

# 공정변수의 변동을 고려한 손실함수를 통한 다중반응표면 최적화

권준범<sup>2</sup> · 이종석<sup>1</sup> · 이상호<sup>1</sup> · 전치혁<sup>1\*</sup> · 김광재<sup>1</sup>

<sup>1</sup>포항공과대학교 산업경영공학과 / <sup>2</sup>LG전자 생산기술원

## Multiresponse Optimization through a Loss Function Considering Process Parameter Fluctuation

Jun-Bum Kwon<sup>2</sup> · Jong-Seok Lee<sup>1</sup> · Sang-Ho Lee<sup>1</sup> · Chi-Hyuck Jun<sup>1</sup> · Kwang-Jae Kim<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Industrial and Management Engineering, POSTECH, Pohang, 790-784

<sup>2</sup>Production Engineering Research Center, LG Electronics, Inc., Pyeongtaek, 451-713

A loss function approach to a multiresponse problem is considered, when process parameters are regarded as random variables. The variation of each response may be amplified through so called propagation of error (POE), which is defined as the standard deviation of the transmitted variability in the response as a function of process parameters. The forms of POE for each response and for a pair of responses are proposed and they are reflected in our loss function approach to determine the optimal condition. The proposed method is illustrated using a polymer case. The result is compared with the case where parameter fluctuation is not considered.

**Keywords:** loss function, multiple response surface, parameter fluctuation

### 1. 서론

Box and Wilson(1951)이 소개한 반응표면법(Response Surface Methodology; RSM)은 하나의 반응변수(response variable)  $y$ 의 값을 최대화 혹은 최소화하는 공정변수(process parameter)들의 최적 조합을 찾기 위해 고안되었다. 그러나 제품 개발이나 공정 개발에서 발생하는 일상적인 문제들은 여러 가지 반응변수를 동시에 고려하여 공정변수의 최적 조합을 찾는 경우가 대부분이다.

이러한 문제를 다중반응표면법(Multiresponse 또는 Multiple Response Surface; MRS)이라고 한다(Myers and Montgomery, 2002). MRS를 접근하는 일반적 방법은 차원을 줄임으로써 여러 개의 반응변수를 하나의 척도로 변환하고 이를 최적화하는 것이다. 이러한 방법에는 만족도함수(desirability function)를

이용한 방법들(Harrington, 1965; Derringer and Suich, 1980; Kim and Lin, 2000; Lee and Kim, 2004; Kwon *et al.*, 2005)과 손실함수(loss function)를 이용한 방법들(Khuri and Conlon, 1981; Pignatiello, 1993; Ames *et al.*, 1997; Vining, 1998; Ko *et al.*, 2005)이 있다. 손실함수 방법론은 만족도함수 방법론에서 고려하는 반응변수가 목표치에서 떨어진 정도를 뜻하는 편(bias)과 반응변수 사이의 중요도 정보뿐만 아니라 반응변수의 공분산 정보도 MRS 모형에 반영할 수 있다는 장점을 가지고 있다.

MRS에서 고려하는 것은 반응변수의 목표치와의 편, 반응변수의 분산, 반응변수 예측치의 부정확성, 그리고 공정변수의 변동으로 발생하는 반응변수의 변동 등이 있고 이러한 요인들의 합을 최소화하는 최적 공정변수 값들을 얻는 것을 목표로 한다. 그동안 편, 반응변수의 분산과 예측치의 정확성

본 연구는 포항공과대학교 제품생산기술연구소의 지원하에 이루어졌음.

\* 연락처 : 전치혁 교수, 790-784 경북 포항시 남구 효자동 산31번지 포항공과대학교 산업경영공학과, Fax : 054-279-2870,

E-mail : chjun@postech.ac.kr

2005년 1월 접수; 2005년 3월 수정본 접수; 2005년 4월 게재 확정.

을 고려한 연구는 많이 진행됐지만, 공정변수의 변동을 MRS 문제에 적용한 연구는 많지 않았다. 공정변수의 산포가 발생하는 원인은 반응변수의 산포가 발생하는 원인과 비슷하다. 산포의 원인은 널리 알려진 바와 같이 5M 1E(작업자, 기계, 재료, 방법, 측정, 환경) 또는 Taguchi가 주장했던 잡음 요소(외부 잡음, 내부잡음, 제품간 잡음)를 생각할 수 있는데, 이것이 반응변수뿐만 아니라 공정변수에도 영향을 미칠 수 있다. 예를 들어 기계의 노화 등의 이유로 인해 공정변수에 큰 변동이 생기게 되는 경우, 그 기계를 교체하는 것이 제일 좋은 개선 방법이지만, 비용이 많이 들 수 있으므로 이러한 공정변수의 변동이 반응변수에 미치는 영향을 고려한 최적 조합을 찾는 것이 효과적인 개선 방법이 될 수 있다.

공정변수의 변동이 있는 경우 손실함수의 기대치는 없는 경우와 비교할 때 반응변수의 분산을 증가시키는 새로운 항이 추가되는데, 이는 POE(propagation of error)로 해석된다. 본 논문에서는 Pignatiello(1993)가 제안한 손실함수를 사용하되 공정변수의 변동성까지 고려하는 MRS 문제를 다루고자 한다. 이때 각 반응변수의 POE 및 두 반응변수 쌍에 대한 POE에 대한 평가방안을 제시하며 최적화시킬 손실함수의 기대치를 유도한다.

이하 2장에서 MRS에 대한 기존의 손실함수 및 기대손실을 살펴보고, 3장에서 공정변수의 변동을 고려하는 경우의 상황 변화 및 POE의 개념에 대하여 기술하며, 4장에서는 공정변수의 변동이 있는 경우 기대손실함수를 분석한다. 5장에서 수치예제를 통해 다양한 비교실험을 수행하고, 마지막으로 6장에서 결론을 맺도록 한다.

## 2. 손실함수 및 기대손실

$n$ 개의 반응변수  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 에  $k$ 개의 공정변수  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ 들이 영향을 준다고 가정하면, 일반적인 MRS 모형은 다음과 같다.

$$y_i = f_i(x) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

이때  $f_i$ 는  $i$ 번째 반응변수와 공정변수들 사이의 함수를 나타내며 본 연구에서는 주로 이차함수를 사용한다.  $\varepsilon_i$ 는 평균이 0이고 분산이  $\sigma_i^2$ 인 오차항이며  $\varepsilon_i$ 와  $\varepsilon_j$ 의 공분산은  $\sigma_{ij}$ 이다.  $f_i$ 의 정확한 형태를 알 수 없는 경우 실험계획법 등에 의해 추정할 수 있다고 가정한다(Myers and Montgomery, 2002). 또한, 분산 및 공분산은 각 반응변수에 대한 다수의 관측치로부터 추정할 수 있으며, 특히  $x$ 값에 따라 다르다고 판단되는 경우 식 (23)의 예와 같이  $x$ 의 함수로 추정하여야 한다.

MRS 문제를 접근하는, 손실함수의 대표적인 것으로 식 (2)와 같이 Pignatiello(1993)가 제안한 형태가 있는데, 이는 Taguchi의 단변량 손실함수를 다중반응변수를 다루는 일반적

인 형태로 확장시킨 것이다.

$$L(y(x), \theta) = (y(x) - \theta)^T C (y(x) - \theta) \quad (2)$$

여기서  $y(x)$ 는 반응변수 벡터,  $\theta$ 는 목표치 벡터이다.  $C$ 는  $n \times n$  비음행렬이며 반응변수의 상대적 중요도에 따라 값을 결정한다. 손실함수 방법론의 목적은 식 (2)와 같은 손실함수의 기대치를 최소화하는 공정변수 조합  $x^*$ 를 찾는 것이다. 식 (2)의 Pignatiello 손실함수의 기대치는 다음과 같다.

$$EL_{P_i} = (E[y(x)] - \theta)^T C (E[y(x)] - \theta) + \text{trace}[C \Sigma_y(x)] \quad (3)$$

이때  $\Sigma_y(x)$ 는  $y(x)$ 의 공분산 행렬이다. Pignatiello 손실함수 기대치는 반응변수의 편의와 강건성(robustness)으로 구성되는 것으로 해석된다. 식 (3)의 우변 첫 번째 항에 주어진 반응변수의 편의는 반응변수와 목표치 사이의 평균 거리의 제곱을 뜻하며, 두 번째 항에 있는 강건성은 잡음(noise) 요소에 대한 민감도를 의미하며 반응변수의 분산이 작아질수록 강건성은 높아진다고 말한다.

이처럼 기대손실을 반응변수의 편의와 강건성 요소로 분해할 수 있으며, 식 (3)을  $EL_{P_i} = L_{bias} + L_{robust}$ 와 같이 표기하기로 한다.

Vining(1998)은 반응변수 대신 반응변수 예측치를 사용한 손실함수식을 제안했다. 이것의 기대치는 반응변수의 편의와 반응변수 예측치의 분산(quality of prediction)으로 구성된다. Ko et al.(2005)는 반응변수와 반응변수 예측치 대신에 미래반응치(future response)를 사용하여 Pignatiello와 Vining의 손실함수식을 일반화한, 즉 편의, 반응변수 예측치의 분산, 그리고 강건성을 모두 고려한 새로운 손실함수를 제시하였다.

## 3. 공정변수의 변동 및 POE

$t$  번째 공정변수의 실제 값을  $w_t$ , 설계치(fixed and planned level)를  $x_t$ 라고 할 때, 본 연구에서는 Myers and Montgomery (2002)가 사용한 바와 같이 공정변수가 다음과 같이 서로 독립인 확률변수로 간주한다.

$$w_t = x_t + u_t \quad (4)$$

이때  $u_t$ 는 서로 독립이며 평균이 0이고 분산이  $\sigma_{wt}^2$ 인 공정변수의 오차항이다. 여기서  $\sigma_{wt}^2$ 는 각 공정변수의 여러 반복되는 관측치로부터 추정이 가능하다. 이와 같이 공정변수의 변동이 있는 경우 실제 값은 확률변수이므로 이에 대한 최적 조합을 찾는 것은 무의미하며, 따라서 설계치에 대한 최적 조합을 얻도록 하여야 할 것이다.

본 연구에서 사용할 식 (1)에서  $f_i$ 가 이차식으로 표현되는 경우 공정변수의 변동이 있을 때 모형이 어떻게 변하는지를

알아보자. 이를 위해 우선 공정변수의 변동이 없는 경우 ( $\sigma_{wt}^2 = 0$ )를 살펴보자. 이 때는  $w_t = x_t$ 이며, 식 (5)와 같다.

$$y_i(x) = \beta_{i0} + \sum_{t=1}^k \beta_{it} x_t + \sum_{t=1}^k \beta_{iit} x_t^2 + \sum_{t=1}^k \sum_{m>t}^k \beta_{ilm} x_t x_m + \varepsilon_i \quad (5)$$

여기서  $\beta$ 들은 추정하여야 할 모형 관련 계수들이다.

다음으로 공정변수의 변동을 고려해보자. 공정변수의 실제 값  $w_t$ 를 사용한 반응변수의 이차식 모형은 식(6)과 같다.

$$y_i(w) = \beta_{i0} + \sum_{t=1}^k \beta_{it} w_t + \sum_{t=1}^k \beta_{iit} w_t^2 + \sum_{t=1}^k \sum_{m>t}^k \beta_{ilm} w_t w_m + \varepsilon_i \quad (6)$$

공정변수의 설계치  $x_t$ 의 함수로 변환하기 위하여 식(4)를 식(6)에 대입하면, 식(7)과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} y_i(w) &= \beta_{i0} + \sum_{t=1}^k \beta_{it} (x_t + u_t) + \sum_{t=1}^k \beta_{iit} (x_t + u_t)^2 \\ &\quad + \sum_{t=1}^k \sum_{m>t}^k \beta_{ilm} (x_t + u_t)(x_m + u_m) + \varepsilon_i \\ &= \beta_{i0} + \sum_{t=1}^k \beta_{it} x_t + \sum_{t=1}^k \beta_{iit} x_t^2 + \sum_{t=1}^k \sum_{m>t}^k \beta_{ilm} x_t x_m \\ &\quad + \left( \varepsilon_i + \sum_{t=1}^k \beta_{it} u_t + \sum_{t=1}^k \beta_{iit} (2x_t u_t + u_t^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=1}^k \sum_{m>t}^k \beta_{ilm} (u_t x_m + x_t u_m + u_t u_m) \right) \quad (7) \\ &= \beta_{i0} + \sum_{t=1}^k \beta_{it} x_t + \sum_{t=1}^k \beta_{iit} x_t^2 + \sum_{t=1}^k \sum_{m>t}^k \beta_{ilm} x_t x_m + \varepsilon_i^* \end{aligned}$$

식 (7)은 새로운 오차항  $\varepsilon_i^*$ 을 제외하고서는 식 (5)와 같은 형태의 MRS 표준 모형이다. 새로운 오차항을 다시 정리하면, 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^* &= \varepsilon_i + \sum_{t=1}^k \sum_{m>t}^k u_t (\beta_{ilm} x_m) \\ &\quad + \sum_{t=1}^k \sum_{m>t}^k u_m (\beta_{ilm} x_t) + \sum_{t=1}^k \sum_{m>t}^k \beta_{ilm} u_t u_m \\ &\quad + \sum_{t=1}^k u_t \beta_{it} + 2 \sum_{t=1}^k \beta_{iit} x_t u_t + \sum_{t=1}^k \beta_{iit} u_t^2 \quad (8) \end{aligned}$$

식 (8)의 새로운 오차항의 기대치는 다음과 같다.

$$E[\varepsilon_i^*] = \sum_{t=1}^k \beta_{iit} \sigma_{wt}^2 \quad (9)$$

즉, 오차항의 평균이 0이 아니며, 공정변수 변동의 유무에 따라 반응변수의 평균은 달라진다. 이때  $\beta_{iit}$ 는 식(5)에서  $y_i(x)$ 의 이차항의 계수와 동일한 값으로 추정된다. 식(6)과 같이 이차식으로 추정한 모형에 대하여  $E[y_i(w)]$ 는 다음과 같다.

$$E[y_i(w)] = E[y_i(x)] + \sum_{t=1}^k \beta_{iit} \sigma_{wt}^2 \quad (10)$$

따라서 공정변수가 변동하는 경우의 반응변수 평균의 추정치  $\widehat{y}_i(w)$ 를 구하려면, 식(10)에 의거, 먼저 식(5)의 모형으로  $\widehat{y}_i(x)$ 를 추정한 다음에 식(9)와 같은 오차항 평균을 추정하여야 할 것이다.

식 (8)의 오차항 분산의 전개는 식 (1)의 형태에 따라 다르며 다소 복잡하나  $\varepsilon_i$ 의 분산인  $\sigma_i^2$ 에 대한 새로운 항이 추가될 것이며 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Var}[\varepsilon_i^*] = \sigma_i^2 + \text{POE}_i^2 \quad (11)$$

우변의 첫 번째 항은 공정변수의 변동이 없을 때인 식(5)에 있는 오차항의 분산이다. 그리고 두 번째 항은 공정변수의 분산이  $i$ 번째 반응변수의 분산으로 전이된 것으로 생각하여 흔히 이 값의 제공근을 POE(propagation of error)라고 부른다. 이처럼 공정변수의 변동은 반응변수의 분산을 증가시킨다. 결과적으로 공정변수가 확률변수인 경우 반응변수의 총 분산은 공정변수가 고정일 때의 분산과 POE의 제공으로 분해된다.

POE의 주요한 특징 중 하나는 식(8)에서 짐작할 수 있듯이 공정변수  $x$ 의 함수로 주어진다. 따라서 공정변수의 변동성이 존재한다면 공정변수의 각 지점마다 발생하는 POE의 값이 달라져 모형 식 (6)의 반응변수  $y_i(w)$ 는 이질적인 (heterogeneous) 분산을 가지게 된다.

Fathi(1991)와 Plante(2001) 등이 POE의 근사치를 제안하였으며, 반응변수의 총 분산으로 가장 널리 사용되는 근사치는 Ribeiro and Elsayed(1995)가 제시한 식 (12)와 같은 기울기 (gradient) 정보를 활용한 것이다.

$$\text{Var}[y_i(w)] = \sigma_i^2 + \sum_{t=1}^k \sigma_{wt}^2 \left( E \left[ \frac{\partial y_i(w)}{\partial x_t} \right] \right)^2 \quad (12)$$

단, 여기서는  $w$ 가 확률변수이므로 기울기에 기대치를 취하였다. 즉,  $i$ 번째 반응변수의 POE는 다음과 같다.

$$\text{POE}_i = \left[ \sum_{t=1}^k \sigma_{wt}^2 \left( E \left[ \frac{\partial y_i(w)}{\partial x_t} \right] \right)^2 \right]^{1/2} \quad (13)$$

식 (13)을 보면, 기울기의 절대값과 공정변수의 분산이 클수록 공정변수의 변동이 반응변수로 많이 전이된다고 생각할 수 있다.

MRS에서는 손실함수의 기대치에 반응변수의 공분산이 반영되는데, 이때 식 (8)의 오차항의 공분산은 다음과 같은 형태로 유도할 수 있다.

$$\text{Cov}[\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^*] = \sigma_{ij} + \text{POE}_{ij} \quad (14)$$

여기서  $\sigma_{ij}$ 는 공정변수의 변동이 없을 때인  $y_i(x)$ 와  $y_j(x)$ 의 공분산 또는  $\varepsilon_i$ 와  $\varepsilon_j$ 의 공분산이다.  $\text{POE}_{ij}$ 에 대해서는 기존 문헌에 언급된 것이 없지만, 식(11)의  $\text{POE}_i$ 와 유사하게 공정변수의 변동으로 인해 증가 혹은 감소된 공분산으로 생각할

수 있다. 이처럼 공정변수의 변동은 반응변수의 분산뿐만 아니라 공분산에도 영향을 미친다. 결과적으로 공정변수가 확률변수인 경우 반응변수의 총 공분산은 공정변수가 고정일 때의 공분산과  $POE_{ij}$ 로 분해된다.

총 공분산은 식 (12)의 총 분산과 유사하게 식 (15)와 같은 근사식을 제시할 수 있다. 이에 대한 근거는 부록에 언급하였다. 부록에서 언급하였듯이, 식 (1)의 모형이 1차식인 경우 본 식은 정확히 성립함을 알 수 있다.

$$Cov[y_i(w), y_j(w)] = \sigma_{ij} + \sum_{t=1}^k \sigma_{wt}^2 E \left[ \frac{\partial y_i(w)}{\partial x_t} \right] E \left[ \frac{\partial y_j(w)}{\partial x_t} \right] \quad (15)$$

즉,  $i$  번째와  $j$  번째 반응변수의 관련 POE는 다음과 같다.

$$POE_{ij} = \sum_{t=1}^k \sigma_{wt}^2 E \left[ \frac{\partial y_i(w)}{\partial x_t} \right] E \left[ \frac{\partial y_j(w)}{\partial x_t} \right] \quad (16)$$

식 (16)을 보면, 기울기의 절대값과 공정변수의 분산이 클수록 전이되는 공분산의 절대값이 커진다. 이때 두 반응변수의 기울기의 부호가 반대이면  $POE_{ij}$ 는 음의 값을 가지게 된다.

Ribeiro and Elsayed(1995)는 공정변수의 변동을 MRS에 적용했으나 반응변수들의 공분산 정보를 사용하지 않고, 단순히 개별 반응변수의 기대손실의 가중치 합을 최소화하고자 했다. 그리고 Plante(2001)는 POE를 공정능력분석에 적용한 연구를 수행하였다.

#### 4. 공정변수의 변동을 고려한 손실함수

공정변수의 변동이 있는 경우 Pignatiello(1993)의 손실함수에 대한 기대치를 산출한 후 변동이 없는 경우와의 차이를 알아보자. 반응변수 벡터로  $y(x)$  대신  $y(w)$ 를 식 (2)에 대입하고 기대손실을 구하면, 식 (17)과 같이 전개된다.

$$E[L(w), \theta] = (E[y(w)] - \theta)^T C(E[y(w)] - \theta) + trace[C \Sigma_y(w)] \quad (17)$$

우선 반응변수의 편의에 해당하는 식 (17) 우변 첫 번째 항에서  $E[y(w)]$ 는 식 (10)과 같이 산출된다. 한편  $\Sigma_y(w)$ 는 반응변수  $y(w)$ 의 공분산행렬을 나타내므로 이의 대각 원소는 식 (12)와 같으며 대각 외 원소는 식 (15)와 같다. 따라서 이는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Sigma_y(w) = \Sigma_y(x) + \Sigma_{POE}(x) \quad (18)$$

여기서  $\Sigma_{POE}(x)$ 의 대각 원소는 식 (13)과 같고,  $(i, j)$  원소는 식 (16)과 같다.

식 (18)을 식 (17)에 대입하면  $trace[C(A+B)] = trace[CA] + trace[CB]$ 의 성질에 의해서 식 (19)와 같은 기대손실

$EL^R$ 을 구할 수 있다. 공정변수의 변동이 있다는 뜻으로 기대손실의 위첨자에 R(random)을 붙였다.

$$EL^R = (E[y(w)] - \theta)^T C(E[y(w)] - \theta) + trace[C \Sigma_y(x)] + trace[C \Sigma_{POE}(x)] \quad (19)$$

공정변수의 변동이 없다면 ( $\sigma_{wt}^2 = 0$ )  $E[y_i(w)] = E[y_i(x)]$ ,  $Var[y_i(w)] = \sigma_i^2 = Var[y_i(x)]$ ,  $Cov[y_i(w), y_j(w)] = \sigma_{ij} = Cov[y_i(x), y_j(x)]$ 이므로  $\Sigma_{POE}(x)$ 는 0행렬이 된다. 따라서 식 (19)의  $EL^R$ 은 식 (3)의  $EL_{pi}$ 와 같아진다. 결국, 제안한 방법론은 Pignatiello 손실함수 방법론의 일반화된 형태라고 말할 수 있다.

기대손실을 공정변수의 변동이 있을 때의 반응변수의 편위와 강건성에 따라  $L_{bias}^R$ 과  $L_{robust}^R$ 로 분해할 수 있으며, 다시  $L_{robust}^R$ 는 공정변수의 변동이 없을 때의 강건성  $L_{robust}$ 와 공정변수의 변동으로 발생한  $L_{poe}$ 로 분해된다. 즉, 이들의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$EL^R = L_{bias}^R + L_{robust}^R = L_{bias}^R + L_{robust} + L_{poe} \quad (20)$$

이에 따라 기대손실  $EL^R$ 을 최소화시키는 공정조건  $x^*$ 는 공정변동이 없는 경우와는 다르게 결정될 것이다.

#### 5. 수치 예제

공정변수 변동의 영향을 살펴보기 위하여 Ko et al.(2005)가 이용한 Polymer 사례를 통해 Pignatiello의 손실함수를 적용하여 얻은 결과와 제안한 방법을 적용한 결과를 비교해본다. 이 사례에서는 공정변수의 변동이 측정돼 있지 않기 때문에 본 문에서는 공정변수의 분산 값을 임의로 가정하여 실험을 수행하였다.

<Table 1> 에 제시된 Polymer 데이터에는 3개의 공정변수와 2개의 반응변수가 있다. 공정변수의 이름은 반응시간( $x_1$ ), 반응온도( $x_2$ ) 그리고 촉매량( $x_3$ )이다. 첫 번째 반응변수인 폴리머의 변형(conversion of polymer,  $y_1$ )은 80에서 100까지의 값이 허용되며 목표치( $\theta_1$ )는 100이다. 두 번째 반응변수는 열활동(thermal activity,  $y_2$ )이며, 55~60의 범위를 가지며 목표치( $\theta_2$ )는 57.5이다.

##### 5.1 Pignatiello 방법 - 공정변수의 변동이 없는 경우

우선 Ko et al.(2005)가 Pignatiello 손실함수 방법으로 추정된 반응변수 기대치의 추정치는 식 (21)과 같다. 이 때는 공정변수의 변동이 없는 상황이다.

Table 1. Polymer data

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$
-1	-1	-1	74	53.2
1	-1	-1	51	62.9
-1	1	-1	88	53.4
1	1	-1	70	62.6
-1	-1	1	71	57.3
1	-1	1	90	67.9
-1	1	1	66	59.8
1	1	1	97	67.8
-1.68	0	0	76	59.1
1.68	0	0	79	65.9
0	-1.68	0	85	60.0
0	1.68	0	97	60.7
0	0	-1.68	55	57.4
0	0	1.68	81	63.2
0	0	0	81	59.2
0	0	0	75	60.4
0	0	0	76	59.1
0	0	0	83	60.6
0	0	0	80	60.8
0	0	0	91	58.9

$$\hat{y}_1(x) = 80.89 + 0.98x_1 + 4.01x_2 + 6.21x_3 - 1.43x_1^2 + 2.6x_2^2 - 5.13x_3^2 + 2.12x_1x_2 + 11.5x_1x_3 - 3.75x_2x_3$$

$$\hat{y}_2(x) = 60.54 + 3.6x_1 + 2.15x_3 \tag{21}$$

또한 사용한 비용행렬은 식(22)와 같다.

$$C = \begin{pmatrix} 0.100 & 0.025 \\ 0.025 & 0.500 \end{pmatrix} \tag{22}$$

반응변수의 분산과 공분산을 추정하기 위해서는 반복실험이 필요한데, 분산과 공분산을 식(23)과 같이 가정할 때

$$\sigma_1^2 = \exp(3 - x_1^2 - 3x_3^2)$$

$$\sigma_2^2 = \exp(2 - 2x_1^2 - x_3^2) \tag{23}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0.03\sigma_1\sigma_2$$

식(3) 우변의 두 번째 항은 다음과 같다.

$$\text{trace}[C\hat{\Sigma}_y(x)] = \exp(1.51 - 0.29x_1 - 0.18x_3 - 1.57x_1^2 - 1.46x_3^2 - 0.3x_1x_3) \tag{24}$$

따라서 식(3)에 식(21), (22), (24)들을 대입하여 기대손실을 최소화 하는 공정변수의 조합  $x^*$ 를 구하면  $x^* = (-0.69, 1.68,$

$-0.75)$ 이고, 이 때 반응변수 평균의 추정치  $\hat{y}_1(x)$  및  $\hat{y}_2(x)$ 는 각각 94.292와 56.429이며, 기대손실  $EL_{pi}$ 은 5.256이다.

### 5.2 공정변수의 변동이 있는 경우

식(21)을 식(10)에 대입하여 공정변수의 변동을 고려한 반응변수의 평균을 추정하면 식(25)와 같다.

$$\hat{y}_1(w) = 80.89 + 0.98x_1 + 4.01x_2 + 6.21x_3 - 1.43x_1^2 + 2.6x_2^2 - 5.13x_3^2 + 2.12x_1x_2 + 11.5x_1x_3 - 3.75x_2x_3 - 1.43\sigma_{w1}^2 + 2.6\sigma_{w2}^2 - 5.13\sigma_{w3}^2$$

$$\hat{y}_2(w) = 60.54 + 3.6x_1 + 2.15x_3 \tag{25}$$

이때 는 실험자가 설정하는 공정변수의 설계치이고, 공정변수의 분산  $\sigma_{wi}^2$ 은 식(26)과 같이 가정한다(2장에서 언급한 바와 같이 실제 공정에서는 각 공정변수의 반복적인 관측치로부터 추정이 가능하다).

$$\hat{\sigma}_{w1}^2 = \hat{\sigma}_{w2}^2 = \hat{\sigma}_{w3}^2 = 0.25 \tag{26}$$

비용행렬은 이전과 동일하게 식(22)를 사용한다.  $\Sigma_{POE}(x)$ 는 식(21)을 활용하여, 식(13)과 식(16)의 POE 근사치 항에 대입하여 계산한다. 즉,

$$POE_1^2 = (0.98 - 2 \times 1.43x_1 + 2.12x_2 + 11.5x_3)^2\sigma_{w1}^2 + (4.01 + 2 \times 2.6x_2 + 2.12x_1 - 3.75x_3)^2\sigma_{w2}^2 + (6.21 - 2 \times 5.13x_3 + 11.5x_1 - 3.75x_2)^2\sigma_{w3}^2$$

$$POE_2^2 = 3.6^2\sigma_{w1}^2 + 2.15^2\sigma_{w3}^2$$

$$POE_{12} = (0.98 - 2 \times 1.43x_1 + 2.12x_2 + 11.5x_3) \times 3.6\sigma_{w1}^2 + (6.21 - 2 \times 5.13x_3 + 11.5x_1 - 3.75x_2) \times 2.15\sigma_{w3}^2 \tag{27}$$

끝으로 식(19)에 식(22), (24), (25), (27)들을 대입하여 기대손실을 산출하여, 이를 최소로 하는 공정변수의 조합  $x^*$ 를 구한다. 이의 결과는 <Table 2>에 있다.

도출된 최적해는  $x^* = (-0.73, 1.68, -0.66)$ 이고, 반응변수 평균의 추정치  $\hat{y}_i(w)$ 는 각각 93.26과 56.49이다. 이 해를 Pignatiello의 해와 비교하기 위해 Pignatiello 해를 공정변수 변동이 있는 경우의 기대손실식에 대입하여 <Table 2>와 같은 결과를 얻었다. 결과를 비교하면 새로운 해는 Pignatiello 해인 93.30, 56.43와 유사하며, 더불어  $L_{bias}^R$ 의 값은 5.389로 5.420과 차이가 별로 없다. 반면  $L_{robust}$ 는 1.248로 1.118보다 다소 증가하였는데, 그 이유는 제안한 방법에서는 공정변수의 변동으로 추가로 생겨난 POE를 고려하였기 때문이다. 그 결과,  $L_{poc}$ 의 값이 6.877

로 7.172보다 줄어들었고, 그 둘의 합인  $L_{robust}^R$ 가 8.125로 8.290보다 작아졌다. 최종적으로 기대손실  $EL^R$ 의 값으로 13.514를 얻었으며, 이는 Pignatiello의 최적해로 구한 13.709보다 줄어든 수치이다.

5.3 공정변수 변동의 크기에 따른 기대손실 값의 변화

위의 수치예에서는 공정변수의 분산이 측정되지 않아서 식 (26)과 같이 임의로 가정한 값을 사용하였다. POE의 성질에 의하면 공정변수의 분산이 커질수록 기대손실이 증가할 것이라고 예상할 수 있다. 그 영향을 구체적으로 살펴보기 위해 공정변수의 변동의 크기를 변화시키면서 제안한 방법과 Pignatiello 방법으로 구한 반응변수의 추정치와 기대손실을 <Table 3>과 <Table 4>에 정리하였다. 3개의 공정변수는 모두 동일한 표준편차를 할당하였다. 참고로 <Table 3>과 <Table 4>의 결과 중에서 공정변수들의 표준편차( $\sigma_{wt}$ )를 0.5로 가정하고 실험한 결과가 앞서 제시한 <Table 2>의 내용이다.

<Table 3>에서 공정변수의 변동이 커질수록  $x_1^*$ 은 0에서 점점 멀어지다가 -0.733을 기점으로 0으로 다시 가까워진다. 반면에  $x_2^*$ 는 변화가 없고,  $x_3^*$ 은 지속적으로 0에 다가가고 있다.

$\hat{y}_1(w)$ 은 목표치 100에서 멀어져 가고,  $\hat{y}_2(w)$ 는 목표치 57.5에 가까워지고 있다. 공정변수 변동의 증가에 따른 반응변수 추정치의 움직임은 그들의 함수적 관계에 따라 결정된다. 그리고 기대손실  $EL_{new}^R$ 는 5.26에서 39.00까지 지속적으로 증가하며 분해된 기대손실 값들도 계속 증가하는 형태를 보인다. 특히  $L_{poe}$ 의 증가 폭이 가장 크다. 그 이유는 공정변수의 변동으로 인해 직접적으로 영향을 받는 것이 POE이기 때문이다. 주목할 부분은  $L_{bias}^R$ 도 계속 증가를 한다는 점인데, 그 이유는 첫째,  $L_{bias}^R$ 도  $L_{poe}$ 와 같이 공정변수 분산의 함수이며 둘째, 공정변수의 변동에 따라 POE가 증가하기 때문에, 최적화 수행시  $L_{bias}^R$ 가 다소 증가하더라도  $L_{poe}$ 가 작은 지점을 찾기 때문이다. 그리고  $L_{robust}$ 는 공정변수 분산의 함수가 아니면서도 계속 증가하는 이유는 앞서 언급한 것과 같이  $L_{poe}$ 가 작은 값을 지니는 지점을 찾으려는, 즉  $L_{robust}$ 와  $L_{poe}$  사이에서 절충된 지점을 최적해로 찾아 가기 때문이다.

<Table 4>에 제시된 Pignatiello 방법은 공정변수의 변동을 고려하지 않기 때문에, 공정변수의 변동이 증가하더라도 최적해는 변함이 없다. 최적해가 바뀌지 않더라도  $\hat{y}_1(w)$ 은 식 (25)에서 세 개의 공정변수 분산의 계수들의 합이 3.96(-1.43+

Table 2. Comparison of Pignatiello's and proposed solutions

	$x^*$	$\hat{y}_1(w)$	$\hat{y}_2(w)$	$L_{bias}^R$	$L_{robust}^R$			$EL^R$
					$L_{robust}$	$L_{poe}$	subtotal	
Pignatiello's Solution	(-0.69, 1.68, -0.75)	93.30	56.43	5.42	1.12	7.17	8.29	13.71
Proposed Solution	(-0.73, 1.68, -0.66)	93.26	56.49	5.39	1.25	6.88	8.13	13.51

Table 3. Proposed solutions under different standard deviation of process parameters

$\sigma_{wt}$	$x_{new}^*$	$\hat{y}_1(w)$	$\hat{y}_2(w)$	$L_{bias}^R$	$L_{robust}$	$L_{poe}$	$L_{robust}^R$	$EL_{new}^R$
0.0	(-0.694, 1.68, -0.751)	94.29	56.43	4.14	1.12	0.00	1.12	5.26
0.1	(-0.697, 1.68, -0.744)	94.26	56.43	4.18	1.13	0.29	1.41	5.59
0.2	(-0.707, 1.68, -0.727)	94.15	56.43	4.31	1.15	1.13	2.28	6.59
0.3	(-0.717, 1.68, -0.704)	93.94	56.44	4.55	1.18	2.52	3.69	8.24
0.4	(-0.726, 1.68, -0.681)	93.65	56.46	4.90	1.21	4.43	5.64	10.55
0.5	(-0.731, 1.68, -0.659)	93.26	56.49	5.39	1.25	6.88	8.13	13.51
0.6	(-0.733, 1.68, -0.641)	92.79	56.53	6.02	1.29	9.85	11.14	17.16
0.7	(-0.731, 1.68, -0.624)	92.24	56.57	6.81	1.34	13.36	14.69	21.51
0.8	(-0.726, 1.68, -0.608)	91.61	56.62	7.79	1.39	17.39	18.78	26.57
0.9	(-0.719, 1.68, -0.594)	90.91	56.67	8.98	1.45	21.96	23.41	32.39
1.0	(-0.711, 1.68, -0.580)	90.12	56.74	10.43	1.51	27.05	28.57	39.00

2.6-5.13)으로 음수이므로 그 값이 계속 줄어든다. 반면  $\hat{y}_2(w)$ 는 공정변수 분산의 함수가 아니므로 영향을 받지 않는다.  $L_{robust}$ 도 동일한 이유로 변화가 없다. 그리고  $\hat{y}_1(w)$ 의 값이 바뀌므로  $L_{bias}^R$ 도 변한다.  $L_{poe}$ 는 지속적으로 값이 증가하며 그 증가 폭이 제안한 방법에서보다 더욱 크다. 그 이유는 Pignatiello 방법은 제안한 방법과 달리 최적화 수행 시 POE 값을 고려하지 않기에 제안한 방법에서와 같은 절충 해를 찾으려는 노력이 결여되어 있기 때문이다. 끝으로  $EL_{new}^R$ 는 5.26에서 40.24까지 지속적으로 그 값이 증가한다.

<Table 4>와 <Table 3>에 정리된 두 해에 따른 기대손실의 차이를 <Figure 1>에 표시하였다. 수평 축은 공정변수의 표준편차를 나타낸 것이고, 수직 축은 Pignatiello 방법으로 구한  $L_{bias}^R$ ,  $L_{robust}$ ,  $L_{poe}$ ,  $EL_{new}^R$  값에서 제안한 방법의 결과를 뺀

값이다.

본 사례에서 공정변수의 변동이 증가함에 따른 두 방법으로 계산한  $L_{bias}^R$ 의 차이는 거의 없다. 그리고 Pignatiello 방법과 달리 제안한 방법은  $L_{robust}$ 의 값이 계속 증가한다. 그래서 그 차이가 음수로 <Figure 1>에 있는 4개의 곡선 중에서 최하위에 표시된다. 그러나 제안한 방법은  $L_{poe}$  값의 증가 폭이 Pignatiello 결과보다 훨씬 작아 4개의 곡선 중에서 최상위에 놓인다. 그래서 제안한 방법으로 구한 기대손실  $EL_{new}^R$ 는 Pignatiello 방법의 기대손실보다 작은 값을 가지게 되어,  $EL_{new}^R$ 의 차이는 증가하는 형태를 보인다. 특징적인 것은 공정변수의 변동이 작을 때는 두 방법으로 구한  $EL_{new}^R$ 의 차이가 별로 없는데, 변동이 커짐에 따라 제안한 방법의 효과가 강하게 나타난다.

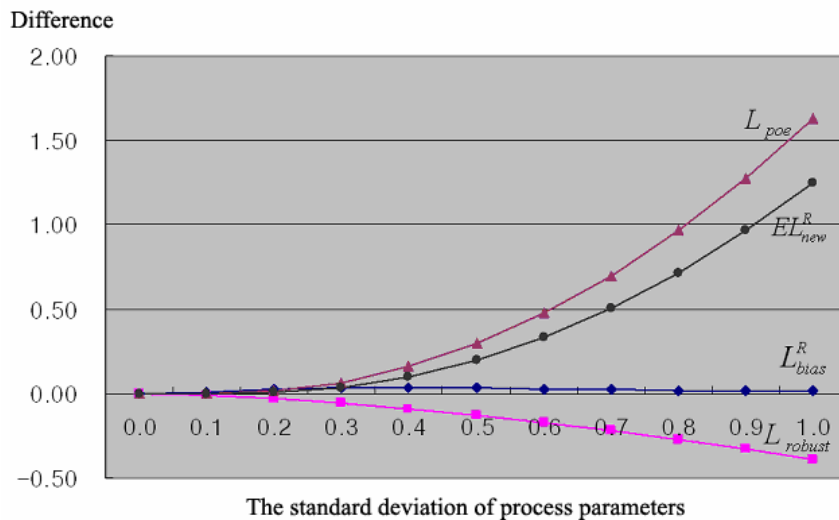


Figure 1. Difference in expected loss between Pignatiello's method and proposed method.

Table 4. Pignatiello's solutions under different standard deviation of process parameters

Standard Deviation	$x^*$	$\hat{y}_1(w)$	$\hat{y}_2(w)$	$L_{bias}^R$	$L_{robust}$	$L_{poe}$	$L_{robust}^R$	$EL_{new}^R$
0.0	(-0.694, 1.68, -0.751)	94.29	56.43	4.14	1.12	0.00	1.12	5.26
0.1	(-0.694, 1.68, -0.751)	94.25	56.43	4.19	1.12	0.29	1.41	5.59
0.2	(-0.694, 1.68, -0.751)	94.13	56.43	4.33	1.12	1.15	2.27	6.60
0.3	(-0.694, 1.68, -0.751)	93.94	56.43	4.58	1.12	2.58	3.70	8.28
0.4	(-0.694, 1.68, -0.751)	93.66	56.43	4.94	1.12	4.59	5.71	10.64
0.5	(-0.694, 1.68, -0.751)	93.30	56.43	5.42	1.12	7.17	8.29	13.71
0.6	(-0.694, 1.68, -0.751)	92.87	56.43	6.05	1.12	10.33	11.45	17.49
0.7	(-0.694, 1.68, -0.751)	92.35	56.43	6.83	1.12	14.06	15.18	22.01
0.8	(-0.694, 1.68, -0.751)	91.76	56.43	7.81	1.12	18.36	19.48	27.29
0.9	(-0.694, 1.68, -0.751)	91.08	56.43	9.00	1.12	23.24	24.35	33.36
1.0	(-0.694, 1.68, -0.751)	90.33	56.43	10.44	1.12	28.69	29.81	40.24

5.4 각 공정변수의 변동계거 시 기대손실의 변화

이번에는 3개의 공정변수들 중에서 어느 변수가 기대손실의 증가에 가장 큰 기여를 하는지를 살펴보는 민감도 분석을 해보자. 식 (26)에서와 같이 현재의 3개 공정변수의 변동량인 표준편차가 모두 0.5라고 가정하자. 그리고 공정변수 3개를 기계 A, B, C에 해당하는 공정변수라고 생각하여, 새 기계로 교체하면 해당 공정변수의 변동이 0이 된다고 가정한다. 따라서 기계를 교체하면, 그에 따른 기대손실 값이 줄어든 것이다. 그러므로 기계의 가격과 기대손실 감소 폭의 정보를 활용하여 어느 기계를 먼저 교체할지에 관한 투자계획을 수립할 수 있다. <Table 5>에는 각 변동이 0일 때 새로운 해  $x_{new}^*$ 를 구하고 기대손실( $EL_{new}^R$ ) 및 감소 폭을 나타내고 있다. 이로부터 3가지 기계의 가격이 동일하다면, B기계를 교체하는 것이 가장 이익이 크다고 하겠다.

6. 결론 및 추후 연구

공정변수의 변동이 존재할 때, 이것으로 인해 반응변수의 분산이 증가함과 동시에 공분산도 변한다는 것을 본 논문을 통해 살펴보았다. 그리고 공정변수가 변동함에 따라 추가적으로 생겨나는 POE를 고려한 기대손실을 추정하는 방안을 제시하였다. 이에 따라 공정변수의 변동이 있는 경우는 기대손실을 최소화시키는 공정변수의 최적 조건이 다를 수 있음을 보였다. 그 동안 공정변수의 변동이 반응변수의 분산에 영향을 미친다는 연구들이 진행돼 왔으나 MRS 방법론에 체계적으로 결합된 사례는 별로 없었다. 그런 점에서 MRS 영역에 공정변수의 변동을 고려한 방법론을 제안한 것이 본 논문의 기여라 할 수 있다.

제안한 방법론은 기존의 방법론들과 비교하여 다음과 같은 상황에서 큰 효과를 보일 수 있다. 첫째, <Figure 1>에서 살펴본 바와 같이 공정변수의 변동이 클 때, 기존의 방법론보다 훨씬 개선된 해를 찾을 수 있다. 둘째, 추정된 반응변수의 모형이 공정변수와 비선형 관계일 때, 제안한 방법론의 효과가 커진다. 왜냐하면 반응변수의 모형이 공정변수와 선형 관계에 있다면 모든 지점에서 반응변수와의 기울기가 동일하므로 공정변수의 분산이 모든 지점에서 같다고 가정하면, 발생하는 POE

값이 동일하기 때문에 기존 방법론보다 개선된 해를 찾을 수 없다. 셋째, 공정변수의 분산 크기에 대한 민감도 분석을 통해 교체해야 할 기계의 우선순위를 결정하는 등의 투자계획을 세울 때도 제안한 방법을 적용할 수 있다.

추후 연구 방향으로는 다음과 같은 것들이 가능하다. 첫째, 본 논문에서는 공정변수의 변동의 영향을 Pignatiello(1993) 손실함수 방법론에 적용하였는데, 더 일반적인 손실함수라고 알려진 Ko *et al.*(2005)의 손실함수 방법론에 접목하는 연구가 필요하다. 그러기 위해서는 반응변수 예측치의 정확도에 관한 공분산  $\Sigma_y(w)$ 을 효과적으로 추정할 수 있어야 한다. 둘째, 본 논문에서 설명한 공정변수의 변동과 같이 독립변수에 오차가 있는 경우에 효과적으로 모형을 추정한 방법들이 다수 연구되어 있는데, 이를 MRS 영역에 접목시킬 수 있을 것이다. 끝으로, Ribeiro and Elsayed(1995)가 언급하였듯이 만약 공정변수들의 변동이 서로 독립적이지 않다면 공정변수의 공분산도 모형에 반영할 필요가 있다.

[부록] 식 (15)에 대한 근거

식 (1)의 모형이 다음과 같은 1차식인 경우

$$y_i(x) = \beta_{i0} + \sum_{t=1}^k \beta_{it}x_t + \epsilon_i$$

식 (15)는 정확히 성립함을 보일 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} Cov[y_i(w), y_j(w)] &= Cov\left[y_i(x) + \sum_{t=1}^k \beta_{it}u_t, y_j(x) + \sum_{t=1}^k \beta_{jt}u_t\right] \\ &= Cov[y_i(x), y_j(x)] + Cov\left[\sum_{t=1}^k \beta_{it}u_t, \sum_{t=1}^k \beta_{jt}u_t\right] \\ &= \sigma_{ij} + \sum_{t=1}^k \beta_{it}\beta_{jt}E[u_t^2] \\ &= \sigma_{ij} + \sum_{t=1}^k \sigma_{wt}^2 E\left[\frac{\partial y_i(w)}{\partial x_t}\right] E\left[\frac{\partial y_j(w)}{\partial x_t}\right] \end{aligned} \tag{A1}$$

한편, 식 (6)과 같은 2차식 모형에 대하여 공분산을 구해 보고자 한다. 이를 위해 우선 식 (6)을 벡터-행렬로 표시하면 다음과 같다.

Table 5. New solutions when one of variations is zero

Machine to be replaced	Machine A ( $\sigma_{w1} = 0$ )	Machine B ( $\sigma_{w2} = 0$ )	Machine C ( $\sigma_{w3} = 0$ )
$x_{new}^*$	(-0.73, 1.68, -0.66)	(-0.71, 1.68, -0.73)	(-0.76, 1.68, -0.63)
$EL_{new}^R$	11.43	<b>9.68</b>	11.25
$EL^R - EL_{new}^R$	2.08	<b>3.83</b>	2.26



$$\begin{aligned} y_i(\mathbf{w}) &= \beta_{i0} + \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{w} + \mathbf{w}^T B_i \mathbf{w} + \epsilon_i \\ &= y_i(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{u} + 2\mathbf{x}^T B_i \mathbf{u} + \mathbf{u}^T B_i \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

여기서  $\mathbf{u}$ 는 식 (4)와 관련된 오차항 벡터를 나타내며,  $\boldsymbol{\beta}_i$ ,  $B_i$ 는 각각 회귀계수들로 이루어진 벡터 및 행렬을 의미한다. 이때, 공분산은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &Cov[y_i(\mathbf{w}), y_j(\mathbf{w})] \\ &= Cov[y_i(\mathbf{x}), y_j(\mathbf{x})] \\ &+ Cov[\boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}_j^T \mathbf{u}] + 2Cov[\boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{u}, \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_j \mathbf{u}] \\ &+ Cov[\boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{u}, \mathbf{u}^T B_j \mathbf{u}] \\ &+ 2Cov[\boldsymbol{\beta}_j^T \mathbf{u}, \mathbf{x}^T B_i \mathbf{u}] + 4Cov[\mathbf{x}^T B_i \mathbf{u}, \mathbf{x}^T B_j \mathbf{u}] \\ &+ 2Cov[\mathbf{x}^T B_i \mathbf{u}, \mathbf{u}^T B_j \mathbf{u}] \\ &+ Cov[\boldsymbol{\beta}_j^T \mathbf{u}, \mathbf{u}^T B_i \mathbf{u}] + 2Cov[\mathbf{x}^T B_j \mathbf{u}, \mathbf{u}^T B_i \mathbf{u}] \\ &+ Cov[\mathbf{u}^T B_i \mathbf{u}, \mathbf{u}^T B_j \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

오차항  $\mathbf{u}$ 에 대한 3차 모멘트 이상을 무시한다면, 식 (A3)의 공분산은 다음으로 근사될 수 있다.

$$\begin{aligned} &Cov[y_i(\mathbf{w}), y_j(\mathbf{w})] \\ &= Cov[y_i(\mathbf{x}), y_j(\mathbf{x})] + Cov[\boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}_j^T \mathbf{u}] + 2Cov[\boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{u}, \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_j \mathbf{u}] \\ &+ 2Cov[\boldsymbol{\beta}_j^T \mathbf{u}, \mathbf{x}^T B_i \mathbf{u}] + 4Cov[\mathbf{x}^T B_i \mathbf{u}, \mathbf{x}^T B_j \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

행렬  $\Sigma_w$ 를 다음과 같이 정의할 때

$$\Sigma_w = \begin{bmatrix} \sigma_{w1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{w2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{wk}^2 \end{bmatrix}$$

식 (A4)의 공분산 근사치는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} &Cov[y_i(\mathbf{w}), y_j(\mathbf{w})] \\ &= \sigma_{ij} + \boldsymbol{\beta}_i^T \Sigma_w \boldsymbol{\beta}_j + 2\boldsymbol{\beta}_i^T \Sigma_w B_j \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T B_i \Sigma_w \boldsymbol{\beta}_j + 4\mathbf{x}^T B_i \Sigma_w B_j \mathbf{x} \\ &= \sigma_{ij} + (\boldsymbol{\beta}_i + 2B_i \mathbf{x})^T \Sigma_w (\boldsymbol{\beta}_j + 2B_j \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

$\nabla y_i(\mathbf{w})$ 를 다음과 같은  $\mathbf{x}$ 에 대한 gradient vector라 할 때,

$$\nabla y_i(\mathbf{w}) = (\partial y_i(\mathbf{w})/\partial x_1, \dots, \partial y_i(\mathbf{w})/\partial x_k)^T$$

식 (A2)에 대하여 다음과 같은 결과가 성립한다.

$$E[\nabla y_i(\mathbf{w})] = \boldsymbol{\beta}_i + 2B_i \mathbf{x}$$

따라서, 식 (A5)는 결국 다음과 같이 표현되며,

$$Cov[y_i(\mathbf{w}), y_j(\mathbf{w})] = \sigma_{ij} + (E[\nabla y_i(\mathbf{w})])^T \Sigma_w (E[\nabla y_j(\mathbf{w})]) \quad (\text{A6})$$

이는 식 (15)와 동일함을 알 수 있다.

## 참고문헌

- Ames, A. E., Mattucci, N., Macdonald, S., Szonyi, G. and Hawkins, D. M.(1997), Quality Loss Function for Optimization across Multiple Response Surface, *Journal of Quality Technology*, **29**, 339-346.
- Box, G. E. P. and Wilson, K. B.(1951), On the Experimental Attainment of Optimum Conditions, *Journal of Royal Statistical Society-Series B*, **13**, 1-45.
- Derringer, G. C. and Suich, R.(1980), Simultaneous Optimization of Several Response Variables, *Journal of Quality Technology*, **12**(4), 214-219.
- Fathi, Y.(1991), Nonlinear Programming Approach to the Parameter Design Problem, *European Journal of Operational Research*, **53**, 371-381.
- Harrington, E.C.(1965), The Desirability Function, *Industrial Quality Control*, **4**, 494-498.
- Kim, K-J. and Lin, D.(2000), Simultaneous Optimization of Multiple Responses by Maximizing Exponential Desirability Functions, *Journal of Royal Statistical Society-Series C*, **43**, 311-325.
- Khuri, A. and Conlon, M.(1981), Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions, *Technometrics*, **23**, 363-375.
- Ko, Y-H., Kim, K-J. and Jun, C-H.(2005), A New Loss Function-Based Method for Multiresponse Optimization, *Journal of Quality Technology*, **37**(1), 50-59.
- Kwon, J-B., Lee, J-S., Lee, S-H., Jun, C-H. and Kim, K-J (2005), Multiresponse Optimization through a New Desirability Function Considering Process Parameter Fluctuation, *Journal of the Korean Operations Research and Management Science Society*, **30**(1), 95-104.
- Lee, M-S. and Kim, K-J.(2004), Expected Desirability Function: Consideration of Both Dispersion and Location Effects in Desirability Function Approach, *Working Paper*, Department of Industrial Engineering, POSTECH.
- Myers, R. H. and Montgomery, D. C.(2002), *Response Surface Methodology: Process and Product Improvement with Designed Experiments*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York.
- Pignatiello, J.(1993), Strategies for Robust to Multiresponse Quality Engineering, *IIE Transactions*, **25**, 5-15.
- Plante, R.(2001), Process Capability: a Criterion for Optimizing Multiple Response Product and Process Design, *IIE Transactions*, **33**, 497-509.
- Ribeiro, J. L., Elsayed, E.A.(1995), A Case Study on Process Optimization Using the Gradient Loss Function, *International Journal of Production Research*, **33**(12), 3233-3248.
- Vining, G. G.(1998), A Compromise Approach to Multiresponse Optimization, *Journal of Quality Technology*, **30**, 309-313.