대한수학교육학회지 <학교수학> 제 7 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.7, No.4, 353-373. Dec 2005

초등 영재교육에 적용 가능한 이산수학 주제의 내용 구성에 관한 소고 -네트워크 문제를 중심으로-

최 근 배*

최근의 급속한 정보화 사회로의 전환에 편승하여 이산수학에 대한 관심과 이에 따른 연구가 활발해지고 있으며, 제 7차 교육과정에서 이산수학을 선택과목으로 지정할 만큼 그 중요성이 인정되고 있다. 본 연구는 네트워크문제와 관련된 이중계수 문제, 한붓그리기, 그리고 도로망문제를 중심으로, 초등 수학영재학생을 위한 학습 프로그램을 구성하는 문제와 관련된 교수학적 변환에 대하여 논의하였다.

I. 서 론

수학적 추론은 아이디어를 개발하고, 현상을 탐구하고, 수학적 추측을 형식화 및 검사하고, 일반화를 만들고, 결론을 정당화하는 데 중요한 역할을 하며, 수학학습의 주춧돌이고 수학 교수의 핵심이어야 한다(NCTM, 2000).[1] 추론을 강조하는 교실에서는 학생들이 추론의 과정 중에서 채택 가능한 수학적인 해석을 구성하는 것을 배운다(Lampert, 1990; Yackel & Cobb, 1994, 1996; NCTM, 2000에서 재인용).

이산수학은 의미 있는 실세계의 문제를 해결하는데 필요한 추론기술을 발달시킬 수 있는 유용한 현대수학의 한 분야라고 할 수 있다. 이와 관련하여 NCTM(2000)의 '학교수학을 위한 원리와 규준'에서 이산수학은, 비록 내용규준(content standard)으로는 다루고 있지는 않지만, 5개의 내용규준과 모든 단계밴드(grade band)에 걸쳐 통합되어 있다. 이산수학은 다양한 분야에 폭넓게 응용되는 현대수학에서 활발히 연구되고 있는 수학의 한 분야로서, 학교수학 교육과정에서 없어서는 안 될 필수적인 영역이며 또한 이산수학의 주제들은 수학의 다른 분야를 통해서 자연스럽게 나타난다. 따라서 이산수학은 현행 수학교육과정이 추론능력이 중시되는 문제해결능력을 강조하고 있다는 점과도 잘 부합되는 영역이다.

이와 같은 관점에서, 본 연구는 네트워크문제와 관련된 이중계수 문제, 한붓그리기, 그리고 도로망문제를 중심으로, 초등학교 영재학생들을 위한 학습프로그램의 내용을 구성하는 문제에 대한 교수학적 변환에 대하여 논의하고자 한다. 이러한 교수학적 논의의 기본방향이 되는 이론적 배경은 주로 Lakatos의 준경험주의 수리철학에서 수학적 발견의 논리인 '추측과

* 제주교육대학교(kbchoe@jejue.ac.kr)

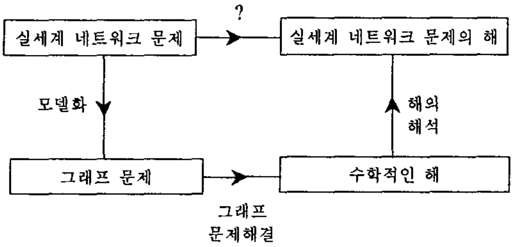
1) NCTM(2000)에서는 추론과 증명을 절차규준(process standards) 중의 하나로 취급하고 있으며, 이 규준에서 학생들이 성취해야할 목표를 다음과 같이 제시하고 있다.
· 수학의 기본적인 요소로 추론과 증명을 인식한다.
· 수학적 추측을 만들고 탐구한다.
· 수학적 논쟁과 증명을 개발하고 평가한다.
· 다양한 추론의 형태와 증명의 방법을 선택하고 활용한다.

반박' 의 방법[2]과 Polya의 발견술이다.[3]

II. 연구의 내용

1. 네트워크

실생활에서의 네트워크(관계)의 문제는 주로 그래프로 모델화된다. 이러한 단순한 그림은 복잡한 실세계의 문제를 모델화하는 데 사용될 수 있으며 또한 실세계의 문제를 해결하는 데에도 도움을 준다([그림 II-1] 참조).



[그림 II-1] 네트워크 문제의 간접적인 문제해결 과정

실제로, 실세계에 일어나는 물리적 현상의 문제를 간접적으로(수학적 모델화에 의한) 해결하는 방법은 자연과학의 연구에서는 아주 흔한 일이다. 그러나 학교수학에서의 주된 문제점 중의 하나는 수학적으로 모델화된 것만 다루는 경향이 있다는 것이며, 이러한 점은 학생들이 수학을 기피하는 현상에 대한 하나의 원인이 될 수 있다. 이를 테면, 수학을 왜 배우지? 수학을 배워서 어디에 사용하지? 등과 같은 학습 동기와 관련된 의문은 학생들이 속한 현실과 학교수학 사이의 거리감으로부터 기인한다고 볼 수 있다. 이는, 수학자에게는 순수한 연역적 수학체계가 중요하지만, 배우는 학생들에게는 현실과의 관계가 더욱 중요하다(Freudenthal, 1973)는 것이다.

이러한 문제점을 해결하기 위하여, 제 7차 교육과정 수학교과서에서는 실생활 문제를 많이 도입하여 다루고 있으며, 특히, 초등학교 교과서에 수록된 문제들을 해결하는 과정에서, 대상들 간의 관계를 표현하기 위한 수학적인 모델화의 수단으로 그래프(그림그리기)는 흔히 사용되며 또한 그래프는 이산수학분야 중에서 초등학생이 다루기에게도 가장 적절한 수학적 모델 중의 하나이다. 그리고 그래프에 대한 탐구는 학생들에게 수학적 표현의 레퍼토리를 확장시키고 또한 그들에게 '관계' 와 같은 수학적 주제의 탐구를 경험하게 하며, 이를 통하여 학생에게 수학적 추론능력을 길러줄 수 있다.

이러한 점에서 여러 가지의 이산수학 주제 중에서 초보적인 그래프 이론은 초등학생들에게 생소하기는 하지만 비교적 쉽게 적용될 수 있는 학습주제이다.

2. 학습주제 및 내용의 구성

초등수학영재를 위한 네트워크문제와 관련된 학습주제의 선정은

- 그래프와 친숙하기
- 알고리즘적사고 기르기
- 실세계 문제로의 응용

2) Lakatos의 주장처럼 수학이론은 과학이론처럼 준경험적 입장을 취하다면, 수학적 지식은 잠정적으로 참으로 인정되는 반박 가능한 추측이다(우정호, 강문봉, 1993). 결국, 수학적 지식의 성장은 추측, 반례를 통한 반박, 개선의 과정을 통해서 형성된다는 것이다.

3) Polya의 발견술에는 (1) 그림을 그리고 적절한 기호 붙이기 (2) 문제의 변형 (3) 정의로 되돌아가기 (4) 분해와 재결합 (5) 유추하기 (6) 일반화와 특수화 (7) 보조 요소 도입하기 (8) 거꾸로 연구하기 (9) 방정식 세우기 등이 있다(우정호, 정은실, 1995)

을 기본바탕으로, 이중계수 원리, 복제게임, 한붓그리기, 도로망문제의 4가지를 그 주제로 선정하였다. 이러한 4가지의 주제의 도입순서는 초등학생들의 인지수준과 접근성을 기초로 하였다. 실제로, 초등학생에게 생소할 수 있는 그래프에 친숙하게 하기 위한 관점에서 초등수학 교과서에서 자주 접할 수 있는 이중계수 문제를 선정하였다. 이는, 학생들에게 실생활 문제의 수학적 추상화(그래프)를 인식시키고자 함이다. 복제게임은 이중계수 문제와 관련된 추론능력과 그래프에 좀더 친숙하기 위한 활동의 관점으로 선정하였고, 한붓그리기 문제는 그래프이론을 배우는 동기유발의 관점과 알고리즘적 사고를 길러주기 위한 관점에서, 끝으로, 도로망 문제는 알고리즘적 사고와 현실세계에서의 응용성이 강한 문제의 관점으로 택하였다.

각 주제와 관련된 학습프로그램 내용의 구성방법은 기본적으로 Polya의 문제해결단계와 준경험주의적 관점인 Lakatos의 수리철학을 바탕으로 하였다. 물론 주제의 특성에 따라서 이러한 관점이 약하거나 강할 수 있다.

각 주제들은 이산수학에서 잘 알려진 정리들이다. 여기서는 이러한 정리들의 증명(추론)을 초등학교 수준에 맞게 변형하려는 것에 초점을 두고, 각 주제별 학습프로그램의 내용구성 및 순서를 만드는 하나의 방법을 논의하였다.

가. 이중계수 원리

우리는 우리의 일상에서 두 대상의 어떤 행위에 의하여 하나의 결과가 나타나는 현상을 자주 접한다. 이를 테면, 운동경기, 컴퓨터 게임, 가위바위보, 인사하기 등이 그러한 예들이다. 이와 같은 상황에서 나타나는 행위의 결과의 총회수를 헤아리는 문제를 일반적으로 「이중계수(二重計數, double counting) 문제」라고 하고, 여기에 숨어있는 계수원리를 일반적으로 「이중계수 원리」라고 하며, 때때로 이러한 이중계수의 원리는 악수보조정리로 명명되기도 한다(Cameron, 1994).

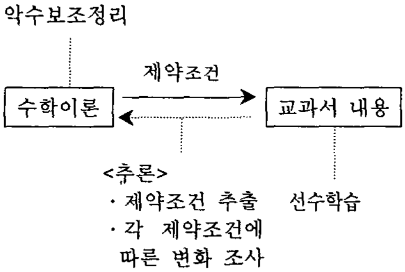
악수보조정리: 어떤 모임에서 홀수 번 악수한 사람의 수는 짝수이다.[4]

악수보조정리는 그래프 이론에서 기본이 되는 정리로, 간단하지만 응용성이 매우 높다. 예를 들어, 정다면체의 분류문제를 다룰 때 중요하게 사용된다. 역사적으로 보면, 이중계수의 원리는 오일러(Euler)의 1736년의 그래프 이론의 원조로 알려진 논문에 처음 소개되었다 (Wilson & Watkins, 1990).

초등 수학교과서에서 다루고 있는 이중계수 문제를 좀더 수학적으로 체계화하여 초등 영재아를 위한 학습 프로그램으로의 조직화의 문제를 논의하자.

일반적인 수학이론은 학생들의 인지수준을 감안하여 적절한 제약조건을 가지는 형태(특수한 경우)로 변환되어 교과서에 수록된다. 이러한 경우에 실제적인 수학이론은 무엇일까? 에 관심을 가지게 된다. 이와 같은 관점으로 이중계수와 관련된 영재 학습프로그램의 구성하였다([그림 II-2] 참조).

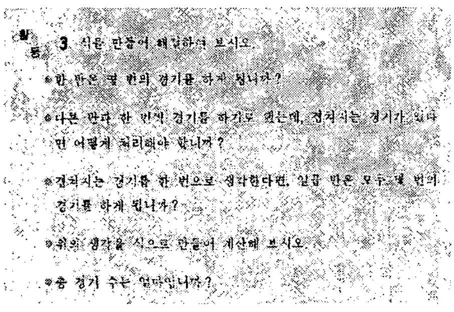
4) 실제로, 이것은 「임의의 그래프에서, 모든 그래프의 꼭지점 차수의 합은 변의 개수의 2배이다」라는 정리로, 일반적인 그래프에서의 꼭지점의 수와 변의수와의 관계를 기술한 것이다. 초등학생들은 그래프라는 것에 익숙하지 못하기 때문에, 우선은 실생활의 문제를 중심으로 활동의 형태로 제시하고, 나중에 이를 수학적 모델화의 단계에서 표현의 수단으로 그래프를 도입하는 것이 바람직하며, 또한 학생들에게 약간의 추론능력이 요구되는 형태로 변환하여 제시하는 것이 바람직하다. 즉, '어떤 모임에서 모든 참석자가 악수를 한 총 회수는 그 모임에서 일어난 악수의 회수의 2배이다' 보다는 '어떤 모임에서 홀수 번 악수한 사람의 수는 짝수이다'로 도입한다.



[그림 II-2] 일반화

즉, 이중계수와 관련된 교과서 내용을 분석, 공통적 특성을 추출(제약조건) 구조화, 각 제약조건에 따른 변화 조사의 순서(분석, 추론), 반성(결과의 다양한 해석) 및 응용의 순으로 이중계수의 문제를 해결한다.

① 교과서 분석: 이중계수의 문제(악수보조정리)는, 대상들 간에 발생한 관계의 회수를 설명할 수 있는 가장 기초적인 네트워크 문제인 만큼, 적절한 교수학적 변환[5]을 거쳐 제 7차 교육과정 초등 수학교과서에서 주로 문제해결 영역을 통하여 많이 도입하고 있으며, <6-나>의 문제해결의 식 만들기 전략(각 대상이 행한 행위의 합을 2로 나눈다)에서 이러한 의도가 드러난다([그림 II-3] 참조).


3 식을 만들어 해결하여 보시오.

· 한 반은 몇 번의 경기를 하게 됩니까?

· 다른 반과 한 번씩 경기를 하기로 했는데, 겹치는 경기가 있다면 어떻게 처리해야 합니까?

· 겹치는 경기를 한 번으로 생각한다면, 일곱 반은 모두 몇 번의 경기를 하게 됩니까?

· 위의 생각을 식으로 만들어 계산해 보시오.

· 총 경기 수는 얼마입니까?

[그림 II-3] 이중계수의 문제
(교육부, 2004, <6-나>, p. 135)

실제로, 이중계수 문제는 현행 초등학교 수학교과서 <4-나> 단계에서 도입하여 <6-나> 단계까지에 걸쳐 다루고 있으며, 개략적으로 그 유형을 살펴보면 다음과 같다(최근배, 강문보, 2005).

· 경기의 총 회수
· 주어진 점들을 연결하는 선분의 총 개수
· 악수의 총 회수
· 다각형에서 대각선의 총 개수

② 개념적 구조화: 초등 수학교과서에 나타난 이중계수 문제들의 유형을 분석하여 공통적인 특징을 추출해 보자.[6]

(P1) 임의의 서로 다른 두 대상은 행위에 참석한다.
(P2) 서로 다른 두 대상간의 행위는 단 한번 일어난다.

이것은 자연현상의 수학적 추상화 이전에 나타날 수 있는 자연에서 얻은 직관적 추상화로 볼 수 있다(김진호, 2005).

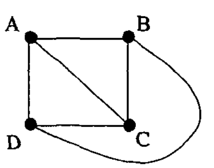
③ 수학적 추상화: 자연에서 관찰되는 현상을 수학적으로 모델화 작업을 한다. 이때, 수학적 모델은 다양하게 나타날 수 있으며, 특히 대상과의 관계를 나타내는 네트워크의 문제는 주로 그래프로 모델화된다. 이 경우는 대상간의 연결 상태만을 생각하기 때문에 '유연하다' 라는 과점에서의 일차원 위상이라고 볼 수 있다.

또한 표 모델은 초등 수학에서 여러 가지 문제의 문제해결전략의 관점에서 많이 사용되어

5) 교육적 의도를 가진 지식의 변형은 어느 것이나 교수학적 변환(didactic transposition)이라고 할 수 있다(강완, 1991, p. 72). 우리의 경우 지식이란 오일러의 악수보조정리라고 할 수 있다.
6) 특수한 대상들이 공통으로 만족하는 성질들을 추상화하여 하나의 개념적으로 구조화하는 능력은 학습자의 인지 수준을 고려하여 지도하여야 한다(강옥기, 2003).

지고 있지만, 이중계수 문제의 경우에는 문제 해결 전략으로 다루고 있지는 않다. 따라서 이중계수를 다룰 때, 표 모델의 경우는 초등학생에게는 다소 생소할 수 있으며, 적절한 발문이 필요할 지도 모른다. 예를 들어, "각 대상을 중심으로 한 관계의 정보를 요약하는 방법은 없을까?"

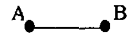
조건 (P1)과 (P2)를 만족하는 대상들 모임에서의 관계를 수학적으로 모델링(각 대상은 꼭지점, 행위는 변으로)을 하면, 연결 단순그래프[7]가 되며, 각 꼭지점(대상)의 인접성을 표(이하 인접성 표[8])로 나타내면 대각선의 각 원소가 0이고 그 외의 다른 모든 원소는 1이 된다([그림 II-4] 참조).



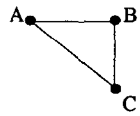
	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	1	1
C	1	1	0	1
D	1	1	1	0

[그림 II-4] 수학적 추상화의 두 모델

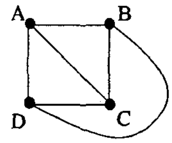
④ 분석: 초등수학에서 다루고 있는 이중계수 문제를 해결하기 위한 두 수학적 모델인 [그림 II-4]에 주어진 그래프 및 그 인접성 표와 현행 초등수학교과서에서 도입하여 다루고 있는 세 가지 전략(그림 그리기, 규칙 찾기, 식 만들기)과의 관계를 분석한다. 실제로, 그래프는 그림 그리기 전략과, 표는 규칙 찾기 및 식 만들기 전략과 관계가 있다. 또한 인접성 표의 상삼각(upper triangle, 대각선의 위쪽) 분석해 보면, 결국 현행 초등학교에서 다루고 있는 이중계수 문제의 답은 삼각수(triangular number)임을 알 수 있다([그림 II-5] 참조).



	A	B
A		1
B		



	A	B	C
A		1	1
B			1
C			



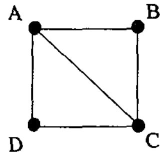
	A	B	C	D
A		1	1	1
B			1	1
C				1
D				

[그림 II-5] 삼각수

제 7차 초등학교 수학교과서에서 많이 다루고 있는 이중계수의 문제는 일반적인 경우가 아니라, 앞에서 언급한 것처럼 제약 조건 (P1)과 (P2)하에서 다루고 있음을 알 수 있다. 이러한 제약조건이 없는 일반적인 경우의 이중계수(하나의 행위를 두 번 헤아리기)문제를 학생들에게 인식시키기 위한 한가지의 방안은 제약조건의 변화와 그에 따른 인접성 표의 변화를 통하여 이중계수의 원리를 탐구할 수 있는 학습자료를 제공하는 것이다. 즉, [그림 II-4]와 같은 인접성 표를 표준형(standard form)으로 생각하고, 제약 조건 (P1)과 (P2)의 변화에 따른 인접성 표의 변화를 통하여 이중계수의 원리를 탐구한다.

먼저, 제약 조건 (P1)의 변화, 즉, 행위에 참석하지 않은 두 대상이 있는 경우(그래프에서 변을 제거)와 이에 따른 인접성 표의 변화(두 개 1을 0으로)를 탐구하여 이중계수의 원리를 인식한다([그림 II-6] 참조).

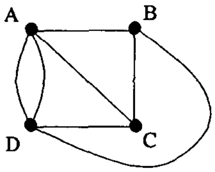
7) 고리(loop)와 다중 변(multiple edge)이 없는 그래프를 의미한다. 좀더, 구체적으로 이러한 그래프를 완전그래프(complete graph)라고 한다.
8) 일반적으로, 인접행렬(adjacency matrix)을 의미한다.



	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
D	1	0	1	0

[그림 II-6] (P1)의 변화와 인접성 표의 변화

이제, 제약 조건 (P2)의 변화를 살펴보자. 즉, 두 대상간의 행위가 여러 번 있는 경우의 이중계수 원리를 살펴본다. 두 대상 사이의 행위가 1회 더 발생하면(그래프에서 주어진 두 꼭지점 사이에 변이 하나 더 생성), 인접성 표에서 두 대칭적(대각선을 기준으로) 위치에 있는 부분의 수가 각각 1씩(이중계수) 증가된다([그림 II-7] 참조).

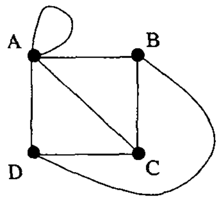


	A	B	C	D
A	0	1	1	2
B	1	0	1	1
C	1	1	0	1
D	2	1	1	0

[그림 II-7] (P2)의 변화와 인접성 표의 변화

끝으로, 그래프에서 고리가 있는 경우를 생각해보자. 이러한 경우에 학생들을 위한 적절한 학습자료에는 대상들이 자기복제가 가능한 세포분열 등을 생각할 수 있다.

이와 같은 문제는 인접성 표의 대각선 부분의 변화를 야기한다. 구체적으로, 고리가 하나가 생기면, 이에 대응하는 대각선 원소의 값이 2로 변한다. 즉, 고리 하나에 2의 변화(이중계수)가 생긴다([그림 II-8] 참조).



	A	B	C	D
A	2	1	1	1
B	1	0	1	1
C	1	1	0	1
D	1	1	1	0

[그림 II-8] 고리가 있는 경우와 인접성 표

⑤ 악수보조 정리의 추론 및 증명: 이러한 탐구활동을 통하여 인접성 표에서 각 행의 합의 의미 및 모든 구성 요소들의 합과 대상들의 모임에서 일어난 행위와의 관계를 통해서, 악수보조 정리를 인식시킬 수 있다(<표 II-1> 참조).

⑥ 반성 및 응용: <표 II-1>에 주어진 식으로부터 그래프와 관련된 다양한 추론활동을 한다. 예를 들어,

- 임의의 그래프에서, 모든 꼭지점의 차수의 합은 짝수이다.

<표 II-1> 악수보조정리(최근배, 강문보, 2005)

	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n		행의 합
x_1						$\rightarrow$	$d(x_1)$
x_2						$\rightarrow$	$d(x_2)$
x_3							$d(x_3)$
$\vdots$				$\ddots$			
x_n						$\rightarrow$	$d(x_n)$

$$d(x_1)+d(x_2)+\cdots+d(x_n) = 2 \times e$$

여기서 e는 모임에서 일어난 악수의 총수

· 임의의 그래프에서, 홀수차수인 꼭지점의 개수는 짝수이다.
· 꼭지점의 개수가 v이고, 각 꼭지점의 차수가 r인 그래프는 정확히

$$\frac{1}{2}\times v\times r$$

개의 변을 가진다.

만일, n명의 모임에서 제약 조건 (P1)과 (P2) 하에 악수의 행위가 일어났다면, 인접성 표는 표준형이 되며, 따라서 각 행의 합 $d(x_i)$은 $(n-1)$, 인접성 표의 모든 원소의 합(<표 II-1> 에서 좌변의 합)은 $n(n-1)$이 된다. 따라서 n명의 모임에서 일어난 악수의 총 수는

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

위에 주어진 식과 유사한 형태의 식을 교과서에서 많이 접한다. 여기서, 중요한 점은 식 자체가 아니라 주어진 식을 이산수학적 사고를 통하여 해석할 수 있느냐하는 것이다. 현재의 우리 초등 수학교과서의 서술방식은 귀납적 사고 활동을 통하여, 결과(식)를 유도하게 된다. 그러나 시간이 지남에 따라 학생들에게 남는 것은 결과(식)뿐인 것을 자주 경험한다. 즉, 식 자체가 개념이 없는 도구로 전락한다는 것이다. 따라서 주어진 식으로부터 그 개념을 해석할 수 있는 활동 또한 필요하다. 조합론에 흔히 나타나는 항등식을 설명할 때, 「좌변 또는 우변을 변형하여 다른 쪽과 같다」라는 식으로 설명하는 방식을 취하는 경우를 학교현장에서 자주 접한다.[9] 이러한 방식은 이산수학의 근본적인 사고의 방식은 아니다. 좌변과 우변에 주어진 두 식의 의미를 이산수학적으로 해석하여 같음을 설명하는 것이 수학적 센스를 길러 주는 이산수학을 경험하도록 하는 방법인 것이다.

이제, 볼록다각형의 대각선 개수를 구하는 문제를 악수보조 정리를 이용하여 생각해보자. 이러한 경우에는 서로 다른 두 대상이 악수(대각선)를 하지 않는 경우가 발생한다. 즉, 서로 인접한 꼭지점들 사이의 연결성은 대상에서 제외된다. 각 꼭지점을 기준으로 생각하면, 2개씩 제외되며, 따라서 인접성 표(표준형)의 각 행에서 0이 2개씩 더 생긴다. 따라서 주어진 n각형의 대각선의 수는

$$\frac{n(n-1)-2n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$

앞에서 논의한 내용을 중심으로 한 수업을 교사와 학생들 사이의 대화 형식으로 구성해보자.[10]

먼저, 학생들에게 개인이 악수한 회수를 상기시키면서 악수를 하는 활동을 한다.

교사: 어떤 모임에서 일어난 악수의 회수와 관련된 수학적 사실들을 추측해보세요.
학생들: ???
교사: 홀수 번 악수한 사람의 수는 홀수일까? 짝수일까?
승환: 홀수 번 악수를 한 사람은 손들어 보세요. 홀수 번 악수한 사람의 수는 짝수 같은 데요?[11]
교사: 우연히 그렇게 된 것은 아닌가요? 선생님은 홀수도 될 것 같은데?[12]
승환: 선생님, 두 명의 학생이 서로 한번만 악수를 하면 각 학생은 모두 한 번씩 악수를 하게 되니까 홀 수번 악수한 학생은

---

9) 예를 들어, ${}_nC_r={}_{(n-1)}C_r+{}_{(n-1)}C_{(r-1)}$
10) 실제로, 제주대학교 과학영재교육센터에서 운영하고 있는 초등수학반(심화과정)학생을 대상으로 2005년 6월 11일 프로그램에서의 활동을 수정 보완한 것이다.
11) 이 추측을 얻기 위해서 악수하는 활동과 홀수 번 악수한 사람의 수는 홀수일까? 짝수일까?라는 유도질문을 하였다. 활동에 의한 원시적 추측이라고 볼 수 있다.
12) 반례와 귀납적 추론을 얻기 위한 질문이다.

2명인데요. 2는 짝수잖아요.

자은: 선생님, 3명인 경우는 홀수 번 악수한 사람이 없어요. 0은 짝수이니까 이 경우도 승환이의 추측이 맞아요.

학생들: 4명인 경우도, 5명인 경우도...맞아요.[13)]

교사: 여러분들의 추론은 모든 학생들이 한 번씩 만 악수를 한 경우가 아닌가요? 그러면, 승환이의 추론을 '모든 학생들이 한 번씩만 악수를 한 경우에 홀수 번 악수한 사람의 수는 짝수이다'로 바꾸어서 생각해 봅시다. 어떻게 해결하면 될까요? 계속해서 학생수를 한명씩 늘이면서 생각해볼까요?[14)]

학생들: ??? 끝없이...

교사: □명의 학생이 있다면, 각 학생은 몇 번씩 악수를 하게 될까요?

학생들: □-1 번

교사: 이제, 승환이의 추측을 추론해 보세요.

희은: 짝수명의 학생이 있다면, 각 학생 모두는 홀수번의 악수를 하니까 홀수 번 악수한 학생은 짝수입니다.

혜지: 홀수명의 학생이 있다면, 각 학생 모두는 짝수번의 악수를 하니까 홀수 번 악수한 학생은 없습니다.

교사: 우리가 어떤 모임에 가면 항상 모든 사람들과 악수를 하나요?[15)]

학생들: 아니요. 아는 학생들끼리만 악수를 하는데요. 전혀 악수를 하지 않는 경우도 있어요. 같은 학생과 장난으로 여러 번 악수를 하는 경우도 있는데요.

교사: 이러한 경우에도 승환이의 추측이 맞을까요?

학생들: ???

교사: 앞에서 우리가 공부한 것을 이렇게 생각해봅시다. 모임의 참석한 학생을 점(꼭지점)으로 표시하고, 두 학생이 악수를 했으면 선(변)으로 연결하여 봅시다. 어떤 모양이 되나요? 이러한 모양의 그림을 그래프라고 합니다([그림 II-4] 참조). 그래프에서 변의 수는 무엇을 의미합니까?[16)]

학생들: 악수의 회수요.

교사: 그럼, 우리교과서에 나오는 악수, 인사, 운동경기 등과 같은 회수를 묻는 문제에 그래프가 좋은 문제해결전략이 되겠네요?

학생들: 네.

교사: 그래프 대신에 사용할 수 있는 전략은?

학생들: 규칙 찾기, 식 만들기...또?[17)]

교사: 표 만들기 전략은 어떤가요? 각 학생들을 중심으로 표를 만들 수는 없을까요? 두 학생이 인사를 했으면 1로 생각하세요.

미정: 제가 만들어 보겠습니다([그림 II-4]).

교사: 어떤 규칙이 있나요?

학생들: 대각선은 모두 0이고, 그 나머지는 모두 1이네요.

교사: 문제를 해결하는 데, 표가 그래프보다 유리한 점이 있나요?

학생들: 아니요. 회수를 찾을 때 그래프는 바로 볼 수 있어서 좋아요.

교사: 음. 그래도 표는 각 개인이 악수를 한 회수의 정보가 나타나있지 않나요.

학생들: 네.

교사: 우리가 해결하려는 문제를 생각해봅시다. 만약, 악수를 하지 않은 두 학생이 있다면 어떻게 될까요? 그래프의 변화와 표의 변화를 생각해보세요.

승찬: 그래프에서는 변이하나 없어지고, 표에서는 없어진 변에 해당되는 대각선을 기준으로 대칭이 되는 두 개의 칸이 0이 됩니다([그림 II-6]).

교사: 만약, 같은 두 학생이 여러 번 악수를 하는 경우는 어떻게 될까요?

승보: 그래프에서는 두 학생에 해당하는 꼭지점 사이에 악수의 회수만큼의 변이 더 생기고, 표에서는 대각선을 기준으로 대칭이

13) 구체적인 예들에 의해서 원시적 추측을 검사하고 있다.
14) 예를 통하여 검사된 원시적 추측을 명확히 수정하고 증명을 유도하고 있다.
15) 일반적인 경우의 악수보조정리를 알아보기 위한 유도질문이다. 즉, 모든 학생들이 한 번씩만 악수를 한 경우에 홀수 번 악수한 사람의 수는 짝수이다라는 문제의 일반화이다.
16) 수학적 추상화의 설명하고 있다.
17) 초등수학교과서에는 표 만들기 전략은 다루지 않는다.

되는 두 개의 칸이 두 학생사이의 악수회 수 만큼의 수로 변화됩니다([그림 II-7]).

교사: 이러한 경우도 생각해 봅시다. 학생 스스로가 왼손과 오른손을 이용해서 악수를 했을 때의 경우도 악수로 생각하면 어떤 변화가 생길까요?

학생들: ???

교사: 그래프에서는 고리가 생기고, 표에서는 대각선이 변화가 있을 것 같은데?

형인: 표의 대각선에는 어떤 수를 써넣어야 할지 모르겠습니다.

교사: 음. 우리가 표에 정보를 담을 때 어떤 규칙으로 했나요?

형인: 표에는 두 학생 A와 B가 악수를 했다면, A가 B와 악수한 경우와 B가 A와 악수한 경우 모두를 생각했습니다.

교사: 그러면, 스스로가 악수를 한 경우에도 왼손이 오른손과 악수를 한 경우와 오른손이 왼손과 악수한 경우 모두를 생각해서 정보를 표에 담아야하지 않을까요?

학생들: 스스로 악수한 회수의 2배 만큼을 써넣으면 될 것 같아요([그림 II-8]).

교사: 네. 맞습니다. 이제, 이 모든 것을 정리하여 봅시다.

교사: 표에서 행의 합은 무엇을 의미합니까?

학생들: 각 학생들이 악수를 한 총 회수입니다.

교사: 표에 있는 모든 수를 합은 무엇을 의미합니까?

학생들: 각 학생들이 악수를 한 총 회수의 합입니다.

교사: 각 학생들이 악수를 한 총 회수의 합과 모임에서 일어난 악수의 총 회수 사이의 관계를 찾을 수 있나요.

학생들: 네.

교사: 여러분이 찾은 관계식을 이용해서 일반적인 경우의 승환이의 추측을 추론해 보세요.

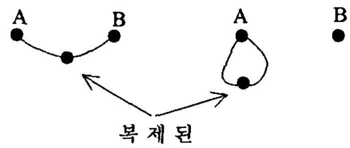
구름: 식에서 오른쪽은 2의 배수이니까 항상 짝수고, 따라서 왼쪽도 짝수이어야 하니까 홀수 번 인사를 한 학생의 수는 항상 짝수가 되어야 합니다.

나. 복제게임

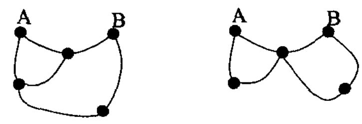
다음에 주어진 게임은 이중계수의 원리와 규칙성의 추론능력을 기르기 위한 하나의 활동이다.[18] 여기에서의 수업모형은 Polya의 문제해결의 단계와 유사하다.

· 개념: 이중계수의 원리와 규칙성 찾기
· 능력: 이중계수의 원리 인식하기
· 활동: 이 게임은 2 명씩 짝을 지어 할 수 있는 놀이 게임이며, 목적은 이중계수 원리의 개념과 규칙성을 인식하는 데 있다.
· 준비물: A4 용지 여러 장, 연필
· 방법:

1. 먼저, 준비한 종이 위에 두 개의 큰 점을 찍어라.
2. 두 명이 차례로 두 점을 선으로 교차점이 없이 연결하고, 연결선의 중점에 점(복제된 점)을 찍는다. 한점을 고리로 연결하는 것도 가능하다(자기복제).



3. 각 점에서의 차수는 3이하가 되도록 연결해야 한다.



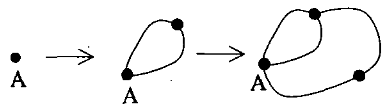
가능 불가능

4. 승자는 마지막으로 정당하게 선을 연결한 사람이다.
5. 세 점, 네 점, 다섯 점을 가지고 위와 같은 활동을 반복한 후 규칙성을 찾는다.

18) 이 게임은 NCTM Student Math Notes(May/June 1998)의 자료인 *Networks and the Game of Sprouts*를 참고로 하여 구성하였다.

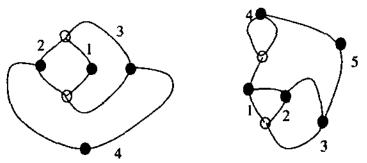
점의 수	초기에 가능한 연결 회수	승자가 결정 날 때까지의 최대연결 회수	승자가 결정 났을 때의 점의 수	승자
1				
2				
3				
4				
5				
6				
⋮				

① 게임의 이해: 예를 들어, 점이 하나인 경우에는 다음과 같다.



따라서 점의 수가 하나인 경우에는 초기에 가능한 연결회수는 1이며, 승자가 결정 날 때까지의 연결회수는 2이며, 두 명 중 나중에 게임을 시작한 사람이 이긴다.

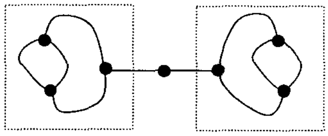
② 귀납적 추론과 분석: 이 게임에서 점의 수가 2개 이상의 경우에는 교차점이 없어야 한다는 조건 때문에 우리가 원하는 결과를 얻을 수 없는 경우도 발생한다. 예를 들어, [그림 II-9]는 점의 수가 2개인 경우의 게임에서 나타날 수 있는 것들이다. 두 경우 모두 승자가 결정 난 경우인데, 좌의 경우는 최대 연결회수는 아니다. 따라서 학생들은 주어진 점들을 가지고 여러 번의 게임을 한 후 결과에 대한 다양한 분석이 뒤 따라야한다.



[그림 II-9] 연결회수

③ 반성 및 체계적 분석(증명): 앞선 귀납적 추론을 정당화하기 위하여 게임을 체계적으로 분석한다.

- 점의 수가 하나 많아지면 초기에 가능한 연결 회수는 어떻게 변할까? 복제와 자기복제의 의미는?
- 최대연결 회수로 승자가 결정 났을 때 그래프의 특징은? 최대연결 회수를 찾기 위한 게임 전략은?
- 점의 수가 하나인 경우를 가지고 규칙성을 추론할 수는 없을까?



앞에서 논의한 내용을 중심으로 한 수업을 교사와 학생들 사이의 대화 형식으로 구성해보자.

교사: 이 게임은 항상 가능할까요?
학생들: 가능할 것 같은데요. 각 점에서의 차수가 3이하가 되어야 하니까요.
교사: 그럼 승자가 규칙적으로 나타나는 게임일까요?
학생들: ???
교사: 게임을 점의 개수에 따라서 해 봅시다. 먼저, 점이 하나인 경우에 두 사람씩 짝을 지어 게임을 하고 결과를 알아보세요.
학생들: 선생님, 나중에 게임을 한 사람이 이기는데요.
교사: 이제, 점의 개수가 2개인 경우에 게임을 해보세요.
지은과 승환: 먼저 게임을 한 사람이 이깁니다.
희은과 자은: 나중에 게임을 한 사람이 이기는데요.
교사: 그래요. 먼저 게임을 한 사람이 이기는 조는 손들어 보세요. 게임의 회수가 몇 번인가요?
A조들: 5번인데요.
교사: 그럼. 나중에 게임을 한 사람이 이기는

조는 손들어 보세요. 게임의 회수가 몇 번인가요?

B조들: 4번인데요.

교사: A조와 B조의 그래프 형태를 분석해 보세요.

학생들: A조는 차수가 2인 점이 하나인데 B조는 차수가 2인 점이 2개가 있어요.

교사: 왜, B조는 차수 2인 두 점을 이을 수 없었나요?

B조들: 교차점이 생기니까요?

교사: 이제, 어느 조의 답이 타당한가요. 게임의 조건(방법 5의 표 상기)을 잘 생각해보세요.

학생들: A조가 맞아요. 연결의 최대회수를 찾아야 하니까요.

교사: 이제, 점의 수가 3, 4, 5인 경우에 표를 구성하고 규칙성을 찾아보세요.

학생들: 찾았습니다.

교사: 각 조의 그래프가 모두 같은가요?

학생들: 아니요.

교사: 이제, 좀더 체계적으로 게임의 결과를 추론해봅시다.

학생들: ???

교사: 점의 수가 하나 많아지면 초기에 가능한 연결 회수는 어떻게 변할까?

승환: 주어진 점의 수가 2개인 경우에 새로운 점이 하나 추가되면 3이 추가됩니다. 새로운 점에서의 자기복제 더하기 주어진 두 점과 새로운 점을 연결하는 수만큼 증가합니다.

희은: 주어진 점의 수가 3개인 경우는 자기복제 하나 더하기 3, 그래서 4가 증가합니다.

교사: 정리하면, 새로운 점에서의 자기복제 수 1 더하기 주어진 점의 수 (주어진 각 점과 새로운 점을 연결하는 회수)만큼 연결 회수가 증가합니다.

교사: 이제, 승자가 결정 날 때까지의 최대연결 회수와 승자가 결정 났을 때의 점의 수를 찾아내는 규칙과 관련된 추론을 해봅시다.

교사: 먼저, 앞에서 활동한 게임에서 최대회수로 승자가 결정된 그래프의 특징은?

학생들: 차수가 2인 점의 수는 하나뿐입니다.

교사: 그럼, 점의 수가 여러 개인 경우는 점의 수가 하나인 단순한 경우로부터 추론할 수는 없을까요?

학생들: ???

교사: 먼저, 점의 수가 하나인 경우의 그래프를 두 개 그리고 게임의 조건(차수가 3이하)에 맞게 연결해보고 특징을 찾아보세요.

학생들: 차수가 2인 점의 수는 하나뿐입니다.

교사: 결과로 나타난 그래프는 어떤 경우의 게임에 해당하나요?

학생들: 점이 두 개인 게임과 관련됩니다.

교사: 이러한 것을 토대로 규칙성을 찾을 수 있을 까요?

학생들: 예

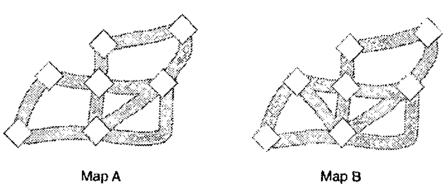
다. 한붓그리기

네트워크는 [그림 II-10]과 같이 효율성 문제를 해결하는 사용된다(NCTM, 2000, p. 238). 즉, 네트워크는 문제를 해결하는데 필요한 가시적인 수학적(기하적인) 모델로 사용될 수 있다. 역사적으로, 한붓그리기는 오일러의 산책길 문제가 그 원형이다. 즉, [그림 II-11]에서 "7개의 다리를 꼭 한번씩만 건너는 산책이 가능할까?" 이 네트워크의 문제는 [그림 II-11]에서와 같이 현실에서의 문제가 직관적 추상화를 걸쳐 수학적으로 추상화(그래프)되고, 이로부터 추상화된 것이 수학적 사고의 대상이 되며, 이러한 과정에서 현실에서의 산책길 문제가 그래프(수학적 대상)에서의 '한붓그리기 문제'로 전환된다.

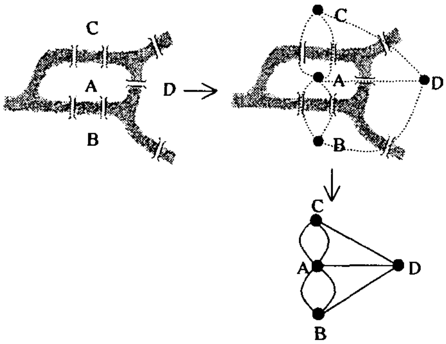
Caroline's job is to collect money from parking meters. She wants to find an efficient route that starts and ends at the same place and travels on each street only once.

A. The streets she has to cover are shown in map A. Find and trace such a route for her.

B. A new street, shown in map B, may be added to her route. Can you *find an efficient route that includes the new street?*



[그림 II-10] 효율성 문제

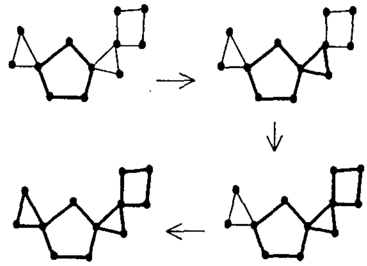


[그림 II-11] 오일러 산책길과 한붓그리기

이산수학에서 네트워크와 관련된 문제(최소연결 문제, 최단경로 문제 등)와 마찬가지로 한붓그리기의 문제는 문제해결을 위한 알고리즘을 찾는 것이 중요하다. 즉, 학생들에게 알고리즘적 사고를 요구한다는 점이다. 그러나 대다수의 학생들은 이와 같은 종류의 문제를 단지 퍼즐처럼 다루는 경향 이 있으며, 학생들의 답은 우연의 산물인 경우가 많다는 것이다. 실제로 학생들이 탐구활동을 통해서 얻어야 할 것은 한붓그리기 수순(알고리즘)을 발견 할 수 있어야 한다는 점이다. 따라서 한붓그리기와 관련된 학습프로그램은 한붓그리기의 수순을 찾아가는 형태의 탐구학습활동의 문제로 구성되어야 한다.

한붓그리기 문제는 오일러 회로(출발점과 도착점이 같은 경우)인 경우와 오일러 길(출발점과 도착점이 다른 경우)인 경우의 두 가지를 생각할 수 있으며, 그 수순을 찾을 수 있는 한 가지 방안을 논의해보자. 이 경우 소집단 활동이 효율적일 수 있다.

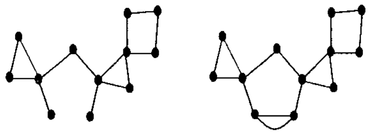
실제로, 오일러 회로의 수순을 찾는 기본적인 아이디어는 「초기 회로를 찾고, 이 회로를 점차적으로 확장한다.」는 것이다([그림 II-12] 참조). 귀납적인 방식으로, 즉, 단순한 그래프에서 좀더 복잡한 그래프로, 탐구학습 프로그램을 구성하고 수순을 찾는 발견학습이 되도록 해야 한다.



[그림 II-12] 한붓그리기의 수순 찾기의 기본 아이디어

다음은 한붓그리기와 관련하여 Lakatos의 수학적 발견의 논리인 '추측과 반박' 의 방법을 기초로 한 학습프로그램의 구성 및 순서의 예이다.

1. 먼저, 오일러 회로인 경우를 생각한다. 다양한 형태의 그래프를 제공하고, 그 중에서 한붓그리기 가능인 그래프의 특징을 분석하여 가설을 만들도록 한다.
2. 학생 스스로가 설정한 가설에 오류가 있다면 교사는 반례를 제시하고 가설을 수정하도록 한다. 만일 소집단 활동을 한다면, 집단별로 만든 가설을 비교하는 활동(반례를 만드는 활동)을 통해서 가설의 타당성을 검정할 수 있다.
3. 알고리즘을 찾는 활동을 한다. 이 경우는 일반적인 수순을 찾는 실제적 활동을 의미한다. 만일, 학생들이 어려움을 겪는다면, 실생활의 예를 제시한다. 이를 테면, 학생들에게 등·하교시의 동선을 이야기하도록 한다. 이를 정리해서, "나는 아침에 집에서 학교에 갔다가 오후에 집으로 돌아온다." 라는 문장을 사용하여, 동선을 확장하는 활동을 해본다. 예를 들어 "나는 아침에 집에서 학교로 가는 '도중에' 문방구를 들려 학교에 갔다가 오후에 집으로 돌아온다." 이와 같은 문장을 그래프화하여 분석을 해보도록 한다.
4. 오일러 길의 문제는 오일러 회로의 경우로 환원하는 문제로 다룬다. 이를 테면, [그림 II-13]과 같이 오일 회로가 가능한 그래프에서 하나의 변을 제거하거나 첨가하는 활동을 통해서 변화된 그래프를 분석해본다.



[그림 II-13] 오일러 길 찾기의 아이디어 만들기

5. 앞선 활동들을 정리하고, 반성해본다. 반성의 단계에서는 역 문제도 다루어봄직하다.

앞에서 논의한 내용을 중심으로 한 수업을 교사와 학생들 사이의 대화 형식으로 구성해보자.[19] 먼저, 간단한 형태의 여러 가지 그래프를 학생들에게 제공하고, 학생들을 몇 개의 소그룹으로 나눈다.

교사: 한붓그리기가 가능한 그래프를 찾아보세요.

교사: 이제, 그러한 그래프의 특징을 찾아보세요.

학생들: ???

교사: 꼭지점의 차수에 주목하면서 그룹별로 가설을 만들고, 비교해보세요.

학생들: 모든 꼭지점의 차수가 짝수인 그래프는 한붓그리기가 가능한 것 같은데...그리고 홀수점의 개수가 2개인 경우도...

교사: 그래요. 먼저, 모든 꼭지점의 차수가 짝수인 그래프를 생각해봅시다. 그러한 그래프는 항상 한붓그리기가 가능할까요?

교사: 모든 꼭지점의 차수가 짝수인 다음과 같은 복잡한 그래프의 한붓그리기 수순을 찾아보세요.

학생들: 찾았습니다.

교사: 그룹별로 비교하면서 한붓그리기 수순의 특징을 찾아보세요.

학생들: 잘 모르겠는데요.

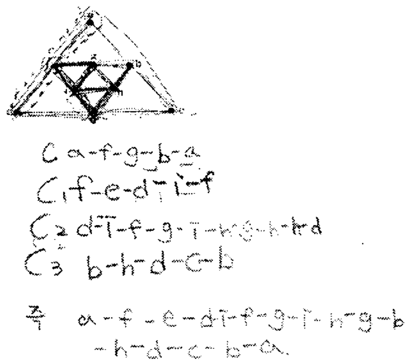
교사: 음. 이렇게 생각해봅시다. "나는 아침에 집에서 학교에 갔다가 오후에 집으로 돌아온다." 라는 문장을 가지고 동선을 확장하는 활동을 생각해봅시다.

그룹A: "나는 아침에 집에서 학교로 가는 도중에' 문방구를 들려 학교에 갔다가 오후에 집으로 돌아온다."

그룹B: "나는 아침에 집에서 학교로 가는 도중에' 문방구를 들려 학교에 갔다가 오후에 집으로 돌아오는 도중에 친구집에 갔다가 집에 온다."

교사: 이제, 단순한 동선과 복잡한 동선을 그래프로 표현하고 아이디어를 찾아보세요.

승환: 먼저, 한점에서 출발하여 다시 그 점으로 돌아오는 오일러회로를 찾습니다. 그리고 이 회로에 붙어있는 점에서의 오일러회로를 찾습니다. 이런 방법으로 수순을 찾아가면 됩니다([그림 II-14] 참조).



[그림 II-14] 한붓그리기 수순

교사: 그럼. 승환이의 방법으로 조금 전에 제시한 그래프의 한붓그리기 수순을 찾아보세요.

학생들: 찾았습니다.

교사: 이제, 홀수점의 개수가 2개인 경우의 그래프를 생각해보세요. 이 경우 어떻게 한붓그리기를 했나요.

학생들: 하나의 홀수점에서 출발하여 또 다른 하나의 홀수점에서 끝났는데요.

교사: 그래요. 이 경우 일반적인 수순을 어떻게 찾으면 될까요?

학생들: ???

19) 제주대학교 과학영재교육센터에서 운영하고 있는 초등수학반(심화과정)학생을 대상으로 2005년 7월 28일 프로그램에서의 활동의 예이다.

교사: 모든 꼭지점의 차수가 짝수인 그래프의 경우의 수순찾기 전략을 사용할 수 없을까요?

학생들: 짝수와 홀수점 2개...

교사: 아까 전에 선생님이 제시한 그래프에서 하나의 변을 제거하거나 어느 두 꼭지점을 변으로 연결해보세요. 그래프의 특징이 어떻게 변하나요?

학생들: 홀수점의 수가 2개가 되는데요.

교사: 이제 아이디어를 찾았나요?

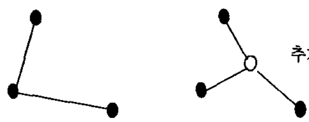
희은: 홀수점이 두 개인 경우의 그래프를 두 홀수점을 가상의 변으로 연결한 후, 모든 꼭지점의 차수가 짝수인 그래프의 경우의 수순찾기 전략을 사용하면 될 것 같은데요.

교사: 희은이의 전략을 사용하여 수순을 찾아보세요.

라. 도로망 문제

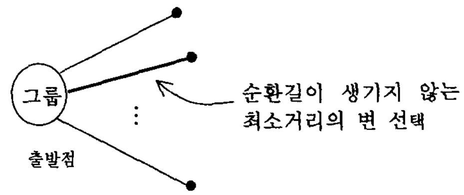
도로망의 문제는 우리가 실세계에서 흔히 접할 수 있는 현실에서의 네트워크문제로, 이를 수학적으로 추상화 하면 수학적 사고의 대상인 그래프에서의 문제로 전환된다.

이제, 이와 관련된 문제 중에서 몇 개의 마을을 잇는 최단의 직선도로망을 찾는 문제를 생각해보자.



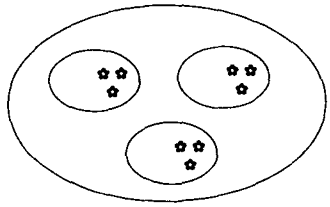
[그림 II-15] 직선도로망

이것을 해결하기 위한 방법은 [그림 II-15]에서와 같이 두 마을을 직선만으로 연결하는 '최단도로망' 과 몇 개의 마을 또는 지점을 추가하여 직선으로 마을을 연결하는 '슈타이너 도로망' (Robert, 1999)을 응용하는 두 가지의 경우를 생각할 수 있다. 최단도로망의 문제는 그래프 이론에서의 「최소연결문제」의 특수한 경우로 greedy 알고리즘을 이용하면 쉽게 해결된다. 즉, 찾을 수 있는 연결 직선 중에서 가장 짧은 것을 먼저 긋고, 다음으로 각 단계에서 나머지 중에서 가장 짧은 직선을 추가하되, 순환길이 생기지 않도록 모든 마을이 연결될 때까지 그 활동을 되풀이 한다([그림 II-16] 참조). [그림 II-16]과 같이 greedy 알고리즘은 그룹화(이미 선택한 직선과 점)하여 이를 다시 출발점으로 인식할 수 있는 탐구학습 활동이 요구된다. 이러한 재귀적 사고활동이 알고리즘적 사고의 핵심이라고 할 수 있다.



[그림 II-16] greedy 알고리즘

이를 위해서, 재귀적 사고활동의 예를 초등수학에서 살펴볼 필요가 있다. 예를 들어, 두 자연수의 곱을 지도하는 경우에 이러한 활동이 나타난다([그림 II-17] 참조).



[그림 II-17] 3×3

greedy 알고리즘에서 순차적으로 도로망을 연결할 때, 고려해야 할 두 가지의 핵심사항은 다음과 같다.

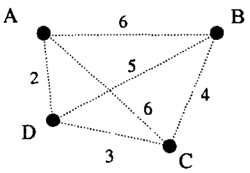
(G1) 올림차순으로 길의 거리를 정렬하기

(G2) 다음 길의 선택에 순환길 여부를 인식하기

위의 두 가지 사항 중에서 (G1)의 경우는 순차적으로 찾아가는 활동이라는 관점에서 학생들의 활동을 통한 인식에는 큰 어려움이 없다. 그러나 (G2)의 경우에는 약간의 사고활동을 요구할 수 있으며, 최단도로망이라는 개념과도 직결된다. 따라서 (G2)의 경우에는 소집단 활동을 통한 의사소통이 도움을 줄 수 있다.

한편, 이러한 두 가지의 개념은 효율적인 컴퓨터 실행에 적절하지는 않다. 이 두 가지를 극복할 수 있는 방법은 각 길의 거리 값을 구성원소로 가지는 무게행렬(<표 II-2> 참조)을 이용하는 것인데, 이 알고리즘을 Prim의 알고리즘이라고 한다.

<표 II-2> 무게행렬



	A	B	C	D
A	-	6	6	2
B	6	-	4	5
C	6	4	-	3
D	6	5	3	-

<표 II-2>에 주어진 그래프의 최단길이의 도로망을 찾는 무게 행렬의 변화(임의의 꾝지점을 선택, B라고 하자)는 다음과 같다.

	A	B	C	D
A	-	6	6	2
B	6	-	4	5
C	6	4	-	3
D	6	5	3	-

· B행 지우고
· B열서 최소 값 선택

	A	B	C	D
A	-	6	6	2
C	6	④	-	3
D	6	5	3	-

· C행 지우고
· B, C열서 최소 값 선택

	A	B	C	D
A	-	6	6	2
D	6	5	③	-

· D행 지우고
· B, C, D열서 최소 값 선택

	A	B	C	D
A	-	6	6	②

일반적으로, 알고리즘학습에 있어서 상기해야 할 점은 다수의 학생들은 단지 알고리즘에 대한 이해보다는 '절차적 지식' 만을 알고 있다는 것이다. 즉, 개념적으로 이해하지 못하거나 절차가 왜 그렇게 이루어지는지를 모른다. 따라서 이와 같은 종류의 알고리즘학습 프로그램 또는 활동은 교사의 설명식 교수방법 보다는 소집단 활동 및 교사의 적절한 발문을 통하여 학생 스스로 알고리즘을 찾을 수 있는 발견학습이 되어야 한다. 특히, Prim의 알고리즘과 같이 네트워크 문제를 '기하적 모델' 대신에 '표' 와 같은 대수적 모델을 사용하는 경우에는 세심한 주의가 필요하다. 이를 테면,

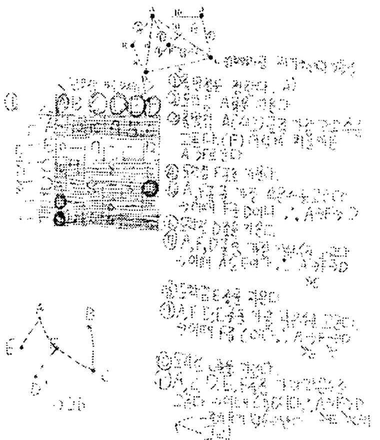
· 행을 지우는 조작활동의 실제적인 수학적 개념은 무엇일까?
· 지워진 행들과 대응해서 그 열들에서 최소값을 찾는 이유는 무엇일까?
· 초기의 무게행렬에서 변화된 행렬을 보고 실제적 도로망을 구성할 수 있을까?

이는 초등학생의 인지수준과 관련되며, 표 모델의 경우는 대상간의 연결 상태를 나타내는

20) 제주대학교 과학영재교육센터에서 운영하고 있는 초등수학반(심화과정) 학생의 결과물 중의 일부이다.

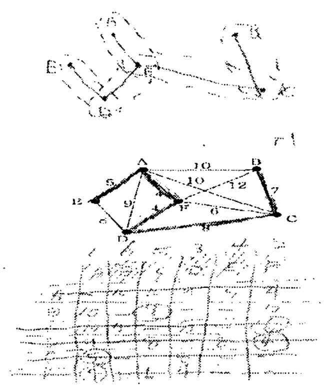
시각적인 요소가 없기 때문이다.

[그림 II-18]는 위에서 언급한 요소를 잘 이해하고 있는 학생의 예이다.[20] 이 학생 A는 행렬의 변화와 그래프의 변화를 같이 대응시키고 있으며, 실제로 '출발점' 과 '도착점' 을 표에서 명시를 함으로써 그래프와의 대응을 효율적으로 이용하고 있음을 알 수 있다.



[그림 II-18] 학생 A

그러나 [그림 II-19]에서와 같이 학생 B의 경우는 greedy 알고리즘은 이해하고 있지만 Prim의 알고리즘은 그렇지 않음을 알 수 있다.



[그림 II-19] 학생 B

Prim의 알고리즘과 관련된 내용을 중심으로 한 수업을 교사와 학생들 사이의 대화 형식으로 구성해보자.[21]

교사: 어떤 도시 A, B, C, D를 연결하는 길을 만들려고 합니다. 각 도시를 연결하는 길의 길이는 알고 있습니다.

교사: 이제, 이러한 실제 상항을 그래프로 모델화하고, 무게행렬을 만들어 보세요.

학생들: 예

교사: 4개의 도시를 연결하는 최단길이의 연결망을 만들 때, 주의해야할 점은 무엇입니까?

학생들: 모든 도시가 연결되어야하고, 그 거리의 합이 최소가 되어야 합니다.

교사: 그래요. 만일 순환길이 생기면 어떻습니까?

지은: 순환길이 있다면 그 중 하나를 없애도 되니까, 순환길이 생기면 최단길이의 연결망이라고 할 수 없습니다.

교사: 이제, 무게행렬을 이용하여 최단길이의 연결망을 찾아봅시다. 먼저, 아무 도시(점) 하나를 택하고 시작하여 봅시다.

자은: 점 B에서 출발하겠습니다.

교사: B열에 있는 수는 무엇을 의미합니까?

학생들: B와 연결할 때의 길의 길이입니다.

교사: 그렇다면 B와 연결되는 최단길을 찾아야 하는데, 순환길이 없어야 합니다. 순환길을 만들지 않기 위하여 무게행렬에서 어떤 작업을 해야 할까요?

지은: B행을 없앤다? 왜냐하면 다시 B와 연결되는 순환길을 생기지 않도록 하기 위해서입니다.

교사: 점 B와 연결되는 최단길은 어느 것입니까?

학생들: 점 C입니다.

교사: 이제, 우리가 알고 있는 사실을 정리해봅시다.

학생들: 점 B, C와 이 두 점의 연결입니다.

교사: 이제 무게행렬에서 어떤 조작을 해야 하나요?

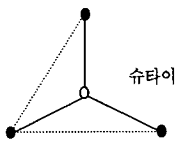
21) 제주대학교 과학영재교육센터에서 운영하고 있는 초등수학반(심화과정)학생을 대상으로 2005년 7월 27일 프로그램에서의 활동의 예이다.

지은: 우리가 다음 단계로의 연결에 사용할 수 있는 점 B와 C를 가지고 있으니까, 순환길이 생기지 않도록 하기 위해서 C행을 지워야합니다. 또한 B와 C열에서 최소값을 찾아야 합니다.

교사: 예, 맞습니다. 이러한 방법으로 계속진행하면 되겠네요?

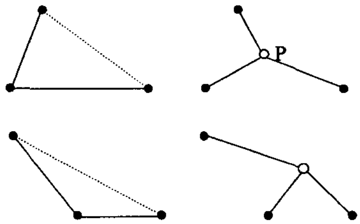
학생들: 예

이제, 몇 개의 마을을 추가로 택하여 그 곳에서 120°의 각을 이루며 만나도록 하는 슈타이너 도로망을 응용하는 문제를 생각해보자. 이 문제는 흥미 있는 예상문제를 불러 일으켰으며 최근에야 증명이 되었다.[22] 예를 들어, 세 마을이 한번의 길이가 1인 정삼각형의 꼭지점에 있다면, 최단길이는 2이고, 슈타이너 길이(최단 슈타이너 도로망의 길이)는 $\sqrt{3}$이다([그림 II-20] 참조).



[그림 II-20] 최단도로망(점선)과 슈타이너 도로망(실선)

최단도로망을 찾는 문제는 Prim의 알고리즘 또는 greedy 알고리즘을 이용하면 쉽게 해결되지만, 슈타이너 길이를 구하는 문제는 쉽지는 않다. 여기서는 최단도로망과의 도로망의 길이 비교를 통해서, 슈타이너 나무에서 120°의 의미를 파악하는 탐구학습 프로그램의 구성문제를 논의 하고자 한다. 즉, 세 마을을 연결하는데 전체도로의 길이가 최소가 되게 하는 문제를 살펴본다([그림 II-21] 참조).



[그림 II-21] 최단도로망(좌)과 한 지점을 추가한 도로망(우)

최단거리 도로망과 한 지점을 추가한 도로망과 관련된 추측활동

- 개념: 세 마을에서의 최단도로망과 한 지점을 추가한 도로망 사이의 관계를 알아본다.
- 능력: 슈타이너 나무(최단길이를 가지는 한 지점을 추가한 도로망)의 특징을 파악할 수 있다.
- 활동: 이 활동의 목적은 슈타이너 나무의 개념을 인식하는 데 있다.
- 준비물: A4 용지 여러 장, 연필, 각도기
- 방법:
  1. 먼저, 준비한 종이 위에 세 개의 큰 점을 찍어라.
  2. 최단도로망을 찾고, 그 길이를 계산한다.
  3. 한 점을 추가 한 후, 추가된 점에서 세 점을 직선으로 잇고 거리의 합을 계산하고, 최단도로망의 길이와 비교한다. 점의 추가를 달리하면서, 이러한 활동을 반복한다.

위와 같은 활동을 통하여 슈타이너 점의 특징을 추측은 할 수 있다. 이 후의 활동들은 수학적 논증을 위한 탐구활동으로 구성을 하면 된다.

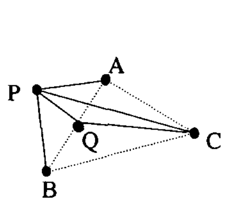
슈타이너 점 찾기와 관련된 내용을 중심으로 한 수업을 교사와 학생들 사이의 대화 형식으로 구성해보자.[23]

22) 슈타이너 비 예상문제:

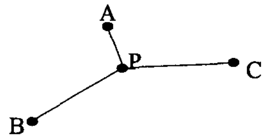
$$\frac{\text{슈타이너길이}}{\text{최단길이}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

23) 제주대학교 과학영재교육센터에서 운영하고 있는 초등수학반(심화과정)학생을 대상으로 2005년 11월 26일 프로그램에서의 활동의 예이다.

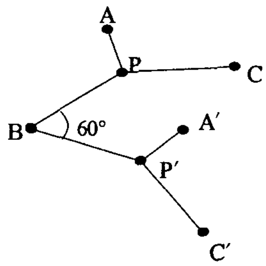
교사: 세 마을 A, B, C를 직선으로 연결하는 데, 전체 도로의 길이가 최소가 되게 하는 문제를 생각해보자. 어떻게 하면 되나요?
학생들: 세 마을 A, B, C를 직선으로 연결하는 세 직선 길 중에서 짧은 길이의 두 변을 택하면 됩니다.
교사: 이제 새로운 한 점을 추가하여 이점과 세 마을 A, B, C를 직선으로 연결하는 방법을 생각해봅시다.
교사: 항상 새로운 점을 추가한 경우는 추가하는 경우가 없이 단지 세 마을을 직접 직선으로만 연결하는 경우보다 전체도로의 길이가 짧은가요? 추가된 지점을 달리하면서 그 도로의 길이를 구해보고 비교해보세요.
학생들: 추가하는 지점의 위치에 따라서 다른데요.
교사: 지점을 어떻게 추가하면 도로의 길이가 최소가 될까요? 추측해보세요.
학생들: ???
지은: A지점 가까이에 점을 추가하니까 전체도로의 길이가 짧아지는 데요.
교사: 그럼, 지은이가 연결한 형태를 추측해보세요.
자은: 새로운 점과 두 마을 연결한 각의 크기가 비슷한 것 같은데요?
지은: 혹시 120°?
교사: 그래요. 이제 이 추측이 맞는 지 차근차근 추론해 봅시다. 먼저, 새로운 점이 세 점을 연결한 삼각형의 외부에 있을 수 있나요.
학생들: 실제적 활동을 해보니 없을 것 같아요.
지은: 점이 Q에 있을 때가 전체 길이가 더 짧아요.



교사: 그래요. 그럼 우리가 찾고자하는 점은 내부 아니면 삼각형의 변에 있겠네요.
학생들: 예
교사: 다음의 그림에서 세 선분 AP, BP, CP을 연속적으로 나열하는 방법은 없을까요?



학생들: ???
교사: 이렇게 행각해봅시다. 위의 그림을 60° 회전하여 생각해보세요.



승환: 다음과 같이 생각하면 될 것 같은데요. 선분 PP′을 이으면 삼각형 PBP′은 정삼각형이니까, 선분 BP와 PP′은 합동이고, 또한 선분 PC와 P′C′은 합동이기 때문에, 선분 AP, BP, CP 대신에 선분 AP, PP′, P′C′를 생각하면 됩니다.
교사: 이제, 문제를 해결할 수 있나요?
지은: 점 A와 C′잇는 경우 직선이 최단거리가 됩니다. 따라서 점 P가 찾고자하는 점이라면 세 선분 AP, PP′, P′C′이은 선은 직선이 되어야 합니다.
교사: 그러면, 점 P에서 세 마을을 이은 직선들에 형성되는 각은 몇도 입니까?
학생들: 120°
교사: 만일 삼각형에서 제일 큰 각이 120°보다 크거나 같다면 찾고자하는 점은 어디에 있을까요?
지은: 만일 제일 큰 각을 이루는 점이 120° 이라면 바로 그 점이 찾고자하는 점입니다.
자은: 제일 큰 각이 120°보다 큰 경우도 같습니다. 왜냐하면, 내부에 점이 있다면 항상 120° 보다 커지니까 앞의 활동과는 맞지 않습니다.

III. 결 론

최근의 급속한 정보화 사회로의 전환에 편승하여 이산수학에 대한 관심과 이에 따른 연구가 활발해지고 있으며, 제 7차 교육과정에서 이산수학을 선택과목으로 지정할 만큼 그 중요성이 인정되고 있다. 그러나 이산수학을 하나의 별도의 과목으로 다루는 것은 이산수학을 체계적으로 학습하는 데에는 효율적일지는 몰라도, 이산수학이 이전에 배운 경험이 없는 전혀 새로운 것은 아니며, 문제해결의 과정에서 자주 접할 수 있는 주제들과 관련되어 있다.

'이산수학이 무엇인가?' 라고 물음에 답하기가 쉽지는 않다. 일반적으로, 이산적인 대상을 이산적인 방법으로 다루는 분야정도로 이야기 할 수 있으며, 이러한 정의를 인정한다면 초등수학 대부분은 이산수학이라고 말할 수 있다. 특히, 관계짓기 활동은 초등수학과 많은 연관이 있으며, 결국 이것은 네트워크의 문제이다.

본 논문에서는 초등영재들을 위한 수학적 추론능력과 알고리즘적 사고를 길러주기 위한, 네트워크(그래프)를 중심으로, 학습프로그램의 구성과 관련하여, 먼저 네트워크의 기본적인 수학적 모델인 그래프의 특징을 설명할 수 있는 오일러의 악수보조정리를 추론 및 논증을 위한 활동으로 교과서분석을 통하여 기본적인 개념을 추출, 이중계수의 관점에서 추론활동에 대하여 논의하고, 이를 바탕으로 한붓그리기 문제와 도로망 문제를 분석하였다. 이는 실제적인 예를 통하여, 기존에 알려진 그래프 이론과 관련된 몇몇 순수 수학이론을 초등영재에 맞도록 교수학적 변환을 논의한 것이다.

이러한 논의를 통하여 순수수학에 나타나있는 일반적인 네트워크 문제와 관련된 초등영재를 위한 탐구학습프로그램 구성을 위한 교수학적 변환에서 고려해야 할 점을 개략적으로 요약하면 다음과 같다.

첫째, 초등 수학교과서를 분석하고 이를 토대로 한 영재학습 프로그램을 선정 및 구성한다. 이는 '의미 있게 심화하고 적합하게 속진' 이라는 NCTM(1987)의 권고와 '정규교육과정에 근간을 둔 심화프로그램을 제공하여 인지적·정의적인 측면에서 그 재능이 입증된 경우 속진 프로그램으로 연결시키는 것이 바람직하다' 는 남승인(2004)의 관점과 관련된다. 이러한 점은 초등학생이 쉽게 접할 수 있는 이중계수와 관련된다.

둘째, 귀납적사고 활동을 중시해야 한다. 이는 학생들의 추론능력 및 논증의 밑바탕이 될 수 있다. 이것은 창의적 활동과도 연관성이 있으며, '수학자가 수학을 탐구하듯이' 와도 관련된다(김진호, 2005). 이것은 앞서 논의한 4가지 주제의 내용구성에서 공통적으로 강조하고 있는 관점이다.

셋째, 문제해결을 위한 절차적 지식으로서 알고리즘 그 자체가아니라 알고리즘을 발견할 수 있는 학습 프로그램을 구성해야한다. 특히, 수학적 대상이 되는 모델이 기하적인 것 아닐 경우(표 모델)에는 알고리즘을 단지 절차적 지식으로 실행만을 강요할 수 있다. 즉, 알고리즘의 의미를 이해하기보다는 알고리즘을 단지 기계적으로 적용하여 원하는 답을 얻는 것이 초점이 될 수 있다(조완영, 2000). 일반적으로 알고리즘적 사고는 모든 수학분야에서 강조하고 있는 것이다. 이는 한붓그리기, 도로망 문제와 관련된다.

참고문헌

강완(1991). 수학적 지식의 교수학적 변환. **한국수학교육학회지 수학교육, 30**(3), 71-89.

교육부(2004). **수학 <1-가>~<6-나> 교과서.** (주)대한교과서 주식회사.

김진호(2005). 수학자가 수학을 탐구하듯이 학습자도 수학을 탐구할 수 있는 방안 모색. **한국수학교육학회지 시리즈 A 수학교육, 44**(1), 87-101.

남승인(2004). 심화학습 프로그램에 기초한 속진학습 프로그램 개발 방안. **한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육 논문집, 18**(3), 29-44.

우정호 · 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. **대한수학교육학회 논문집, 3**(2), 1-16.

우정호 · 정은실(1995). Polya의 수학적 발견술 연구. **대한수학교육학회 논문집, 5**(1), 99-117.

조완영(2000). 알고리즘, 어떻게 가르칠 것인가? **한국수학교육학회지 시리즈 A 수학교육, 39**(1), 44-58.

최근배 · 강문보(2005). 이산수학적 관점에서의 초등수학교과서 분석 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 C 초등수학교육, 9**(1), 11-29.

Cameron, P. (1994). *Combinatorics: topics, techniques, algorithms*. London: Cambrige University Press.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel: Dortrecht.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solutions is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

NCTM (1987). *A position statement on provisions for mathematically talented and gifted students*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Robert, I. (1999). Discovering optimum networks in triangles. *The Mathematics Teachers, 92*(6), 534-539.

Wilson, R., & Watkins, J. (1990). *Graphs*. John Wiley: New York.

Yackel, E., & Cobb, P. (1994). *The development of young children's understanding of mathematical argumentation*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.

__________. (1996). Sociomathematical norms, agumentations, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 27*(July), 458-477.

A Study on Discrete Mathematics Subjects Focused on the Network Problem for the Mathematically Gifted Students in the Elementary School

Choi, Keun Bae (Jeju National University of Education)

The purpose of this paper is to analysis the basic network problem which can be applied to the mathematically gifted students in elementary school. Mainly, we discuss didactic transpositions of the double counting principle, the game of sprouts, Eulerian graph problem, and the minimum connector problem. Here the double counting principle is related to the handshaking lemma; in any graph, the sum of all the vertex-degree is equal to the number of edges.

The selection of these subjects are based on the viewpoint; to familiar to graph theory, to raise algorithmic thinking, to apply to the real-world problem.

The theoretical background of didactic transpositions of these subjects are based on the Polya's mathematical heuristics and Lakatos's philosophy of mathematics; quasi-empirical, proofs and refutations as a logic of mathematical discovery.

* key words : discrete mathematics(이산수학), double counting principle(이중계수의 원리), Eulerian circuit(오일러 회로, 한붓그리기), minimum connector problem(최소연결 문제), Steiner tree(슈타이너 나무)

논문접수 : 2005. 10. 30

심사완료 : 2005. 12. 2