Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 31, No. 3, pp. 194-200, September 2005.

확률적 수요를 갖는 단일설비 다종제품의 동적 생산계획에 관한 연구

김 창 현†

여수대학교 공과대학 교통・물류시스템공학부

A Study on Dynamic Lot Sizing Problem with Random Demand

Chang Hyun Kim

Division of Transportation and Logistics Systems Engineering, Yosu National University, Yeosu, 550-749

A stochastic dynamic lot sizing problem for multi-item is suggested in the case that the distribution of the cumulative demand is known over finite planning horizons and all unsatisfied demand is fully backlogged. Each item is produced simultaneously at a variable ratio of input resources employed whenever setup is incurred. A dynamic programming algorithm is proposed to find the optimal production policy, which resembles the Wagner-Whitin algorithm for the deterministic case problem but with some additional feasibility constraints.

Keywords**:** inventory, dynamic lot sizing problem, random demand

1. 서 론

Wagner and Whitin(1958)의 전통적인 동적 생산계획 문제(Dynamic Lot Sizing Problem)는 이산형의 동일한 시간간격을 유한하게 갖는 계획 기간하에서 수요가 확정적인 경우에서의 모형을 다루었다. 이를 시초로 다양한 동적 생산계획 모형들(Baker *et al*.(1978), Florian and Klein(1971), Lambert and Luss (1982), Love (1973), Zangwill(1969))이 분석되어 왔으며, 이들은 생산-재고 시스템 연구분야에서 중요한 획을 그어 왔다. 하지만 위 모형들은 생산계획 기간하에서 동적 수요가 확정적으로 변하지 않는다는 전제하에서 생산시스템을 모형화하고 이를 분석하였다. 이에 따라, 새로운 주문에 의한 수요증가나 주문취소에 의한 수요감소 등으로 인하여 야기되는 수요예측 상에 변화가 생길 경우, 이미 결정된 생산정책은 더 이상 최적 의사결정이 되지 못한다. 더구나 실제 생산시스템에서 수요를 정확히 예측하는 것은 매우 어려운 일이며, 수요예측에 대한 오차가 수반되는 것이 일반적이다. 이러한 환경에서는 제품에 대한 수요는 확률적으로 해석하는 것이 타당하며 이러한 확률적 수요를 반영한 최적 의사결정이 필연적으로 요구된다.

본 논문에서는 단일설비로 다종제품을 생산하는 생산시스템에서의 생산계획 문제를 다루고자 한다. 이 문제에서 생산은 생산기간마다 다종제품을 동시에 생산하고 이때 각 제품의 생산량은 전체 투입자원량의 일정비율로 생산된다. 이러한 생산시스템의 예로는 원유 정제 시 휘발유, 경유, 중유 등의 제품이 일정비율로 생산되는 정유공장을 들 수 있다. 단일설비 다종제품의 동적 생산계획 문제는 Sung(1985)에 의해 처음으로 분석되었다. Sung(1985)은 추후 조달(Backorder)이 허용되는 경우와 허용되지 않는 경우 그리고 다종설비 문제로 확장한3가지 모형에 대한 최적해의 구조적 특성을 규명하고, 이러한 성질을 근간으로 최적해를 찾을 수 있는 동적 계획법을 제안하였다. Lee and Joo(2000)는 Sung(1985)의 논문을 생산준비비용의 절감효과를 고려하여 최적 생산계획과 최적 투자액을 동시에 결정할 수 있는 동적 생산계획 문제로 확장하였다. 또한, Lee *et al*.(2000)은 단일설비 다종제품의 동적 생산계획 문제에서 주어진 생산계획이 유지되는 생산준비비용의 안정범위에 대하여 연구하였다. 하지만 상기의 연구들은 확률적 수요를

본 연구는 여수대학교 2002년도 신진교수 학술연구과제지원비에 의하여 수행되었음.
† 연락저자 : 김창현 교수, 550-749 전남 여수시 둔덕동 산 96-1번지 여수대학교 공과대학 교통・물류시스템공학부, Fax : 061-659-3359,
E-mail : chkim@yosu.ac.kr
2005년 2월 접수; 2005년 5월 수정본 접수; 2005년 5월 게재 확정.

고려하지 않았다.

수요의 불확실성을 고려한 확률적인 동적 생산계획 모형에 관한 연구로서 단일제품에 대한 모형들을 살펴보면, Burstein *et al*.(1984)과 Nevison(1985)은 수요량은 알려져 있으나 수요의 발생시점이 불확실한 경우에서의 동적 생산계획 문제를 다루었다. Burstein *et al*.(1984)은 최적해의 성질을 규명하고 최적해를 찾기 위한 동적계획법(Dynamic Programming)을 제안한 반면 Nevison(1985)은 휴리스틱 알고리듬을 제시하였다. Silver(1978)는 평균수요량에 대해 Least-Period-Cost 휴리스틱 기법을 적용하여 첫 생산로트의 크기와 Order Horizon을 결정하는 방안을 제시하였다. Askin(1981)은 Silver(1978)에서 사용된 목적함수 대신에 Newsvendor 목적함수 하에서 Least-Period-Cost 휴리스틱 기법을 적용하여 Order Horizon을 결정하는 방안을 제시하였다. Bookbinder and Tan(1988)은 추후 조달된 수요에 부과되는 벌과비용(Penalty Cost) 대신에 서비스 수준에 대한 제약조건을 사용하여 동적 생산계획 문제를 분석하였다. Vargas(1995)는 추후 조달된 수요에 대한 벌과비용을 도입하여 비용모수가 시간에 관계없이 일정하다는 가정하에 동적 생산계획 문제를 분석하였다. Sox(1997)는 Vargas(1995)의 연구를 일반화하여 확률적인 수요를 갖고 매 기간마다 모든 비용모수들이 다를 경우의 동적 생산계획 문제를 다루었다. 그는 최적해의 성질을 규명하고 이 성질을 이용하여 최적해를 효과적으로 찾을 수 있는 확률적 동적 계획법을 제시하였다. Kim and Lee(2001)는 수요가 확률적으로 발생하고 매 기간마다 비용모수들이 변할 때, 각 제품별로 생산비율이 생산계획 전 기간 동안 일정하다는 가정하에서 단일설비 상에서의 다종제품에 대한 생산계획 문제를 다루었다.

본 연구에서는 생산-재고시스템을 위한 단일설비 상에서 확률적 수요를 갖는 다종제품을 생산할 때, 각 제품별 생산비율을 매 생산기간마다 결정하는 경우에서의 동적 생산계획 문제를 다루고자 한다. 이 문제에서는 언제 생산할 것인지에 대한 생산기간과 그 때의 총괄 생산량 및 제품별 생산비율을 결정하는 것이다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 수리모형을 위한 전제조건을 설명하고 모형에 대한 수식화를 다루며, 3장에서는 모형이 가지고 있는 특성과 이를 이용하여 효과적으로 해를 구할 수 있는 알고리듬을 제시하고, 4장에서는 수치예제를 통해 제안된 알고리듬의 적용절차를 설명한다. 최종 결론과 함께 향후 연구방향에 대하여는 5장에 기술한다.

2. 수리 모형

본 모형을 위한 주요 전제조건은 다음과 같다.

- 계획기간은 유한하다.
- 생산설비 상의 용량에는 제약이 없다.
- 매 생산기간마다 각 제품은 동시에 생산되며, 이때 각 제품들은 전체 투입자원에 대하여 다음 생산기간까지만 일정비율로 생산된다.
- 수요-공급계획 기간 동안 각 기간에서의 제품별 수요에 대한 확률적인 분포는 알려져 있다.
- 재고 부족으로 수요를 충족시키지 못하는 제품들은 모두 추후 조달을 통하여 수요를 만족시킨다.

모형 전개에 사용되는 수요의 특성치와 비용 관련 모수들을 나타내는 기호는 다음과 같다.

T = 계획기간의 길이
N = 다종제품의 수
t = 기간을 나타내는 첨자
i = 제품을 나타내는 첨자
x_t = 기간 t에서의 총괄 생산량
x_{ti} = 제품 i에 대한 기간 t에서의 생산량
X_t = 기간 t까지의 누적 총괄 생산량
X_{ti} = 제품 i에 대한 기간 t까지의 누적 생산량
$d_{ti}(w)$ = 기간 t에서의 제품 i에 대한 수요량
$D_{ti}(w)$ = 기간 t까지의 제품 i에 대한 누적 수요량
$I_{ti}(w)$ = 기간 t에서의 제품 i에 대한 기말 재고량
z_t = $x_t>0$ 이면 1, 아니면 0
α_{ti} = 기간 t에서의 제품 i에 대한 생산비율($\alpha_{ti} \ge 0$)
K_t = 기간 t에서의 생산 준비비용
h_i = 제품 i에 대한 재고비용
b_i = 제품 i에 대한 추후 조달비용
$f_{ti}(y)$ = D_{ti}의 확률 밀도함수
$F_{ti}(y)$ = D_{ti}의 누적 밀도함수
M = 충분히 큰 양수

상기의 기호를 이용하여 수리모형을 제시하면 모형(P)와 같다.

(P) $$v = Min \sum_{t=1}^{T} [K_t z_t + \sum_{i=1}^{N} h_i E[I_{ti}^{+}] + \sum_{i=1}^{N} b_i E[I_{ti}^{-}]] \quad (1)$$

s.t. $$I_{ti}(w) = I_{t-1,i}(w) + x_{ti} - d_{ti}(w), \text{ for all } t \text{ and } i \quad (2)$$

$$x_t = \sum_{i=1}^{N} x_{ti}, \text{ for all } t, \quad (3)$$

$$x_{ti} = \alpha_{ti} x_t, \text{ for all } t \text{ and } i, \quad (4)$$

$$x_t \le M z_t, \text{ for all } t, \quad (5)$$

$$x_{ti} \ge 0, \textit{ for all t and i}, \quad (6)$$

$$z_t \in \{0, 1\}, \text{ for all } t. \quad (7)$$

여기에서 $E[I_{ti}^{+}] = E[max\{I_{ti}(w), 0\}]$이며 $E[I_{ti}^{-}] = E[max\{-I_{ti}(w), 0\}]$이다.

기간 t에서의 제품 i에 대한 재고 균형식은 식 (2)와 같이 표현되며, 식 (4)는 각 제품은 총괄 생산량에 대하여 일정비율로

생산됨을 나타낸다. 식 (3), (4), (5), (6)을 누적 생산량으로 표현하면 식 (8)~식 (11)처럼 표현된다.

$$X_t = \sum_{i=1}^{N} X_{ti}, \text{ for all } t, \tag{8}$$

$$X_{ti} = X_{t-1,i} + \alpha_{ti}(X_t - X_{t-1}), \text{ for all } t \text{ and } i, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{N}(X_{ti} - X_{t-1,i}) \le Mz_t, \text{ for all } t, \tag{10}$$

$$X_{t-1,i} \le X_{ti}, \text{ for all } t \text{ and } i. \tag{11}$$

일반성의 상실 없이 제품 i의 기초 재고를 0이라고 가정하면 식 (2)는 다음과 같이 표현된다.

$$I_{ti}(w) = I_{0i} + \sum_{j=1}^{t} x_{ji} - D_{ti}(w) = X_{ti} - D_{ti}(w),$$
$$\text{for all } t \text{ and } i. \tag{12}$$

재고 부족으로 수요를 충족시키지 못하는 제품들은 모두 추후 조달을 통하여 수요를 만족시키므로 기간 t말에서 제품 i에 의하여 발생되는 재고비용과 추후 조달비용의 기댓값을 $L_{ti}(X_{ti})$라 두면, 제품 i의 기초 재고가 0인 가정하에서 즉, $X_{ti} \ge 0$에 대하여 $L_{ti}(X_{ti})$은 다음과 같이 표현된다.

$$L_{ti}(X_{ti}) = h_i \int_0^{X_{ti}} (X_{ti} - y) f_{ti}(y)dy + b_i \int_{X_{ti}}^{\infty} (y - X_{ti}) f_{ti}(y)dy. \tag{13}$$

누적 생산량 X_{ti}를 문제(P)에 대입하여 재고와 관계되는 변수를 제거하면 문제 (P)는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{(RP)} \quad v = Min \sum_{t=1}^{T}[K_t z_t + \sum_{i=1}^{N} L_{ti}(X_{ti})] \tag{14}$$

$$s.t. \quad X_t = \sum_{i=1}^{N} X_{ti}, \text{ for all } t, \tag{15}$$

$$X_{ti} = X_{t-1,i} + \alpha_{ti}(X_t - X_{t-1}), \text{ for all } t \text{ and } i, \tag{16}$$

$$X_t - X_{t-1} \le Mz_t, \text{ for all } t, \tag{17}$$

$$X_{t-1} \le X_t, \text{ for all } t, \tag{18}$$

$$z_t \in \{0, 1\}, \text{ for all } t. \tag{19}$$

식 (18)이 유지되는 한, 식 (16)으로부터 $X_{t-1,i} \le X_{ti}$은 항상 유지되므로 각 제품에 대한 제약조건 $X_{t-1,i} \le X_{ti}$의 준수 여부는 검사할 필요가 없다.

3. 모형 분석

매 생산기간마다 제품별 생산비율은 변한다. 기간 t 이전까지 $S(t)$번의 생산준비를 통한 생산기간이 있었다고 하고, 이들 생산기간을 $t_1, t_2, ..., t_{S(t)}$라 하며, $t_1, t_2, ..., t_{S(t)}$에서의 제품 i에 대한 생산비율을 $\alpha_{t_1 i}, \alpha_{t_2 i}, ..., \alpha_{t_{S(t)} i}$라 하자. 그러면, 기간 t_k에서 다음 생산기간 t_{k+1}까지의 제품 i에 대한 생산비율은 $\alpha_{t_k i} \ge 0$, $\alpha_{t_k+1,i} = \alpha_{t_k+2,i} = ... = \alpha_{t_{k+1}-1,i} = 0$이며, 그 때의 제품 i에 대한 누적 생산량은 $X_{t_k,i} = X_{t_k+1,i} = X_{t_k+2,i} = ... = X_{t_{k+1}-1,i}$이다. 기간 t까지 제품 i에 대한 누적 생산량은 $X_{ti} = \sum_{j=1}^{t} \alpha_{ji} x_j = \sum_{k=1}^{S(t)} \alpha_{t_k i} x_{t_k} + \alpha_{ti} x_t$이며 이는 식(20)과 같이 표현된다.

$$X_{ti} = \sum_{k=1}^{S(t)} \alpha_{t_k i}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \alpha_{ti}(X_t - X_{t_{S(t)}}), \ X_{t_0} = 0. \tag{20}$$

생산이 기간 s에서 일어나고 다음 생산은 기간 t+1에서 일어나며, 기간 s와 t 사이의 누적 총괄 생산량이 $X_s = X_{s+1} = ... = X_t = x$로 주어지며, 기간 s 이전의 과거 생산기간 $t_1, t_2, ...,$ $t_{S(s)}$에서의 제품별 생산비율과 누적 총괄 생산량을 알 경우 기간 s, s+1, ..., t 동안 발생되는 기대비용을 식 (21)과 같이 정의하자.

$$g_{st}(x \mid \alpha_{t_k i}, X_{t_k}; k = 1, 2, ..., S(s)) =$$
$$K_s + \sum_{j=s}^{t} \sum_{i=1}^{N} L_{ji}(\alpha_{si}(x - X_{t_{S(s)}})$$
$$+ \sum_{k=1}^{S(s)} \alpha_{t_k i}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})), \text{ for } 0 < s \le t. \tag{21}$$

식 (13)의 X_{ti}에 대한 2차 도함수는 비음(non-negative)의 값을 가지므로 $L_{ti}(X_{ti})$는 볼록함수이다. 따라서 $g_{st}(x)$ 또한 볼록함수이다. X_{st}를 $g_{st}'(x) = 0$을 만족하는 해라고 하면, $g_{st}(x)$가 볼록함수이므로 X_{st}는 $g_{st}(x)$를 최소화하며 유일하게 존재한다. $t_1, t_2, ..., t_{S(T)}$는 기간 T 이전의 $z_t = 1$인 생산기간이므로 문제 (RP)의 목적함수는 마지막 생산계획 기간 T에서의 생산 여부에 따라 다음과 같이 표현된다.

i) T가 생산기간이 아닌 경우

$$v = g_{t_1, t_2 - 1}(X_{t_1}^*) + \sum_{k=2}^{S(T)} g_{t_k, t_{k+1}-1}(X_{t_k}^* \mid \alpha_{t_m i}, X_{t_m}; m = 1, 2,$$
$$..., k-1), \tag{22a}$$

for $t_{S(T)+1} = T + 1, X_{t_k}^* = X_{t_k, t_{k+1}-1}$.

ii) T가 생산기간인 경우

$$v = g_{t_1, t_2 - 1}(X_{t_1}^*) + \sum_{k=2}^{S(T)} g_{t_k, t_{k+1}-1}(X_{t_k}^* \mid \alpha_{t_m i}, X_{t_m}; m = 1, 2,$$
$$..., k-1)$$
$$+ g_{T,T}(X_{T,T} \mid \alpha_{t_m i}, X_{t_m}; m = 1, 2, ..., S(T)), \tag{22b}$$

for $t_{S(T)+1} = T, X_{t_k}^* = X_{t_k, t_{k+1}-1}$.

문제 (RP)의 목적함수는 분리 가능한 함수 $g_{t_k, t_{k+1}-1}(X_{t_k}^* \mid \alpha_{t_m i}, X_{t_m}; m=1,2,...,k-1)$의 합으로 표현되므로 이 성질을 이용할 때 다음의 결과를 얻을 수 있다.

[정리 1] (X^*, z^*)를 문제 (RP)의 최적해라고 하자. $s \le t$인 임의의 기간 s와 t에 대하여 $z_s^* = z_{t+1}^* = 1$이고 $z_{s+1}^* = z_{s+2}^* = ... = z_t^* = 0$이면, $X_s^* = X_{s+1}^* = ... = X_t^* = X_{st}$이다.

<증명> [정리1]의 조건이 성립하면 기간 s와 t+1은 생산기간이며, $g_{st}(x)$는 목적식을 구성하는 항의 하나로서 분리된다. 또한, (X^*, z^*)가 문제(RP)의 최적해이므로 $X_{s-1}^* < X_s^* = X_{s+1}^* = ... = X_t^* < X_{t+1}^*$가 성립한다. 다음의 3가지 경우를 생각해 보자.

경우 1 : $X_{st} \le X_{s-1}^*$일 때

$X_{st} \le X_{s-1}^* < X_s^*$이며 g_{st}가 볼록함수이므로 X_s^*를 X_{s-1}^*로 감소시킴으로써 제약조건 $X_{s-1}^* < X_s^*$를 만족시키면서 g_{st}를 감소시킬 수 있다. 따라서, $X_{s-1}^* < X_s^*$는 최적해가 아니다.

경우 2 : $X_{s-1}^* < X_{st} < X_{t+1}^*$일 때

목적함수가 분리 가능하고 g_{st}가 볼록함수이므로 $X_s^* = X_{st}$이다.

경우 3 : $X_{t+1}^* \le X_{st}$일 때

$X_{st} \ge X_{t+1}^* > X_s^*$이고 g_{st}가 볼록함수이므로 X_s^*를 X_{t+1}^*로 증가시킴으로써 제약조건 $X_{t+1}^* > X_s^*$를 만족시키면서 g_{st}를 감소시킬 수 있다. 따라서, $X_{t+1}^* > X_s^*$는 최적해가 아니다. 그러므로, $X_s^* = X_{s+1}^* = ... = X_t^* = X_{st}$이다.

우리가 결정해야 할 결정변수는 기간 s에서의 생산비율 α_{si}와 누적 총괄 생산량 x이다. x가 주어졌을 때 비용함수를 최소화하는 제품별 생산비율 α_{si}^*는 식 (21)을 α_{si}에 대하여 미분한 식으로부터 구할 수 있다. 식 (21)을 α_{si}에 대하여 미분하면,

$$\partial g_{st}(x \mid \alpha_{t_k i}, X_{t_k}; k=1,2,...,S(s))/\partial \alpha_{si}$$
$$= (x - X_{t_{S(s)}}) \sum_{j=s}^{t} \{ h_i - (h_i + b_i) \int_{\alpha_{si}(x - X_{t_{S(s)}}) + \sum_{k=1}^{S(s)} \alpha_{t_k i}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})}^{\infty} f_{ji}(y) dy \}$$

for all i.

$\partial g_{st}(x \mid \alpha_{t_k i}, X_{t_k}; k=1,2,...,S(s))/\partial \alpha_{si} = 0$로 두고 이를 정리하면, 모든 i에 대하여

$$\sum_{j=s}^{t} F_{ji}(\alpha_{si}(x - X_{t_{S(s)}}) + \sum_{k=1}^{S(s)} \alpha_{t_k i}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})) = (t-s+1) b_i / (h_i + b_i) \tag{23}$$

식 (23)의 좌변은 범위 (0, t-s+1)에서 증가하므로 식 (23)을 만족하는 함수 $F_{ji}(\cdot)$의 인수는 $(0, \infty)$에서 유일하게 결정된다. 따라서 α_{si}도 유일하게 결정되며 비음(non-negative)임이 보장된다. 식 (15)와 식 (16)으로부터 모든 제품별 생산비율의 합은 1이 되어야 함을 알 수 있다. 다음 [정리 2]에서는 제품별 생산비율의 합이 항상 1이 되게 하는 제품별 생산비율을 구할 수 있음을 보여준다.

[정리 2] α_{si}^*가 식 (23)을 만족하지만 $\sum_{i=1}^{N} \alpha_{si}^* \ne 1$라고 하자. $\alpha_{si}' = \alpha_{si}^* / \sum_{i=1}^{N} \alpha_{si}^*$라 두면 α_{si}'는 식 (23)을 만족하면서 $\sum_{i=1}^{N} \alpha_{si}' = 1$이다.

<증명> 함수 $F_{ji}(\cdot)$의 인수를 $\alpha_{si}(x - u_1) + u_2$하자. 여기서 u_1과 u_2는 임의의 상수이다. 그러면 x값을 적절히 조정해 $F_{ji}(\alpha_{si}^*(x - u_1) + u_2) = F_{ji}(\alpha_{si}' \sum_{i=1}^{N} \alpha_{si}^*(x - u_1) + u_2)$이 성립하는 α_{si}', 즉 $\sum_{i=1}^{N} \alpha_{si}' = 1$을 만족하는 α_{si}'을 구할 수 있다.

α_{si}가 주어졌을 때 비용함수를 최소화하는 누적 총괄 생산량 x^*는 식 (21)을 x에 대하여 미분한 식으로부터 구할 수 있다. 식 (21)을 x에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\partial g_{st}(x \mid \alpha_{t_k i}, X_{t_k}; k=1,2,...,S(s))/\partial x$$
$$= \sum_{j=s}^{t} \sum_{i=1}^{N} \partial L_{ji}(\alpha_{si}(x - X_{t_{S(s)}}) + \sum_{k=1}^{S(s)} \alpha_{t_k i}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}))/\partial x$$
$$= \sum_{j=s}^{t} \sum_{i=1}^{N} \{ \alpha_{si} h_i + (h_i + b_i) \int_{\alpha_{si}(x - X_{t_{S(s)}}) + \sum_{k=1}^{S(s)} \alpha_{t_k i}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})}^{\infty} (-\alpha_{si}) f_{ji}(y) dy \}$$
$$= \sum_{j=s}^{t} \sum_{i=1}^{N} \{ \alpha_{si}(h_i + b_i) F_{ji}(\alpha_{si}(x - X_{t_{S(s)}}) + \sum_{k=1}^{S(s)} \alpha_{t_k i}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})) - \alpha_{si} b_i \}.$$

$\partial g_{st}(x \mid \alpha_{t_k i}, X_{t_k}; k=1,2,...,S(s))/\partial x = 0$으로 하여 이를 정리하면 다음 식과 같다.

$$\sum_{j=s}^{t} \sum_{i=1}^{N} \alpha_{si}(h_i + b_i) F_{ji}(\alpha_{si}(x - X_{t_{S(s)}}) + \sum_{k=1}^{S(s)} \alpha_{t_k i}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})) = \sum_{j=s}^{t} \sum_{i=1}^{N} \alpha_{si} b_i \tag{24}$$

또한, $\partial^2 g_{st}(x \mid \alpha_{t_k i}, X_{t_k}; k=1,2,...,S(s))/\partial x^2 > 0$임을 쉽게 보일 수 있으므로 식 (24)를 만족하는 x^*는 유일하다.

제품별 수요량에 대한 확률 밀도함수를 추정을 통하여 알 수 있다거나 이미 알려져 있다면, 식 (23)과 (24)를 만족하는 제품별 최적 생산비율 α_{si}^*와 최적 누적 총괄 생산량 x^*는 이분법(Bi-section method)과 같은 수치해석 기법을 이용하여 구할 수 있다.

[보조정리 1] $k < s \le t$인 임의의 기간 k, s와 t에 대하여 $X_{k,s-1} > X_{st}$이면, $z_k^* = z_s^* = z_{t+1}^* = 1$이고 $z_{k+1}^* = \ldots = z_{s-1}^* = z_{s+1}^* = \ldots = z_t^* = 0$인 문제 (RP)에 대한 최적해 (X^*, z^*)는 존재하지 않는다.

<증명> $k < s \le t$인 임의의 기간 k, s와 t에 대하여 $X_{k,s-1} > X_{st}$이고, $z_k^* = z_s^* = z_{t+1}^* = 1$이며, $z_{k+1}^* = \ldots = z_{s-1}^* = z_{s+1}^* = \ldots = z_t^* = 0$인 최적해 (X^*, z^*)가 존재한다고 하자. 그러면, [정리 1]에 의하여 $X_k^* = X_{k,s-1} > X_{st} = X_s^*$이므로 (X^*, z^*)는 문제 (RP)에서 제약식 (18)을 위배한다. 따라서 [보조정리 1]이 성립한다.

[정리 1, 2]와 [보조정리 1]을 이용하여 해를 구하는 알고리듬은 다음과 같다.

<u>알고리듬</u>

f_t를 기간 t까지 발생되는 최소 기대비용, f_{st}를 기간 t 이전의 마지막 생산이 기간 s에서 발생되고 다음 생산이 기간 t+1에서 이루어질 때의 비용이라고 하자.

$f_0 = 0.$
For t=1,..., T
  For s=1,..., t
    식 (23)을 이용하여 α_{si}^*을 계산한다.
    $\sum_{i=1}^{N} \alpha_{si}^* \ne 1$이면 $\sum_{i=1}^{N} \alpha_{si}^* = 1$이 되도록 α_{si}^*을 정규화한다.
    식 (24)와 식 (21)을 이용하여 X_{st}와 $g_{st}(X_{st})$을 계산한다.
    $f_{st} := f_{s-1} + g_{st}(X_{st})$.
    만약 $k < s$일 때 $X_{k,s-1} > X_{st}$이면, $f_{st} := \infty$.
  $f_t := min\{f_{st}\}$, for $1 \le s \le t$.
$t := T$
While $t > 1$
  $s := argmin\{f_{jt}\}$ for $j \le t$.
  $z_s := 1$.   /* 생산준비 기간 */
  For j=s+1,..., t, $z_j := 0$.
  For j=s+1,..., t
    For i=1,...., N, $\alpha_{ji} := 0$.
  For j=s,..., t, $X_j := X_{st}$. /* 기간 t까지의 누적 총괄 생산량*/
  $t := s-1$.
For t=1,..., T
  For i=1,...., N
    /* 제품별 누적 생산량 계산 */
    만약 $\alpha_{ti} = 0$이면, $X_{ti} := X_{t-1,i}$.
    아니면, $\alpha_{si} := \alpha_{ti}$, $X_{ti} := X_{t-1,i} + \alpha_{si}(X_t - X_{t-1})$.

4. 수치 예제

본 장에서는 수치 예제를 통하여 제안된 알고리듬의 적용절차를 설명하고자 한다. 기간 7 동안 3종류의 제품에 대한 생산계획으로서 제품별 평균수요와 관련 비용은 <Table 1>에 주어져 있다. 매 기간별 제품별 수요는 정규분포를 따른다고 가정하였고, 표준편차는 평균수요의 0.2배로 주어지는 것으로 하였다.

기간 t에서의 제품 i에 대한 수요의 평균과 분산을 m_{ti}와 σ_{ti}^2라 하고, 기간 t까지 제품 i에 대한 누적 수요량의 평균과 분산을 $E[D_{ti}]$와 $Var[D_{ti}]$라 하면, 기간별 제품별 수요가 정규분포를 따를 때 $E[D_{ti}]$와 $Var[D_{ti}]$은 다음과 같이 주어진다.

$$E[D_{ti}] = \sum_{j=1}^{t} m_{ji} \tag{25}$$

$$Var[D_{ti}] = \sum_{j=1}^{t} \sigma_{ji}^2 \tag{26}$$

<Table 2>에서 최적 생산정책을 살펴보면 기간 1에 403.87개를 제품별로 0.37, 0.27, 0.36씩 생산하고, 기간 3에 418.8개를 제품별로 0.68, 0.10, 0.22씩 생산하며, 기간 4에 529.83개를 제품별로 0.61, 0.16, 0.23씩 생산하고, 기간 6에 585.41개를 제품별로 0.55, 0.22, 0.23씩 생산하여 계획기간 동안 총1,937.91개

Table 1. Demand and cost data

Period	K_t	Item 1			Item 2			Item 3		
		Mean	h_1	b_1	Mean	h_2	b_2	Mean	h_3	b_3
1	50	110	0.1	0.1	50	0.2	1.5	70	0.3	2.1
2	50	150	0.1	0.1	45	0.2	1.5	65	0.3	2.1
3	45	170	0.1	0.1	35	0.2	1.5	75	0.3	2.1
4	45	230	0.1	0.1	40	0.2	1.5	70	0.3	2.1
5	50	200	0.1	0.1	50	0.2	1.5	60	0.3	2.1
6	45	160	0.1	0.1	60	0.2	1.5	65	0.3	2.1
7	50	130	0.1	0.1	65	0.2	1.5	70	0.3	2.1

를 기대비용 447.72로 생산한다. 이때, 제품별 누적 생산량은 제품 1은 1,079.39개(55.7%), 제품 2는 364.49개(18.8%), 제품 3은 494.03개(25.5%)로 집계된다.

5. 맺음말

본 연구에서는 생산-재고시스템을 위한 단일설비 상에서 확률적 수요를 갖는 다종제품을 생산할 때, 각 제품별 생산비율을 매 생산기간마다 결정하는 경우 생산준비 및 재고비용을 최소화하는 동적 생산계획 모형에 대하여 살펴보았다. 모형에 대한 수식화를 통하여 모형이 가지고 있는 특성을 살펴보았고, 이를 이용하여 효과적으로 해를 구할 수 있는 알고리듬을 제시하였다. 본 모형의 응용분야로는 각 제품이 전체 투입자원양의 일정비율로 생산되는 정유산업이나 폐기물 재생산업 등에 기초 모형으로 적용될 수 있을 것으로 사료된다.

추후 연구과제로서 본 모형이 갖는 주요 전제조건을 현실화하는 노력의 일환으로 본 모형과는 달리 생산용량에 제약이 있는 경우에서의 문제와 최적의 로트크기가 정수로 제시되어야 하는 경우에서의 동적 생산계획 문제를 고려할 수 있다.

참고문헌

Askin, R. G. (1981), A Procedure for Production Lot Sizing with Probabilistic Dynamic Demand, *AIIE Transactions*, **13**, 132-137.

Baker, K. R., Dixon, P., Magazine, M. J., and Silver, E. A. (1978), An Algorithm fot the Dynamic Lot-Size Problem With

Table 2. Computational results

t	s	$\overline{\alpha}$	X_{st}	g_{st}	$f_{s-1}+g_{st}$	f_t	Production Policy
1	1	(0.43,0.24,0.33)	259.48	62.04	62.04	62.04	(1)
2	1	(0.37,0.27,0.36)	403.87	115.63	115.63	115.63	(1,2)
2	2	(0.47,0.24,0.29)	502.67	68.96	131		(1),(2)
3	1	(0.42,0.23,0.35)	612.8	204.9	204.9		(1,2,3)
3	2	(0.49,0.19,0.32)	693.01	123.42	185.46		(1),(2,3)
3	3	(0.68,0.10,0.22)	822.67	66.14	181.77	181.77	(1,2),(3)
4	1	(0.42,0.22,0.36)	778.64	335.18	335.18		(1,2,3,4)
4	2	(0.50,0.18,0.32)	894.85	217.88	279.92		(1),(2,3,4)
4	3	(0.63,0.12,0.25)	1,016.48	127.6	243.23	243.23	(1,2),(3,4)
4	4	(0.66,0.12,0.22)	1,161.25	70.06	251.83		(1,2),(3),(4)
5	1	(0.44,0.22,0.34)	979.02	497.32	497.32		(1,2,3,4,5)
5	2	(0.50,0.19,0.31)	1,087.58	347.83	409.87		(1),(2,3,4,5)
5	3	(0.61,0.14,0.25)	1,231.31	219.09	334.72		(1,2),(3,4,5)
5	4	(0.61,0.16,0.23)	1,352.50	127.92	309.69	309.69	(1,2),(3),(4,5)
5	5	(0.70,0.13,0.17)	1,476.58	78.07	321.3		(1,2),(3,4),(5)
6	1	(0.44,0.23,0.33)	1,173.32	709.42	709.42		(1,2,3,4,5,6)
6	2	(0.51,0.20,0.29)	1,330.58	518.53	580.57		(1),(2,3,4,5,6)
6	3	(0.58,0.17,0.25)	1,439.59	352.76	468.39		(1,2),(3,4,5,6)
6	4	(0.57,0.19,0.24)	1,560.11	223.59	405.36		(1,2),(3),(4,5,6)
6	5	(0.62,0.18,0.20)	1,658.54	137.87	381.1	381.1	(1,2),(3,4),(5,6)
6	6	(0.63,0.17,0.20)	1,771.87	75.97	385.66		(1,2),(3),(4,5),(6)
7	1	(0.46,0.23,0.31)	1,433.14	962.47	962.47		(1,2,3,4,5,6,7)
7	2	(0.50,0.21,0.29)	1,540.64	732.33	794.37		(1),(2,3,4,5,6,7)
7	3	(0.56,0.18,0.26)	1,653.13	527.14	642.77		(1,2),(3,4,5,6,7)
7	4	(0.54,0.21,0.25)	1,747.51	358.95	541.72		(1,2),(3),(4,5,6,7)
7	5	(0.57,0.21,0.22)	1,857.28	236.06	479.29		(1,2),(3,4),(5,6,7)
7	6	(0.55,0.22,0.23)	1,937.91	138.03	447.72	447.72	(1,2),(3),(4,5),(6,7)
7	7	(0.56,0.21,0.23)	2,048.10	83.82	464.92		(1,2),(3,4),(5,6),(7)

Time-Varying Production Capacity Constraints, *Management Science*, **26**(16), 1710-1720.

Bookbinder, J. H. and Tan, J. Y. (1988), Strategies for the Probabilistic Lot-Sizing Problem with Service-Level Constraints, *Management Science*, **34**, 1096-1108.

Burstein, M. C., Nevision, C. H., and Carlson, R. C. (1984), Dynamic Lot-Sizing When Demand Timing Is Uncertain, *Operations Research*, **32**, 362-379.

Florian, M. and Klein, M. (1971), Deterministic Production Planning With Concave Costs and Capacity Constraints, *Management Science*, **18**(1), 12-20.

Kim, C. H. and Lee, W. S. (2001), A Single Facility Multi-Product Dynamic Lot Sizing Problem with Random Demand, *J. of the Korean Society of Maintenance Engineers*, **6**(2), 127-137.

Lambert, A. M., and Luss, H. (1982), Production Planning with Time-Dependent Capacity Bounds, *European Journal of Operations Research*, **9**(4), 275-280.

Lee, W. S., and Joo, C. M. (2000), Setup Cost Reduction in a Multi-Product Dynamic Lot-Sizing Model, *IE Interfaces*, **13**(2), 217-224.

Lee, W. S., Kim, B. N., and Yang, J. Y. (2000), Setup Cost Stability Region for a Single-Facility Multi-Product Dynamic Lot-Sizing Model, *J. of the Korean Society of Maintenance Engineers*, **5**(2), 51-66.

Love, S. F. (1973), Bounded Production and Inventory Models With Piecewise Concave Costs, *Management Science*, **20**(3), 313-318.

Nevison, C. H. (1985), A Cost Adjustment Heuristic for Dynamic Lot-Sizing with Uncertain Demand Timing, *Operations Research*, **33**, 1342-1352.

Silver, E. (1978), Inventory Control under a Probabilistic Time-Varying, Demand Pattern, *AIIE Transactions*, **10**, 371-379.

Sox, C. R. (1997), Dynamic Lot Sizing with Random Demand and Non-Stationary Costs, *Operations Research Letters*, **20**, 155-164.

Sung, C. S. (1985), A Production Planning Model for Multi-Product Facilities, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **28**(4), 345-358.

Vargas, V. A. (1995), The Stochastic Version of the Dynamic Production Lot-Size Model, Working Paper, Goizueta Business School, Emory University.

Wagner, H. M. and Whitin, T. M. (1958), Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, *Management Science*, **5**(1), 89-96.

Zangwill, W. I. (1969), A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Lot Size Production System - A Network Approach, *Management Science*, **15**(9), 506-527.