

4 절점 응축 셸 요소를 이용한 복합재 적층 구조물의 전단응력 예측

최 누리* · 이 병 채**
(2000년 1월 12일 접수)

Estimation of Transverse Shear Stresses in Laminated Composite Structures Using 4-node Degenerated Shell Elements

Noori Choi and Byung-Chai Lee

Key Words : Transverse Shear Stress (전단 응력), Laminated Composite Structure (복합재 적층 구조물), Degenerated Shell Element (응축 셸 요소), REP Recovery Method (응력회복)

Abstract

We propose an accurate and efficient estimation method of transverse shear stresses for analysis and design of laminated composite structures by 4-node quadrilateral degenerated shell elements. To get proper distributions of transverse shear stresses in each layer, we use 3-dimensional equilibrium equations instead of constitutive equations with shear correction factors which vary diversely according to the shapes of shell sections. Three dimensional equilibrium equations are integrated through the thickness direction with complete polynomial membrane stress fields, which are recovered by REP (Recovery by Equilibrium in Patches) recovery method. The 4-node quadrilateral degenerated shell element used in this paper has drilling degrees of freedom and shear stresses derived from assumed strain fields that are set up at natural coordinate systems. The numerical results demonstrate that the proposed estimation method attains reasonable accuracy and efficiency compared with other methods and FE analysis using 4-node degenerated shell elements.

기호설명			
$\{u\}, \{\varepsilon\}$: 전체좌표계 변위, 변형률	$[N]$: 형상함수
$\{u'\}, \{\varepsilon'\}$: 국지좌표계 변위, 변형률	$[\Theta]$: 방향여현행렬
$\{u_\xi\}, \{\varepsilon_\xi\}$: 자연좌표계 변위, 변형률	$[P]$: 응력회복항
$\{u_k\}$: 절점변위	$\{V_3\}$: 수직 벡터
$\{u^h\}, \{\sigma^h\}$: 유한요소법 결과 변위, 응력	$\{a\}$: 응력회복 계수
$\{\sigma^*\}$: REP 로 회복된 응력	$\{\delta\}$: 요소 절점변위벡터
$[D]$: 국지좌표계 탄성행렬	$\{t\}$: 트랙션벡터
$[T]$: 8 절점-4 절점 변위 변환행렬	$\{b\}$: 체적력벡터
		J	: 자코비안
		$[l^i]$: i 번째 대각선 요소만 1 이고 나머지 요소가 모두 0 인 정방 행렬
		S	: 길이-두께비
		p	: 분포 하중의 크기

* 한국과학기술원 기계공학과

** 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : bclee@sys713.kaist.ac.kr

TEL : (042) 869-3031 FAX : (042) 869-3095

1. 서론

기계 구조물의 고성능화와 경량화에 따라, 복합재료는 금속재료를 대체할 차세대 구조재료로서 적용이 확대되고 있다. 최근에는 평판 형태의 구조물 뿐 아니라 항공기의 기체, 압력용기, 모터 케이스, 파이프 등과 같은 셀 형태의 구조물, 우주항공 구조물에도 이용되고 있다. 이러한 셀 형태의 섬유강화 복합재료는 경제성이나 안정성 측면에서도 매우 효율적인 것으로 알려져 있다. 특히 적층된 복합재료는 재료를 구성하는 섬유와 적층 각도 및 순서 등을 적절히 선택하면 기존의 재료로는 만족시키기 어려운 설계 요구를 만족시킬 수 있다는 점이 큰 장점으로 작용해, 예전에는 주 구조물의 보강재 등 부차적인 요소에 활용되었으나 점차 주 구조요소의 재료로 활용되는 추세이다.

주 구조요소로 사용되는 복합재의 두께가 점차 두꺼워져 가면서, 두께가 얇은 보강재로 사용되던 때에는 볼 수 없었던 전단 강성의 약점이 문제로 떠오르게 되었고, 이에 적절히 대처하기 위해 두꺼운 판 형태의 복합재 적층 구조물에서의 전단변형 및 층간 응력⁽¹⁷⁾을 정확히 예측해 내리는 시도가 계속되고 있다.

초기에는 3 차원 탄성 문제를 그대로 풀어내는 연구가 있었고 Pagano,^(1,2) Whitney⁽³⁾ 등은 사각형 판 모양의 복합재 적층 부재가 분포하중의 형태로 굽힘을 받는 문제에 대해 탄성 해를 성공적으로 구했다. 또한, Pagano 와 Soni⁽⁴⁾는 변분식을 이용하여 전체/국부 모델을 연결하는 연구를 수행하기도 했다. 그러나 이러한 시도들은 특정한 모양의 문제에 국한되어 있고 효율적이지 못했기 때문에 이와는 별도로 전체의 층을 등가인 하나의 층으로 모델링하는 방법(equivalent single layer theory)들이 시도되었다. 대표적인 방법들로는 고전 적층판 이론(classical laminated plate theory)과 선형 전단변형 이론(first order shear deformation theory)^(5,6) 등이 있다. 이 이론들은 3 차원 탄성 해에 비해 계산 효율이 좋고, 두께가 얇은 판의 경우 좋은 결과를 주지만 두께가 두꺼워질수록 해의 정확도가 떨어진 다. 특히 복합재 적층 구조물의 전단 응력은 그 특성상 인접한 층의 경계에서 연속이어야 하는데 이 현상을 잘 표현하지 못한다는 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 Reddy⁽⁷⁾는 면내 변위들을 두께방향으로 이차 이상의 다항식으로 근사하는 고차 전단변형 이론(higher order shear deformation theory)으로 해석을 시도하였다. 그 뒤로 이와 유사한 연구들이 많이 진행되었는데 대부분 면내 변위들은 두께방향으로 3 차 다항식으로

근사 되었으며 이로 인해 자유도는 증가하였지만 해의 정확도는 상당히 개선되었다. 그러나 이 방법 역시 인접한 층의 경계에서 전단응력이 연속이어야 하는 문제를 완전히 해결하지는 못했다. Hsu 와 Wang,⁽⁸⁾ Reddy⁽⁹⁾ 등은 층별 이론(layerwise theory)을 이용하여 3 차원 탄성해와 거의 같은 정확도를 얻었으며, Carrera,⁽¹⁰⁾ Mao 와 Tong 과 Pian⁽¹¹⁾ 등은 층별 이론과 유한요소 혼합근사를 적절히 이용하여 좋은 결과를 얻었다. 그러나 층별 이론은 자유도 수가 과도하게 증가되어 계산 효율이 떨어지는 단점을 보였다.

한편, 전단응력을 구성방정식을 통해 구하는 방법 대신 3 차원 평형방정식을 이용하여 각 층의 경계에서 전단응력이 연속이 되도록 조건을 주는 방법들이 연구되어 왔는데, Byun⁽¹²⁾ 등은 이를 위해 막응력을 전체 영역에서 근사하였으며, Kant 와 Manjunatha⁽¹³⁾는 고차 유한요소의 내부에서 물리적 의미가 없는 다항식으로 막응력장을 구성하여 평형방정식에 적용하였고, Engblom 과 Ochoa⁽¹⁴⁾는 고차 전단변형 이론을 쓰는 유한요소에 평형방정식을 적용하였다.

본 논문에서는 기존의 방법들보다 적은 자유도를 가지는 요소를 사용하여 계산 효율은 높으면서도 적절한 수준의 정확도를 갖는 전단응력의 분포를 얻기 위해 4 절점 응축 셀 요소로 문제를 모델링하였고, 구성방정식을 이용하여 전단응력을 구하는 대신 Boroomand 와 Zienkiewicz⁽¹⁵⁾가 제안한 개선된 REP(recovery by equilibrium in patches) 응력 회복 방법으로 막응력장을 구성한 뒤에 평형방정식을 적용하여 실제에 가깝도록 전단응력의 분포를 근사하였다. 본 논문에서 사용된 4 절점 응축 셀 요소는 Kim 과 Lee⁽¹⁶⁾가 개발한 요소로 회전자유도(drilling degrees of freedom)를 가지며, 대체변형률을 이용해 전단구속을 완화시켰다.

2. 4 절점 응축 셀 요소

논문의 완결성을 위해 Kim 과 Lee 의 4 절점 응축 셀 요소 이론을 간단히 요약한다.⁽¹⁶⁾

2.1 요소의 운동학 : 회전 자유도 추가

응축 셀 요소는 일반적으로 하나의 절점에서 5 자유도를 갖게 된다. 이 때 절점에서의 회전변위를 전체좌표계에서의 회전변위 $(\theta_{xk}, \theta_{yk}, \theta_{zk})$ 로 변환하면 요소의 변위장 (u, v, w) 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix}_{mid} + \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \frac{\zeta_k}{2} \begin{bmatrix} 0 & \bar{V}_{3k}^z & -\bar{V}_{3k}^y \\ -\bar{V}_{3k}^z & & \bar{V}_{3k}^x \\ \bar{V}_{3k}^y & -\bar{V}_{3k}^x & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \\ \theta_{zk} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

이 때, (ξ, η, ζ) 는 자연좌표계를 의미하며, n 은 요소에서의 절점수, N_k 는 k 번째 절점에서의 형상함수이며, (u_k, v_k, w_k) 는 절점변위를 나타낸다. \bar{V}_3 는 절점 k 에서의 수직 방향 벡터이며, 이 벡터의 전체좌표계 i 방향 성분을 \bar{V}_{3k}^i 로 표현하였다. 여기서 k 수직축 회전자유도(drilling degrees of freedom)는 강성행렬의 변환에 의해 생성되긴 하지만 물리적으로 의미를 가지고 있지 않아 요소가 세분될수록 강성이 매우 작아지고, 이에 따라 전체 해에 영향을 줄 수 있다. 이러한 문제를 해결하여 면내 거동을 향상시키기 위한 다양한 시도가 있었는데, 본 논문에서는 그 가운데 8 절점 응축 셀 요소로부터 회전자유도를 가진 4 절점 응축 셀 요소의 변위장을 근사하는 방법을 사용하였다.

먼저 8 절점 요소의 한 변에서 가운데 절점의 변위를 Allman의 방법에 따라 근사하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2}(u_i + u_j) + y_{ji}(\theta_{sj} - \theta_{si}) - z_{ji}(\theta_{sj} - \theta_{si}) \\ v_k &= \frac{1}{2}(v_i + v_j) + z_{ji}(\theta_{sj} - \theta_{si}) - x_{ji}(\theta_{sj} - \theta_{si}) \\ w_k &= \frac{1}{2}(w_i + w_j) + x_{ji}(\theta_{sj} - \theta_{si}) - y_{ji}(\theta_{sj} - \theta_{si}) \\ \theta_{xk} &= \frac{1}{2}(\theta_{sj} + \theta_{si}), \theta_{yk} = \frac{1}{2}(\theta_{sj} + \theta_{si}), \theta_{zk} = \frac{1}{2}(\theta_{sj} + \theta_{si}) \end{aligned} \quad (2)$$

이 때, x_{ij} 는 $(x_i - x_j)$ 를 의미한다. 위 식을 이용하면 8 절점 요소의 변위를 변환행렬을 이용하여 4 절점 요소의 변위와 관계 지을 수 있고, 최종적인 요소의 형상함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{u\} = [N]_8 \{\delta\}_8 = [N]_8 [T] \{\delta\}_4 = [N]_4 \{\delta\}_4 \quad (3)$$

여기서 $[N]_8$, $[N]_4$ 는 각각 8 절점과 4 절점 요소의 기본 형상 함수를, $\{\delta\}_8$ 과 $\{\delta\}_4$ 는 절점 변

위를 의미한다.

2.2 변형률과 응력 계산 : 대체 전단 변형률

본 절에서는 두께방향 전단구속 현상을 완화시키기 위해 대체 변형률법을 이용하고 이에 필요한 변형률 및 응력을 유도한다. 앞 절과 같은 변위 근사에 대해 형면 응력($\sigma'_3 = 0$)인 가정을 쉽게 다루기 위해 국지좌표계를 도입하여 변형률 성분을 나타내면 다음과 같다.

$$\varepsilon' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{xy'} \\ \gamma_{xz'} \\ \gamma_{yz'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

전체좌표계에서의 변위 미분과 국지좌표계에서의 변위 미분 사이의 관계는 방향여현행렬을 이용해 다음과 같이 구할 수 있고,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\Theta]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} [\Theta] \quad (5)$$

여기에서 u', x' 은 각각 국지좌표계에서의 변위와 좌표를 의미하며, $[\Theta]$ 는 방향여현 벡터들로 이루어진 행렬을 의미한다. 이 식들을 이용하여 변형률-변위행렬과 국지좌표계에 대한 응력을 구할 수 있다.

이렇게 구한 변형률 중에 전단변형률 부분만 자연좌표계에서 구성한 변형률장으로 대체하게 되는데, 먼저 코베리언트 변위성분을 전체 좌표계에서 자연좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$$u_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} u_i \quad (\alpha = \xi, \eta, \zeta) \quad (6)$$

또한, 같은 방법으로 코베리언트 변형률을 자연좌표계에서 구하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad (7)$$

이렇게 자연좌표계로 변환된 변형률을 이용하여 전단변형률을 위한 대체변형률장을 다음과 같이 구성한다.

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\xi\zeta} &= \frac{1+\eta}{2}\gamma_{\xi\zeta}\Big|_{\xi=0,\eta=1} + \frac{1-\eta}{2}\gamma_{\xi\zeta}\Big|_{\xi=0,\eta=-1} \\ \bar{\gamma}_{\eta\zeta} &= \frac{1+\xi}{2}\gamma_{\eta\zeta}\Big|_{\xi=1,\eta=0} + \frac{1-\xi}{2}\gamma_{\eta\zeta}\Big|_{\xi=-1,\eta=0} \end{aligned} \quad (8)$$

2.3 요소 강성행렬

앞 절에서 기술한 바와 같이 면내 거동을 향상시키기 위해 회전 자유도를 추가하고, 전단구속을 완화시키기 위해 대체변형률장을 구성하여 변형률-변위행렬을 얻을 수 있고, 이를 이용하여 다음과 같이 요소의 강성행렬을 구할 수 있다.

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV \quad (9)$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] J |d\xi d\eta d\zeta$$

여기서 탄성행렬 $[D]$ 는 국부좌표계로 변환된 값들이다. 이 식을 복합재료 적층구조물에 적용하기 위해서는 두께방향의 적분을 각 층마다 따로 해야 하므로 이를 고려하면 요소의 강성행렬은 최종적으로 다음과 같이 구하게 된다.

$$[K] = \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] J \frac{h_k}{t} d\xi d\eta d\zeta_k \quad (10)$$

여기에서 N 은 적층 수를, h_k 는 각 층의 두께를, t 는 전체의 두께를 의미한다.

3. 전단응력 예측

일반적으로 4 절점 셀 요소를 이용하여 복합재 적층 구조물을 해석하여 전단응력을 구할 때는 탄성행렬의 전단계수에 단면의 모양에 따른 전단수

정계수(shear correction factor)를 곱한 값을 이용하여 각 층별로 구성방정식을 통해 구하게 된다. 이렇게 구한 전단응력은 그 층에서의 평균적인 전단에너지 개념에서는 적절한 값이라 할 수 있지만 두께방향 각 위치에 따른 실제 값과는 차이가 커서 설계에 직접 이용하기는 어렵다.

이런 문제점을 해결하기 위한 방법으로 3 차원 평형방정식을 이용하여 전단응력을 근사하는 연구가 많이 진행되어 왔다. 하지만 이를 위해서는 막응력이 1 차 이상의 완전한 장(field)으로 구성되어야 하기 때문에 4 절점 셀 요소에 바로 적용하기에는 어려움이 따르게 된다. 따라서 본 논문에서는 개선된 REP 응력회복 방법으로 막응력장을 구성하고, 이렇게 구해진 응력장에 평형방정식을 적용하여 전단응력을 두께방향으로 포물선 분포를 갖도록 근사하였다.

3.1 면내 응력장 구성 : REP

REP 응력회복 방법은 응력을 회복할 영역의 요소들로 조각을 구성한 후에 이 조각에 대해 가중치 형태(weighted form)의 평형방정식을 적용하여 응력장을 구성하여 그 조각 내부의 응력을 회복하는 방법이다.

먼저 전체 영역에 대한 평형방정식을 가중치 형태로 써보면

$$\begin{aligned} \{F_\Omega\} &= \int_\Omega [B]^T \{\sigma\} d\Omega - \int_\Omega [N]^T \{b\} d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_r} [N]^T \{t\} d\Gamma = \{0\} \end{aligned} \quad (11)$$

와 같이 전체 영역에 대해 외력과 내력의 합벡터 $\{F_\Omega\}$ 이 $\{0\}$ 이 되며, 응력을 회복할 각각의 조각에 대해서도 같은 방법으로 전체 영역상에서 그 조각을 제외한 다른 영역과의 관계를 표현할 수 있다.

$$\int_{\Omega_p} [B]^T \{\sigma^h\} d\Omega = \{F_p\} \quad (12)$$

이 식에서의 $\{F_p\}$ 는 조각에 대한 나머지 영역에서의 외력의 합이라 볼 수 있다. 이 때 물리적으로 의미가 있는 응력장을 근사하기 위해서는 근사된 응력장 $\{\sigma^*\}$ 이 위 식과 같이 외력과 평형을 이루어야 하며 유한요소 변위로부터 직접 구한 응력장 $\{\sigma^h\}$ 와 다음의 관계를 가진다.

$$\int_{\Omega_p} [B]^T \{\sigma^*\} d\Omega = \{F_p^*\} \\ = \{F_p\} = \int_{\Omega_p} [B]^T \{\sigma^h\} d\Omega \quad (13)$$

근사된 응력장 $\{\sigma^*\}$ 는 다항식 $[P]$ 와 계수 $\{a\}$ 로 다음과 같이 근사하게 되며,

$$\{\sigma^*\} = [P]\{a\} \quad (14)$$

다항식의 계수벡터 $\{a\}$ 는 응력의 성분별로 다음과 같이 범함수를 구성하여 근사 오차를 최소화하는 방법으로 구한다.

$$\Pi = \left([H^i] \{a^i\} - \{F_p^i\} \right)^T \left([H^i] \{a^i\} - \{F_p^i\} \right) \\ [H^i] = \int_{\Omega_p} [B]^T [1] [P]^i d\Omega, \quad (15)$$

$$\{F_p^i\} = \int_{\Omega_p} [B]^T \{\sigma_i^h\} d\Omega \\ = \left(\int_{\Omega_p} [B]^T [1] \otimes [1] [B] d\Omega \right) \{u^h\}$$

여기에서 $[1]$ 은 대각선 요소중에 현재 계산되는 i 번째 성분만 1 이고 나머지 요소들은 모두 0 인 3×3 행렬이다. 이 범함수를 i 번째 응력성분의 계수 $\{a^i\}$ 에 대하여 최소화하면 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있다.

$$\{a^i\} = \left([H^i]^T [H^i] \right)^{-1} [H^i]^T \{F_p^i\} \quad (16)$$

3.2 평형방정식의 적분

앞 결과 같이 막응력장을 얻게 되면 조각의 크기에 따라 원하는 차수의 다항식으로 막응력 항들을 완전히 근사할 수 있게 되며, 이렇게 근사된 응력장에 다음과 같이 3 차원 평형방정식을 적용할 수 있다.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

이 가운데 앞의 두 식을 이용하면 다음과 같이 전단응력 항들을 구할 수 있다.

$$\tau_{xz} = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz \quad (18)$$

$$\tau_{yz} = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz$$

이 때, 응축 셀 요소의 변위근사가 기본적으로 선형 전단변형 이론을 기초로 하고있기 때문에 막응력 항들의 미분 값들은 두께방향으로 선형의 분포를 보이게 되며 결과적으로 위 적분식을 통해 근사된 전단응력 항들은 두께방향으로 포물선의 분포를 갖게 되므로 한 층 안에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_{xz}^k = c_{x0}^k + c_{x1}^k \zeta + c_{x2}^k \zeta^2 \quad (19)$$

$$\tau_{yz}^k = c_{y0}^k + c_{y1}^k \zeta + c_{y2}^k \zeta^2$$

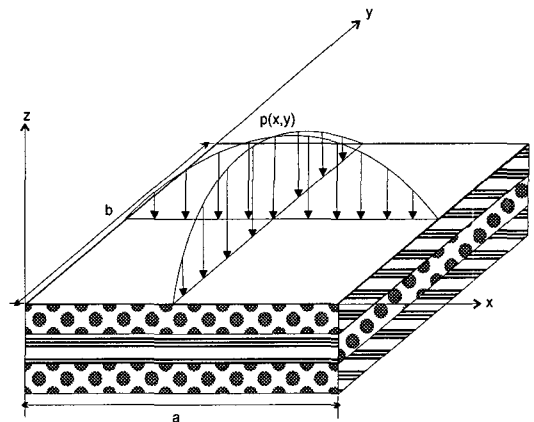


Fig. 1 Shape of laminated square plate

따라서 각각의 층마다 전단응력을 근사할 계수를 구해야 하는데, 이 가운데 일차 항과 이차 항의 계수들은 평형방정식에서 막응력장을 미분한 결과를 이용해 얻을 수 있고, 적분 상수에 해당하는 상수 항들은 인접한 층과 층의 경계에서 전단응력이 연속이어야 한다는 조건과 적층 구조의 가장 윗면과 밑면은 전단응력을 받지 않는다는 조건에 의해 구할 수 있다. 이와 같은 방법으로 기존의 응축 셀 요소에서 사용하는 전단수정계수 없이 전단 응력의 두께방향 분포를 구할 수 있다.

4. 수치 예제

전술한 방법들을 바탕으로 4 절점 응축 셀 요소를 이용한 복합재 적층 구조물의 전단응력 예측 방법을 전산 프로그램으로 구현하였으며, 문헌에서 자주 인용되는 몇 가지 수치 예제를 통해 기존의 방법들과 성능을 비교하였다.

예제에 사용된 복합재료의 재료 상수들은 다음과 같다.

$$E_L = 25 \times 10^6 \text{ psi} \quad E_T = 1 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$G_{LT} = 5 \times 10^5 \text{ psi} \quad G_{TT} = 2 \times 10^5 \text{ psi}$$

$$\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$$

예제에서 비교되는 값들을 간단히 표현하기 위해 다음과 같은 식에 따라 정규화 된 값들을 사용하였다.

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}) &= \frac{1}{pS^2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) \\ (\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}) &= \frac{1}{pS} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) \\ (\bar{u}, \bar{v}) &= \frac{E_T}{ptS^3} (u, v), \quad \bar{w} = \frac{100E_T w}{ptS^4} \end{aligned} \quad (20)$$

$$S = \frac{a}{t}, \quad \bar{z} = \frac{z}{t}$$

여기에서 S 는 길이-두께 비를 나타내며 p 는 적용되는 분포 하중의 크기를 나타낸다.

비교되는 응력은 각 예제에서의 최대응력으로 이들이 구해지는 위치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx} \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \pm \frac{t}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy} \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \pm \frac{t}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy} \left(0, 0, \pm \frac{t}{2} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right)$$

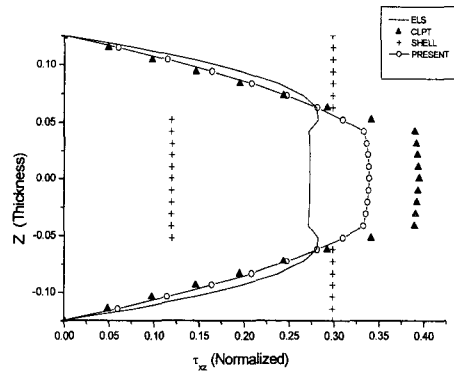


Fig. 2 Distribution of τ_{xz} of example 1

Table 1 Max. Stresses of example 1

S	Var	ELS	CLPT	SHELL	PRESENT
4	Sxx	0.7550	0.5387	0.4356	0.4444
	tyz	0.2172	0.0823	0.1318	0.1975
	txz	0.2820	0.3950	0.2988	0.3329
	txy	0.0505	0.0213	0.0355	0.0356
10	Sxx	0.5900	0.5837	0.5137	0.5240
	tyz	0.1228	0.0823	0.0763	0.1100
	txz	0.3570	0.3950	0.1362	0.3779
	txy	0.0289	0.0213	0.0240	0.0241
20	Sxx	0.5520	0.5387	0.5330	0.5435
	tyz	0.0938	0.0823	0.0626	0.0884
	txz	0.3850	0.3950	0.1403	0.3889
	txy	0.0234	0.0213	0.0211	0.0213
100	Sxx	0.5390	0.5390	0.5398	0.5506
	tyz	0.0828	0.0823	0.0577	0.0807
	txz	0.3950	0.3950	0.1417	0.3930
	txy	0.0213	0.0213	0.0201	0.0202

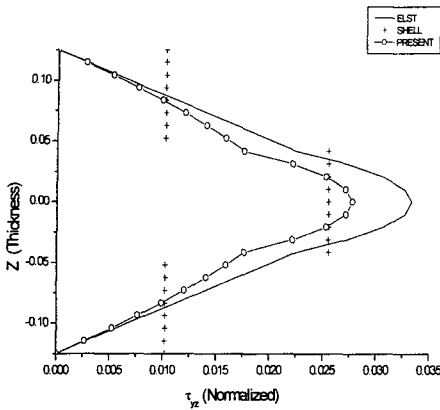


Fig. 3 Distribution of τ_{zx} of example 2

4.1 정사각판 ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)

첫 번째 예제는 제안된 방법의 정확성을 알아보기 위하여 문헌에 자주 인용되는 문제를 선택하였다. ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)의 순서로 각 층이 동일한 두께로 적층된 정사각형 판으로 네 변이 모두 단순 지지 되어 있다. 자세한 형상은 Fig. 1 과 같으며 이 때 작용하는 하중과 치수들은 다음과 같다.

$$p(x, y) = p \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \tag{22}$$

$$p = 1, \quad a = 1, \quad b = 1$$

예제 1 에 대해 길이-두께비 S 의 크기를 변화시켜가며 실험한 결과를 여러 방법들과 비교하여 Table 1 에 나타내었다. Table 에서 ELS 는 Pagano⁽²⁾ 가 3 차원 탄성 이론을 풀어서 구한 해를 의미하며 Shell 은 유한 요소법의 4 절점 응축 셀 요소의 결과로 전단 응력 값들은 일반적인 유한 요소 기법에 따라 구성방정식과 전단수정계수(직사각형 단면의 경우 $\frac{5}{6}$)를 이용해 얻었다. CLPT 는 선형 전단변형 이론의 해를 삼각함수의 급수 전개를 이용해 풀어난 결과로 전단응력은 평형방정식을 두께 방향으로 적분하여 얻은 값이다. 결과를 보면 S 가 작을 경우에는 대부분의 이론들이 3 차원 탄성 이론해 보다 떨어지는 결과를 보이지만 S 가 큰 값을 가질 때에는 모든 방법들이 거의 같은 값으로 수렴해 가는 것을 볼 수 있다.

Table 2 Max. stresses of example 2

a/h	Var	ELS	CLPT	SHELL	PRESENT
4	Sxx	1.1000	0.6230	0.6118	0.6204
	Syy	0.1190	0.0252	0.0979	0.0979
	tyz	0.0334	0.0108	0.0255	0.0278
	txz	0.3870	0.4400	0.1564	0.4142
	txy	0.0281	0.0083	0.0200	0.0201
10	Sxx	0.7250	0.6230	0.6200	0.6296
	Syy	0.0435	0.0252	0.0383	0.0338
	tyz	0.0152	0.0108	0.0129	0.0134
	txz	0.4200	0.4400	0.0158	0.4171
	txy	0.0123	0.0083	0.0100	0.0100
20	Sxx	0.6500	0.6230	0.6214	0.6307
	Syy	0.0299	0.0252	0.0285	0.0285
	tyz	0.0119	0.0108	0.0108	0.0111
	txz	0.4340	0.4400	0.1578	0.4175
	txy	0.0093	0.0083	0.0083	0.0084
100	Sxx	0.6240	0.6230	0.6218	0.6313
	Syy	0.0253	0.0252	0.0252	0.0253
	tyz	0.0108	0.0108	0.0101	0.0103
	txz	0.4390	0.4400	0.1580	0.4177
	txy	0.0083	0.0083	0.0079	0.0079

제안된 방법은 3 차원 탄성 이론해 보다 정확도가 떨어지지만 고전 적층판 이론의 해 보다 정확한 결과를 보여주었으며, 일반적인 응축 셀 요소 보다 월등히 향상된 결과를 보여주었다. 셀 요소의 결과는 구성방정식을 사용하여 전단 응력을 구했기 때문에 고전 적층판 이론의 결과보다도 좋지 않은 결과를 보였다.

Fig. 2 는 $S = 4$ 인 경우에 대해서 τ_{xz} 가 최대인 지점에서 두께방향의 분포를 그래프로 나타낸 것으로 그래프의 y 축(z)은 판의 두께를 나타낸다. 제안된 방법의 전단응력 값은 연속이며, 고전 적층판 이론의 해보다 3 차원 탄성이론의 해에 가까운 것을 볼 수 있다. 이에 비해 4절점 응축 셀 요소의 결과는 인접한 층의 경계에서 전단응력이 불연속이며 두께방향의 분포 경향도 완전히 다를 수 있다.

4.2 직사각판 ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) : $b = 3a$

두 번째 예제는 첫 번째 예제와 적층 순서가 같은 구조물이며 판의 형태가 직사각형인 경우로 정사각형 모양이 아닌 문제에 대해서도 제안된 방법이 정확한 결과를 주는지 알아보았다. 하중 조건과 경계조건은 예제 1 과 동일하며 평판의 치수는 $a = 1, b = 3$ 이다.

예제 1 과 마찬가지로 S 의 값을 변화시켜가며

실험한 결과를 Table 2에 정리하여 나타내었다. 문제의 형상이 달라졌지만 결과는 예제 1과 비슷한 경향을 보여주었다. 제안된 방법은 S 값의 변화에 따라 3차원 탄성 이론해와 비슷한 경향을 주는데 반해 고전 적층판 이론의 해는 S 값의 변화와 관계 없이 항상 같은 결과를 보이며, 응축 셀 요소의 결과는 고전 적층판 이론의 해보다 나쁜 결과를 준다. τ_{yz} 의 값이 최대인 지점에서 두께방향으로의 응력 분포를 Fig. 3의 그래프로 나타내었다. 이 때의 S 값은 4로 상당히 두꺼운 판임에도 불구하고 제안된 방법은 응력의 분포를 잘 근사하고 있음을 알 수 있다.

4.3 정사각판 ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)

다음 예제는 예제 1과 형상이 같은 정사각형

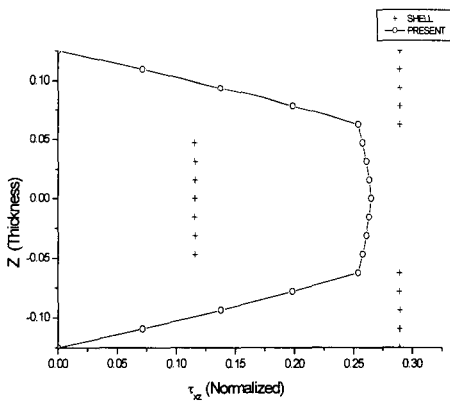


Fig. 4 Distribution of τ_{xz} of example 3

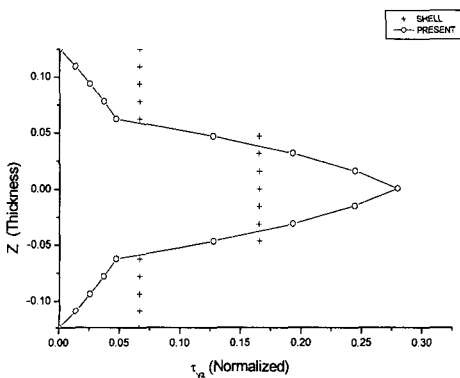


Fig. 5 Distribution of τ_{yz} of example 3

적층판으로 적층의 수만 다른 경우이다. 적층된 재료의 각 층의 두께는 모두 동일하며 ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)의 순서로 적층되어 있으며, 하중 조건과 경계 조건 역시 예제 1과 동일하다.

Table 3에서는 S 값을 달리 했을 때의 응력 값들의 최고치를 기존의 방법들과 비교해 보았고, Fig. 4와 Fig. 5는 τ_{xz} 와 τ_{yz} 가 최고 값을 갖는 지점에서 제안된 방법과 응축 셀 요소의 전단응력의 두께방향 분포를 나타내었다.

Table 3 Max. stresses of Example 3

a/h	Var	ELS	CLPT	PRESENT	SHELL
4	Sxx	0.7200	0.5390	0.4122	0.3833
	Syy	0.6630	0.2690	0.6064	0.5850
	tyz	0.2920	0.1380	0.2795	0.1652
	txz	0.2190	0.3390	0.2650	0.1157
	txy	0.0467	0.0213	0.0295	0.0293
10	Sxx	0.5590	0.5390	0.5083	0.4960
	Syy	0.4010	0.2690	0.3792	0.3658
	tyz	0.1960	0.1380	0.1800	0.1083
	txz	0.3010	0.3390	0.3152	0.1384
	txy	0.0275	0.0213	0.0231	0.0229
20	Sxx	0.5430	0.5390	0.5386	0.5256
	Syy	0.3080	0.2690	0.3075	0.2981
	tyz	0.1560	0.1380	0.1483	0.0903
	txz	0.3280	0.3390	0.3310	0.1456
	txy	0.0230	0.0213	0.0210	0.0209
100	Sxx	0.5390	0.5390	0.5505	0.5370
	Syy	0.2760	0.2690	0.2798	0.2712
	tyz	0.1410	0.1380	0.1361	0.0834
	txz	0.3370	0.3390	0.3371	0.1484
	txy	0.0216	0.0213	0.0202	0.0201

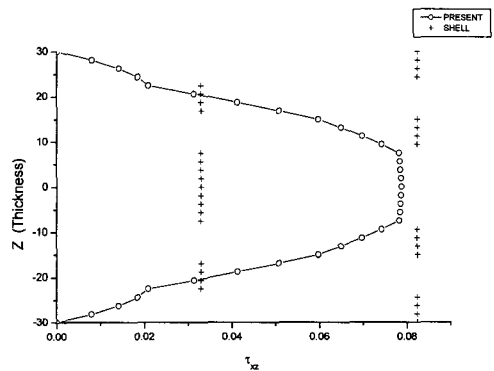


Fig. 6 Distribution of τ_{xz} of example 4

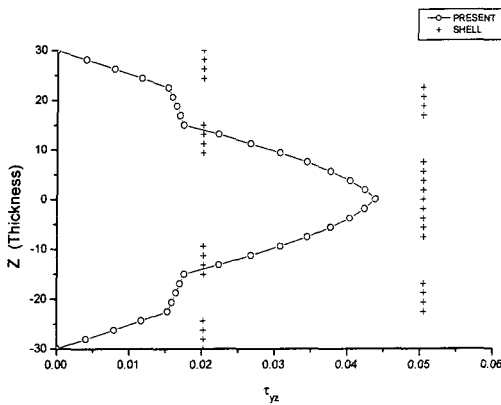


Fig. 7 Distribution of τ_{yz} of example 4

적층의 형태가 다른 경우에도 앞선 예제들과 같이 응축 셀 요소는, 막응력은 비교적 잘 예측하고 있으나 전단응력은 좋은 값을 내주지 않고 있다. 이에 비해 제안된 방법은 이보다는 적절한 값을 보여주고 있으며 두께방향의 분포도 탄성 이론해의 분포와 비슷한 경향을 보인다.

4.4 복잡한 정사각 적층판

마지막 예제는 좀더 복잡한 순서로 적층된 경우에 대해 제안된 방법과 기존의 응축 셀 요소의 결과를 비교해 보았다. 정사각 판의 한 변의 길이는 300이며 네 변이 모두 완전지지 되어 있다. 하중 조건은 가운데 점에서 1 kN의 집중 하중을 받고, $(45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ)_S$ 의 순서로 8 층으로 적층되어 있으며 각 층의 두께는 7.5로 모든 층이 동일하다. Fig. 6과 Fig. 7은 $S=10$ 일 때의 τ_{xz} 와 τ_{yz} 의 두께방향의 분포를 유한 요소 응축 셀의 결과와 비교한 것이다.

5. 결론

복합재 적층 구조물의 해석 및 설계에 일반적인 4 절점 응축 셀 요소를 사용할 경우, 전체 구조물의 모델링이 단순해져 계산상의 효율성은 높아지나 전단응력을 두께 방향으로 정확히 예측하기는 어려운 것으로 알려져 있다. 이를 극복하기 위해서 본 논문에서는 3 차원 평형방정식을 통한 전단응력 예측 방법론을 제시하였다. 3 차원 평형방정식을 두께방향으로 수치적으로 적분하여 적절한 전단응력 분포를 예측하였으며, 두께 방향의 적분

을 위해서 4 절점 응축 셀 요소의 유한 요소 범위 결과를 먼저 구하고 여기에 REP 응력회복 방법을 적용하여 막응력장을 구성하는 방법으로 4 절점 응축 셀 요소 이론의 한계를 보완하였다.

몇 가지 수치 예제 결과를 통해 새로 제시된 방법은 기존의 8 절점 육면체 요소나 4 절점 응축 셀 요소에 비해 결과의 정확성이 크게 향상되었고, 응축 셀 요소에서의 전단응력 값이 인접한 층과 층의 경계에서 불연속이 되는 현상이 해결되었음을 보였다.

본 논문에서 제시된 방법은 기존의 3 차원 탄성 이론이나 층별 이론 등과 비교하면 정확성이 약간 떨어지지만 유한 요소 응축 셀의 결과보다는 정확도가 월등히 향상되었으며, 구조물을 일반적인 셀 요소로 모델할 수 있기 때문에 다른 방법들에 비해 계산량을 획기적으로 줄일 수 있어 적층 형태나 전체 형상이 복잡하여 기존의 방법들로는 해석이 어려운 구조물의 설계 및 해석에도 적용이 가능하다.

본 논문에서는 전단응력 항들만을 근사하였지만, 이와 같은 방법으로 수직응력(σ_z) 항을 예측하는 연구를 현재 수행하고 있으며, 전단응력을 고려해야만 하는 복합재 적층 구조물의 최적화 등의 분야에 적용하기 위한 연구를 향후에 진행할 예정이다.

참고문헌

- (1) Pagano, N. J., 1969, "Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending," *Journal of Composite Materials*, Vol. 3, pp. 398-411.
- (2) Pagano, N. J., 1970, "Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates," *Journal of Composite Materials*, Vol. 4, pp. 20-34.
- (3) Whitney, J. M., 1969, "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates," *Journal of Composite Materials*, Vol. 3, pp. 534-547.
- (4) Pagano, N. J. and Soni, S. R., 1983, "Global-Local Laminate Variational Model," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 19, No. 3, pp. 207-228.
- (5) Jones, R. M., 1975, *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill.
- (6) Reddy, J. N., 1997, *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press.
- (7) Reddy, J. N., 1984, "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 745-752.
- (8) Hsu, T. M. and Wang, J. T. S., 1970, "A Theory of Laminated Cylindrical Shells Consisting of Layers of

- Orthotropic Laminae," *AIAA Journal*, Vol. 8, No. 12, pp. 2141~2146.
- (9) Robbins, D. H., Jr. and Reddy, J. N., 1993, "Modeling of Thick Composites Using a Layerwise Laminate Theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 655~677.
- (10) Carrera, E., 1998, "Evaluation of Layerwise Mixed Theories for Laminated Plates Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 5, pp. 830~839.
- (11) Mao, S. T. and Pian, T. H. H., 1972, "Finite Element Solutions for Laminated Thick Plates," *Journal of Composite Materials*, Vol. 6, pp. 304~311.
- (12) Byun, C. and Kapania, R. K., 1992, "Prediction of Interlaminar Stresses in Laminated Plates Using Global Orthogonal Interpolation Polynomials," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 11, pp. 2740~2749.
- (13) Kant, T. and Manjunatha, B. S., 1994, "On Accurate Estimation of Transverse Stresses in Multilayer Laminates," *Computers & Structures*, Vol. 50, No. 3, pp. 351~365.
- (14) Engblom, J. J. and Ochoa, O. O., 1985, "Through-the-thickness Stress Predictions for Laminated Plates of Advanced Composite Materials," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 1759~1776.
- (15) Boroomand, B. and Zienkiewicz, O. C., 1997, "An Improved REP Recovery and the Effectivity Robustness Test," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 3247~3277.
- (16) Kim, J. H. and Lee, B. C., 1998, "A Four Node Degenerated Shell Element with Drilling Degrees of Freedom," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 6, pp. 921~938.
- (17) 김광수, 홍창선, 1982, "복합적층판의 Delamination 해석," *대한기계학회논문집*, 제 6 권, 제 2 호, pp.140 ~ 146.