replace (\$50) | Repair (\$40) |
| $r = 0$ | 3.482          | 26.261        | 11.963         | 58.624        | 22.609         | 82.381        |
| $r = 1$ | 3.015          | 25.868        | 11.154         | 57.905        | 21.538         | 81.882        |
| $r = 2$ | 2.942          | 25.019        | 10.968         | 57.116        | 21.248         | 80.067        |
| $r = 3$ | 2.726          | 24.773        | 10.468         | 56.491        | 20.430         | 78.771        |
| $r = 4$ | 2.636          | 24.152        | 10.227         | 55.967        | 22.479         | 79.493        |
| $r = 5$ | 2.786          | 39.872        | 13.115         | 153.847       | 36.004         | 297.404       |

**Table 7.** Expected cost of warranty during ( $W-t$ ) for  $c_0 = 100$

|         | $W-t = 0.25$    |               | $W-t = 0.50$    |               | $W-t = 0.75$    |               |
|---------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|
|         | Replace (\$100) | Repair (\$40) | Replace (\$100) | Repair (\$40) | Replace (\$100) | Repair (\$40) |
| $r = 0$ | 6.965           | 52.374        | 23.925          | 117.216       | 45.218          | 164.581       |
| $r = 1$ | 5.914           | 51.855        | 22.107          | 115.388       | 42.809          | 160.848       |
| $r = 2$ | 5.716           | 51.216        | 21.595          | 114.633       | 42.002          | 159.773       |
| $r = 3$ | 4.880           | 49.884        | 19.415          | 112.619       | 38.444          | 156.119       |
| $r = 4$ | 3.672           | 49.197        | 15.606          | 113.891       | 34.917          | 160.318       |
| $r = 5$ | 2.786           | 39.872        | 13.115          | 153.847       | 36.004          | 297.404       |

**Table 8.** Expected cost of warranty during ( $W-t$ ) for  $c_0 = 200$

|         | $W-t = 0.25$    |               | $W-t = 0.50$    |               | $W-t = 0.75$    |               |
|---------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|
|         | Replace (\$200) | Repair (\$40) | Replace (\$200) | Repair (\$40) | Replace (\$200) | Repair (\$40) |
| $r = 0$ | 13.930          | 104.481       | 47.850          | 234.448       | 90.437          | 329.171       |
| $r = 1$ | 11.711          | 103.519       | 44.013          | 230.706       | 85.350          | 321.661       |
| $r = 2$ | 11.264          | 102.408       | 42.848          | 229.219       | 83.509          | 319.612       |
| $r = 3$ | 9.189           | 99.610        | 37.311          | 225.381       | 74.473          | 312.308       |
| $r = 4$ | 5.742           | 98.308        | 26.366          | 228.013       | 59.793          | 320.640       |
| $r = 5$ | 2.786           | 39.872        | 13.115          | 153.847       | 36.004          | 297.404       |

기간에 따라  $W-t = 0.25$ 일 때는 수리를 수행하고 0.50 및 0.75일 때는 교체를 수행하는 것이 최적임을 알 수 있다.  $c_0 = 200$ 일 경우의 결과로써 선택 5( $r = 5$ )가 추천되지만, 실제로는 최소 보증비용을 결정하는 것 외에는 사용되지 않는다. 각 경우에 대한 최적 선택을 <Table 6~8>에서 회색으로 표시하였다.

동적 전략은 각 선택에 대하여 식 (5)에서 요구되는 값들을 쉽게 생성시키는 그래프를 개발하여 구현될 수 있다 <Figure 3>은  $c_0 = 100$ , 선택 3( $r = 3$ )일 때 보증기간에 대한 보증비용

을 그래프로 나타낸 것이다. <Table 7>에서  $r = 3$ 일 때의 값들이 <Figure 3>에서  $x$ 축 값 0.25, 0.50 및 0.75일 때의 IC=0(교체) 및 IC=4(수리) 곡선의  $y$ 축 값임을 알 수 있다.

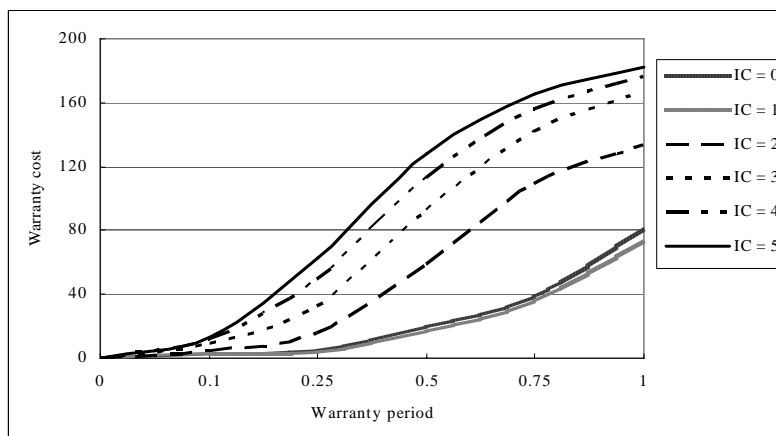
### 5. 결론

본 연구에서는 PH 수명분포를 갖는 보증제품에 대한 수리·교체 전략을 알고리즘적 접근법에서 연구하였다. 수리·교체 내력에 대한 정보를 유지시키는 매크로상태를 정의하였으며, 매크로상태 변화를 연속시간 마코프체인으로 기술하였다. 또한 보증기간 동안의 기대 총 보증서비스 비용을 계산하고, 정적 전략과 동적 전략을 고려하여 수리·교체 의사결정에 반영하였다.

알고리즘적 접근법은 기본 모형의 변형들을 통합할 수 있는 능력을 가지고 있다. 본 연구에서는 수리 시 최소 수리의 경우로만 한정하였는데, 보다 다양한 수리형태가 고려될 수 있을 것이다. 또한 무료보증정책이 아닌 다른 보증정책도 통합될 수 있을 것이다. 이러한 경우들의 PH 분포에의 적합문제도 추후과제가 될 것이다.

### 참고문헌

Gross, D. and Miller, D.R.(1984), The Randomization Technique as a Modeling Tool and Solution Procedure for Transient Markov Processes, *Operations Research*, **32**, 343- 361.  
 Iskandar, B.P. and Murthy, D.N.P.(2003), Repair-Replace Strategies for Two-Dimensional Warranty Policies, *Mathematical and Computer Modelling*, **38**, 1233-1241.  
 Iskandar, B.P., Murthy, D.N.P. and Jack, N.(2005), A New Repair-Replace Strategy for Items Sold with a Two-Dimensional Warranty, *Computers & Operations Research*, **32**, 669-682.  
 Jack, N. and Murthy, D.N.P.(2001), A Servicing Strategy for Items



**Figure 3.** Warranty cost curves for  $r = 3$  and  $c_0 = 100$ .

- Sold under Warranty, *Journal of the Operational Research Society*, **52**, 1284-1288.
- Jack, N. and Van der Duyn Schouten, F.(2000), Optimal Repair-Replace Strategies for a Warranted Product, *International Journal of Production Economics*, **67**, 95-100.
- Kim, H.G.(1997), The Optimal Warranty Servicing for Repairable Products with Phase-Type Lifetime Distributions, *Journal of Korean OR/MS Society*, **22**, 87-99.
- Lucantoni, D.M.(1994), New Results on the Single Server Queue with a Batch Markovian Arrival Process, *Stochastic Models*, **7**, 1-46.
- Melamed, B. and Yadin, M.(1984), The Randomization Procedure in the Computation of Cumulative Time Distributions over Discrete State Markov Processes, *Operations Research*, **32**, 929-943.
- Murthy, D.N.P., and Nguyen, D.G.(1988), An Optimal Repair Cost Limit Policy for Servicing Warranty, *Mathematical and Computer Modelling*, **11**, 595-599.
- Neuts, M.F.(1981), *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models-An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- Neuts, M.F.(1989), *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*, Marcel Dekker Inc., New York.
- Nguyen, D.G., and Murthy, D.N.P.(1986), An Optimal Policy for Servicing Warranty, *Journal of the Operational Research Society*, **37**, 1081-1088.
- Rao, B. M.(1995), Algorithms for the Free Replacement Warranty with Phase-Type Lifetime Distributions, *IIE Transactions*, **27**, 348-357.
- Stewart, W.J.(1994), *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Zuo, M.J., Liu, B. and Murthy, D.N.P.(2000), Replacement-Repair Policy for Multi-State Deteriorating Products under Warranty, *European Journal of Operational Research*, **123**, 519-530.