대한수학교육학회지 <학교수학> 제 7 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.7, No.4, 375-389. Dec 2005

수학교육에서 살리는 '교육의 리듬'

차 주 연*

Whitehead는 그의 형이상학적 철학과 교육철학을 바탕으로 리듬을 살리는 교육을 제안하고 있다. 그에 의하면 '교육의 리듬'이란 자유와 규율이 조화를 이루는 가운데 학생의 지적 수준이 상승하게 된다는 것을 의미하며, 이는 로맨스의 단계와 정밀화의 단계, 일반화의 단계를 거치면서 거듭된다. 또한 이런 주기들이 반복되면서 더 나은 수준으로 발전하게 되어 학생은 지적인 자유를 누릴 수 있다.

본 논문은 이러한 Whitehead의 생각을 수학교육에서 살리는 방안을 모색해 본 것이다. 먼저 3단계를 의미있게 거쳐 가게 하는 교육과정의 구성 방안을 생각해 보고, 자유와 규율이 교대로 일어나는 교수방법을 구안해 본다. 그리고 실제 수업에서 이들을 적용하는 방안을 구상해 본다.

I. 서 론

현재 학교의 수학 교실의 모습은 양극화 현상이 뚜렷하다. 입시 준비에 얽매여 있는 고등학교에서는 입시를 지상 최대의 목표로 설정하고 학생의 지적 수준을 향상시킨다는 미명 하에 수학 수업을 하고 있다. 엄격한 규율로 학생의 행동을 제한하면서 50분의 수업시간 내내 교사의 설명에 집중하게 하고 문제풀이에 골몰하게 하는 수학 수업이 이루어지고 있다.

그런가 하면 자유에 따르는 책임을 제대로 부과하지 못하고 너무 많은 권위를 학생에게 나누어 줌으로써 지나친 방종에 이르는 상황을 만들어내는 교실도 있다. 교사의 역할이 충분히 이루어지지 않은 수업에서는 학생의 지적 수준이 상승하기 어렵게 되어 이후의 학습에 많은 지장을 초래하게 된다.

이와 같은 상황들은 자유와 규율 중 어느 하나에 편향됨으로써 발생하게 된다. 교육사조의 역사적 흐름을 볼 때, 각각의 입장을 특히 강조한 것으로, 인간주의 교육[1]과 자유교육[2]을 들 수 있다. 인간주의 교육에서는 인간을 소중히 여긴다는 관점에서 출발하여 학생의 자유를 최대한 허용하고자 하나 자칫 방종으로 흐르는 경향이 있다. 그런가 하면 자유교육에서는 주지교육을 중요하게 여기지만 학생의 심리적인 상태는 무시하는 경향이 있어 학생의 자유로운 사고를 방해하게 되는 폐단에 이르기도 한다.

그런데 교육의 어원 educare에서 보듯이 학

* 서울사대부고(minette-j@hanmail.net)

1) 인간주의 교육(humanity education)은 인본주의 심리학과 실존주의 철학을 배경으로 한다. 인간에 대한 존중을 밑바탕에 두며 자유로운 분위기에서 개인의 잠재능력을 최대한 발휘하게 하여 자아실현을 이루게 하는 교육을 지향한다.

2) 자유교육(liberal education)은 공부할 여가를 가진 자유로운 시민을 위한 아테네의 교육을 그 출발점으로 하며 이는 중세의 7자유학과로 이어진다. 지식 그 자체를 추구하는 것을 이상으로 삼는 교육으로 내재적인 교육 가치를 지향한다.

생이 갖고 있는 잠재력을 충분히 이끌어 내는 것이 교육이라면, 교사는 학생의 잠재력을 이끌어 내는 상황을 만드는 것에 주력해야 할 것이다. 우선 학생이 의미 있는 생각을 품게 환경을 조성해야 할 것이고 그 생각을 자연스럽게 밖으로 표출시킬 수 있게 해야 할 것이다. 다음은 그 생각들이 정련 과정을 거쳐 하나의 개념에 이르도록 해야 할 것이다. 그리고 이에 멈추지 않고 더 나은 개념에 이르도록 일반화하고 확장하여 적용해 보도록 이끌어야 할 것이다. 이를 위해서는 자유와 규율, 어느 하나에 치우쳐서는 곤란할 것이다.

이에 대해 수학자이면서 철학자인 Whitehead는 리듬을 살리는 교육을 제안하고 있다. 그가 제안하는 '교육의 리듬'이란 자유와 규율이 조화를 이루고 로맨스의 단계, 정밀화의 단계, 일반화의 단계가 반복되는 가운데 학생의 지적 수준이 상승하게 되는 것을 말한다.

본 고에서는 Whitehead가 갖고 있는 교육철학적 입장을 견지하면서, '교육의 리듬'을 수학교육에 실제로 적용하는 방안을 모색하고자 한다.

II. Whitehead의 '교육의 리듬'

Whitehead의 사상적 토대가 되는 그의 형이상학적 철학과 교육철학을 먼저 알아보고 수학교육에 대한 관점과 '교육의 리듬'에 대한 주된 생각을 살펴보기로 한다.

1. Whitehead의 철학

Whitehead의 형이상학적 철학은 과정철학이라고 불리며, 이는 '과정(process)이 곧 실재(reality)이다'라는 하나의 구절로 대변되어진다. 실재를 인정하되 그것을 불변하는 것에서 찾으려는 입장이 아니라, 시간의 관념을 가미하여 과정 속에서 실재를 찾으려는 입장이다. 시간의 관념을 포함하고 있기 때문에 과정은 의미가 있으며, 창조적 전진(creative advance)을 추구하는 것이 가치 있는 일이 된다. 따라서 새로운 이상을 갖고 모험을 통해 현재의 문제를 개선해 가려는 노력을 높이 평가할 수 있게 된다.

Whitehead(2004)는 현재가 시간의 '두께'(thickness)를 가지고 있는 것이기 때문에 과거와 미래를 함께 포함한다고 본다. 현재는 지속이나 폭이 없는 시간의 '지금', 또는 질점 같은 것이 아니다. 현재는 소멸하는 과거의 첨단, 즉 쏜살같이 지나가버리는 실재와 성장하는 미래의 첨단이다. 즉 창조적 실재(creative reality)의 양쪽을 아울러 포함하고 있다는 의미에서 현재는 그 속에 이른바 '폭'(spread)을 지니고 있다. 현재라는 시간은 단순한 순간일 수 없으며, 그 자신의 폭 속에 과거와 미래의 양 첨단을 내포하고 있게 된다. 이런 시간 관념에 비추어 볼 때, 현재의 삶의 문제를 제대로 파악하기 위해서는 과거와 미래의 양 방향을 모두 직시해야 한다.

또 그의 철학은 다음과 같은 이유에서 유기체철학이라고도 불린다. 그는 근세 과학이 자연을 양분하는 오류를 범하고 있다고 지적하는데, 이는 Galileo나 Newton이 자연을 감각적 자연과 그 감각의 원인이 되는 자연으로 나누어 생각하는 것을 말한다. 즉 그는 감각과 실재를 이분하는 입장에 반대하고 있다. 대표적인 이원론자라 할 수 있는 Russell은 '우리가 직접 보고 느끼는 것은 현상에 지나지 않으며 이 현상을 우리는 배후에 있는 어떤 실재의 기호라고 믿는다'라고 말한다. Russell은 현상에 의미를 두기보다 실재에 더욱 깊은 의미를 두고 있는 입장이다. 이에 반해 Whitehead는 실재를 부정하지 않으면서 현상을 그대로 인정하는 입장이라고 볼 수 있다(최두찬, 1985). 자연의 현상

은 신체와 결합된 정신에 의해 파악되는 것으로 보는 것이다. 즉 그는 자연의 기초를 신체와 정신을 분리시켜 고려하는 기계론(mechanism)적인 사유체계가 아니라 유기체론(organism)적인 사유체계로 규정하고자 한다(최상균, 1996).

이성은 그 기능에 따라 실천이성과 사변이성으로 구분할 수 있는데 실천이성보다는 사변이성에 더 가치를 두었던 종래의 관점과는 달리, 그는 사변이성과 실천이성이 교접함으로써 테크놀로지의 진보가 가능하다는 관점을 취한다. 사변이성은 이론적 활동을 제공하고, 실천이성은 다양한 종류의 사실을 처리하는 방법론을 제공한 까닭에 이성의 두 기능이 모두 위력을 더할 수 있다는 것이다. 사변 이성은 실제적인 내용을 얻게 되고 실천이성은 이론적 통찰을 획득하기에 가치의 도약이 가능하다는 주장을 한다(Whitehead, 1998).

이상에서 볼 때, 그의 주된 관심은 구분보다는 통합에 있음을 알 수 있다. 불변과 가변, 과거와 미래, 현상과 실재, 실천이성과 사변이성, 이들을 뚜렷이 구분하기보다는 그의 독특한 사유체계로 통합하고 있는 것이다.

2. Whitehead의 교육철학

Whitehead의 교육철학은 위에서 논의한 형이상학적 철학을 바탕으로 하고 있다. 즉 교육에서도 과정을 중요시하며 현상과 실재로 양분하기보다는 상호보완적인 관계가 되도록 종용한다. 따라서 그는 실재를 표현하는 지식이 현상에 활용되는 것에 가장 중점을 두고 있다. 그의 교육철학을 가장 명료하게 나타냈다고 할 수 있는 「교육의 목적」에서도 이러한 생각이 잘 나타나 있음을 그 첫 부분에서 알 수 있다.

> 어린이의 사고력을 훈육함에 있어 무엇보다도 먼저 경계해야 할 것은 내가 말하는 '생기 없는 관념'(inert ideas)인데, 이는 활용되지도 않고 검증되지도 않으며, 참신한 연관성으로 결합되지도 않은 채 단지 머릿속에 주입시키기만 한 관념을 말한다(Whitehead, 2004).

그는 지식이 머릿속에 주입되기만 하여 생기 없는 관념이 되는 것을 가장 무익하고 해로운 것으로 보고, 교육 제도가 제멋대로 만들어낸 생기 없는 관념으로 인간성을 새삼스럽게 구속하려고 하는 것을 슬픈 일이라고 통탄한다. 그리고 이러한 정신적 부패를 예방할 수 있는 방안으로 두 가지 교육상의 기본 원칙을 선언하고 있는데, 그 첫째는 '너무 많은 과목을 가르치지 말라'는 것이며 둘째는 '가르쳐야 할 것은 철저하게 가르치라'는 것이다. 내용을 엄선하되, 결합 가능한 방식으로 머릿속에 넣어주도록 힘쓸 것을 제안하고 있는 것이다(Whitehead, 2004).

Whitehead에게는 지식을 활용할 수 있는 것이 그 지식을 습득한 것이므로 교육 상황에서 지식의 활용은 반드시 염두에 두어야 할 사항이 된다. 따라서 '지식을 위한 지식'에 가치를 두는 것에는 매우 회의적이다. 이처럼 지식의 활용 기술을 습득하는 것을 교육으로 보는 그의 입장은 실용주의를 연상케 한다. 그러나 그는 Dewey의 실용주의적 진리관에는 동의하지 않는다. Whitehead가 의미하는 '활용'이라는 말은 어떤 외적 상황을 변화시키는 도구적 기능을 가리키는 것이 아니라, 어떤 관념을 다른 관념이나 다른 경험에, 그리고 최종적으로 그의 삶의 주요 관심사와 연결시키는 능력으로서의 개인의 창조적 활동을 말하기 때문이다 (Whitehead, 2004).

또한 Whitehead는 교육의 목표를 사고와 행동의 결합으로 보고 있다. 행동은 사고에 의해 통제되어야 하며 행동이 이루어지는 곳에서 사고가 생성되어져야 하는 것으로 본다. 이런 맥락에서 그는 런던공업기술학교에서 기하의 작

도가 기계제작과 연관되어 지도되는 것을 바람직한 것으로 보고 있다. 또한 문학적, 과학적, 기술적 교육과정이 통합되어 운영되어야 한다고 주장한다. 이는 실제에 아이디어를 불어 넣어 실재를 얻어야 한다는 그의 생각과 일치하는 것이다(Hendley, 1986).

Whitehead는 교육받은 정신의 자질의 요건으로 품격(style)에 대한 감각을 들고 있다. 품격에 대한 감각은 하나의 심미적 감각이며 예견된 목적을 직접 달성한 것을 감탄하는 경험에 기초를 두고 있는, 간결하고도 낭비가 없는 감각이다. 그에게 품격이란 교육받은 정신의 최종적인 획득물 중 가장 유용한 것이며 이 품격은 존재 전체에 퍼지게 되는 것이다. 따라서 품격이란 정신의 궁극적 도덕성이 된다. 여기에 그치지 않고 품격이나 지식보다 더 높은 자리에 의지의 힘을 올려놓고 있다. 그리고 경건한 마음의 토대 위에서 교육적 이상을 실현해야 한다고 주장한다.

3. Whitehead가 보는 수학교육

수학자이기도 했던 Whitehead는 수학과 수학교육을 보는 안목도 각별하여 「화이트헤드의 수학에세이」라는 책을 저술했을 정도이다. 이 책의 서문에서 그가 생각하는 수학교육의 문제점을 엿볼 수 있다.

> 나는 확신하건대 수학이라는 학문을 공부할 때 초심자들이 겪는 어려움이란 이미 초등수학 교재에까지 점철되어 있는, 그래서 결국 학문적 중요 개념들을 덮어버리는, 수많은 기교 위주의 세부사항들(technical detail)에 기인한다고 본다(Whitehead, 1994).

위의 글에서 볼 때, 그가 가장 염려하는 것은 근본적인 개념들을 예시해 보이는 데에 있어 꼭 필요한 것 이상의 세부사항들로 학습자에게 무리한 심적 부담을 주는 것임을 알 수 있다. 즉, 그는 기본 아이디어를 최대한 단순하게 하여 그것을 철저하게 가르쳐야 한다고 주장하는 것이다.

이에 덧붙여 수학적인 아이디어의 기원을 알려주어야 한다고 주장한다. 아이디어의 발달사를 관련지음으로써 추상화된 개념의 근원을 구체적으로 보게 할 수 있고 좀더 생생하게 다룰 수 있어 관념의 모험을 수행하게 된다고 본다. 그리고 수학적인 아이디어를 일상생활과 관련지어 설명할 것을 주장한다. 예를 들어 벡터의 기하학적 의미를 설명할 때, 움직이는 기선에서 갑판 위를 걷는 사람을 생각하게 하는 것이다. 또 연속함수와 불연속함수를, 일정한 시간동안 여러 개의 역을 통과하는 기차와 연관짓는 것이다(Hendley, 1986).

Whitehead는 다른 무엇보다도 지식 자체를 추구하는 데에 심오한 변화의 기원이 있다는 것을 인정한다. 원뿔곡선은 1800년 동안 수학자의 지식에 대한 갈망을 만족하는 것 외엔 다른 유용성이란 없는, 단지 추상수학에 불과했다는 것을 예로 들고 있다. 그런가 하면 몇 가지 추상적 아이디어는 실용적인 관심에서 유래했다고 본다. 대표적인 예가 삼각법으로, 이는 천문학적인 연구를 위한 것이었다(Hendley, 1986). 따라서 Whitehead에 의하면 수학은 흥미로운 발달의 역사를 가지며, 실제적 유용성이 개입되는 추상과학인 셈이다. 그의 입장에서라면 수학교육의 목표는 완습이 아니라 진보가 될 것이다.

Whitehead는 수학교육의 목표를 분석능력, 일반화능력, 추론능력의 함양에 둔다(Hendley, 1986). 이들은 추상적인 아이디어를 파악하는 힘을 기르는 기초가 되기 때문에 필수적이다. 추상적인 아이디어를 사용하는 힘과 습관을 획득하기 위한 방법은 계속적인 실행을 하는 것이

다. 이를 위해 처음엔 명확하고 일반적 관념인 부피, 넓이, 직선과 같은 것에서 시작할 것을 권한다. 정련되고 일반화된 아이디어에서 시작하는 것은 큰 실수로 본다. 목표가 되어야 하는 것에서 시작하기 때문이다. 이와 관련하여 그(1994)는 수학교육의 문제점을 다음과 같이 간파하고 있다.

> 이처럼 우리가 수학이라는 학문의 명성에 걸맞을 만큼 부응하는 데 실패하는 이유는 간단하다. 어떤 구체적인 문제의 엄밀한 표기를 도모하기 위해 고안된, 소위 수학적 기법을 해득한 학생들에게 그 근본개념까지 이해시키지 않기 때문이다. 따라서 이런 불행한 학생들은 자신이 어떤 일반적 개념에도 반추되지 않은 단편지식의 덩어리를 습득하는 일에만 몰두했음을 발견하게 된다.…이는 곧 진지함이 없는 박학(pedantry)에 빠지는 길인 것이다.

결국 그는 기본개념을 습득한 후에 추상화된 개념으로 나아갈 것을 주장하고 있는 것이다. 수학의 백미라 할 추상화된 아이디어를 파악하는 것은 매우 중요하지만, 이를 위해서는 거쳐야 하는 단계들이 있음을 강조하는 것이다. 이와 같은 그의 생각은 '교육의 리듬'에서 구체화되어 나타난다.

4. 교육의 리듬

Whitehead(2004)는 생활의 본질을 주기로 파악하면서 정신발달에도 주기적인 되풀이를 동반한 미묘한 주기가 있다고 본다. 주기 속에는 종속되는 주기가 있으며 되풀이되는 틀 속에는 본질적인 차이가 있는데 Whitehead는 이를 '리듬'이라고 한다. Hegel이 정ㆍ반ㆍ합이라고 부른 3단계의 진보와 유사하기는 하지만, Whitehead는 지성의 발달과 연관시켜서 이 3단계를 로맨스의 단계, 정밀화의 단계, 일반화의 단계로 각각 명명하고 있다.

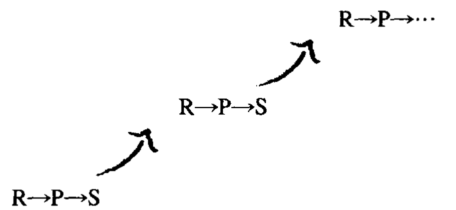
먼저 로맨스의 단계는 사고의 주제가 신선한 생기를 띠고 있는 단계이며 여러 가능성과 연결되어 있고 낭만적 정서가 있는 단계이다. 낭만적 정서란 있는 그대로의 사실로부터 미처 탐구하지 못했던 사실들 간의 관계성의 중요함을 최초로 깨닫는 데서 오는 흥분을 말한다(Whitehead, 2004). 예를 들면, 이원일차연립방정식에서 각각의 방정식을 좌표평면에 그래프로 나타내었을 때, 두 그래프의 교점과 연립방정식의 해는 어떤 관련이 있는 것 같다는 가능성을 문득 깨달을 때, 낭만적 정서가 만들어지는 것이다. 진공 속의 마음은 교육할 수 없다. 이미 마음속에 움직이기 시작한 발효가 있어야 교육이 이루어지므로 발효를 시키는 단계인 로맨스 단계는 매우 중요한 단계이다.

두 번째 정밀화의 단계는 지식이 현저하게 증가하는 단계로, 관계의 확대보다는 계통적인 조직화와 정확성이 우선한다. 로맨스 단계의 사실들은 가능성을 갖는 관념들이지만, 정밀화의 단계에서의 사실들은 조직화된 질서 속에서 얻게 되는 것들이다(Whitehead, 2004). 앞의 예와 연결하면, 이원일차연립방정식의 해와 그래프의 교점은 표현 방식이 다를 뿐이며, 구하는 해는 그래프의 교점으로부터 얻을 수 있다는 것, 그러나 그래프의 교점은 그림으로부터 얻는 것이어서 정확하지 않으므로 수식에 의존한다는 것, 그래서 수식의 도움으로 이원일차연립방정식의 해를 구하는 것이 필요하며 그 방법을 직접 습득해야 한다는 것 등으로 진전하는 것이다.

세 번째 일반화의 단계는 정밀한 학습의 결실기로, 명확해진 관념과 적절한 기술이라는 이점을 가지고 로맨스의 단계로 되돌아오는 단계이다(Whitehead, 2004). 앞의 예와 연결하면, 어떤 연립방정식에서든 그것의 해는 그 방정식들을 나타내는 각각의 그래프의 교점과 일치하게

된다는 사실로 일반화될 수 있다. 차수를 높이면 이차방정식과 일차방정식을 연립한 방정식의 해는 좌표평면에서 곡선과 직선의 교점이 되는 것으로 관점을 넓힐 수 있다. 또 차원을 높이면 3차원에서 평면의 교선인 직선의 방정식은 삼원일차연립방정식 두 개가 연립되었을 때의 해와 관계가 있음을 알 수 있다. 이것은 또 다른 탐구의 시작이 된다는 의미에서 또 다른 주기의 시작인 로맨스의 단계로 볼 수 있다.

이렇게 일반화의 단계에 이르면 로맨스 단계를 향한 반작용이 생기게 된다고 한다. 일반화 단계를 막 마친 부분의 일반적 규칙이나 법칙에 관한 공식 및 상세한 예증을 명확하게 이해하게 될 때, 학생들은 이제 손 안에 쥔 새로운 무기를 구사하고 싶게 되며 로맨스 단계의 산만한 모험심으로 되돌아가게 되는 것이다. 하지만 이 때의 산만함은 처음 로맨스 단계의 산만함에서 한 차원 높여진 것이며, 학생의 정신은 오합지졸이 아니라 훈련된 한 연대로 성장하여 유리한 위치를 점하게 되는 것이다 (Whitehead, 2004). 따라서 Whitehead의 주기는 거시적 주기 안에 미시적 주기가 병렬로 나열된 것이 아니라 더 높은 단계의 주기로 연결되는 진보의 형태를 띤다. Whitehead의 주기적 진보(cyclic advance)는 '교육의 리듬'의 본질이라 할 수 있다.



[그림 Ⅱ-1] Whitehead의 3단계
(R-로맨스의 단계, P-정밀화의 단계, S-일반화의 단계)

이러한 지성의 발달의 3단계와 맞물리는 것이 자유와 규율의 리듬이다. 그는 '규율'에 의해 사실이 지식으로 발전하고 '자유'로워야 지식이 지혜로 이르게 된다고 말한다. Whitehead (2004)는 자유 및 규율과 연관지어 '로맨스 단계'를 최초의 자유 기간, '정밀화 단계'를 중간의 규율 기간, '일반화 단계'를 최종의 자유 기간이라고 한다. 그리고 3단계가 주기를 이루듯이 자유→규율→자유도 주기를 이루면서 개별 사이클을 내포하는 큰 주기들로 교육이 성립된다고 본다. 즉 교육의 처음에도 그리고 끝에도 자유가 있지만 그 중간에 규율 단계가 있다고 본다. 이 때, 자유와 규율의 율동적인 조정이 있게 되는데 이를 '교육의 리듬'이라고 보는 것이다.

로맨스의 단계 → 정밀화의 단계 → 일반화의 단계
자유 규율 자유
사실 사실→지식 지식→지혜

[그림 Ⅱ-2] Whitehead의 교육의 리듬

이 때의 규율은 자기규율이며 이 자율성은폭넓은 자유 의지의 활용으로만 획득할 수 있다 (Whitehead, 2004). 자기규율로서의 정밀화 단계를 잘 이끌어 나가기 위해서는 로맨스 단계의 자유를 충분히 누려야 할 것이다. 학습에 대한 자연스러운 열망과 사색활동을 하는 습관은 자유로운 상태에서 비롯되기 때문이다.

Brumbaugh(1982)는 Whitehead가 제안하는 로맨스 단계(R), 정밀화 단계(P), 일반화의 단계(S) 중 어느 것이 생략된 경우와 그 단계들의 순서가 바뀐 경우에 대해 어떤 교육적 상황이 발생하는가에 대한 논의를 하고 있다. 먼저, 단계가 생략되는 경우를 살펴보자. 프라임 기호(′)는 생략된 단계를 나타낸다.

(O1)	R′	P′	S′
(O2)	R′	P′	S
(O3)	R′	P	S
(O4)	R	P′	S′
(O5)	R	P′	S
(O6)	R	P	S

(O1)은 명백히 무감각하기만 한 과정으로, (O2)는 흥미 없고 특정화되지 않은 일반화로 본다. (O3)은 매력적인 단순화로 구성되어 있지만 동기와 흥미가 전혀 없다. 이 패턴에서는 정밀화 단계에서에서 일반화 단계로 자연스럽게 전이되기 어렵다. 정밀화 단계에서 일반화 단계로 넘어가고자 하나 로맨스 단계에서의 경험이 부족하여 통찰력이 없으며 암기에만 의존하기 때문에 실패한다. (O4)는 충분한 동기를 불러일으키지만 제대로 구조화되지 않은 흥분만을 일으키기 때문에 더 이상의 진전을 기대하기 어렵다. (O5)는 개괄적인 코스나 탐색 코스에 종종 사용되기는 한다. 그러나 정밀화되지 않아 개괄적인 수준에 머무를 수밖에 없다. (O6)은 모든 단계를 거친 것으로 이것이 가장 자연스럽고 효과적이어서 최적의 상태가 된다.

이제 순서가 바뀐 경우를 살펴보자.

(T1)	S	P	R
(T2)	S	R	P
(T3)	P	S	R
(T4)	P	R	S
(T5)	R	S	P
(T6)	R	P	S

(T1)과 (T2)는 이미 전문가가 된 학자나 이미 학습한 것을 다시 복습하는 학습자에게 어울린다. Cantor의 집합론과 같은 추상적인 공리 체계가 이것의 예가 되는데 처음에 공리부터 접하면 흥미가 없을 뿐만 아니라 공허하다. 내용없이 구성된 개념이라 초심자에겐 당혹스럽기까지 하다. 특히 (T2)의 경우 로맨스 단계는 중간 역할을 제대로 못하는 경우가 많다. (T3)과 (T4)는 정밀화 단계에서 시작하므로 계속적으로 외재적 동기를 필요로 한다. 그리고 배경적 지식과 구조적인 이해가 없이 학습하므로 학습한 것을 쉽게 잊어버린다. (T5)는 정밀화 단계에서의 동기가 부족해지는데 개괄하기 위한 코스에서는 가끔 쓰인다. (T6)의 순서가 바르게 놓여진 것으로 가장 바람직한 모델이라 할 수 있다.

이와 같이 로맨스의 단계, 정밀화의 단계, 일반화의 단계는 각기 그 충분한 역할이 있으며 적절한 순서가 있음을 알 수 있다. 그리고 이들은 자유와 규율이 함께 할 때 최대의 효과를 누릴 수 있을 것이라는 예측이 가능하다.

III. '교육의 리듬'의 수학교육 적용

이제 앞에서 살펴본 Whitehead의 교육이론을 수학교육에 적용하는 방안을 생각해 보기로 한다. 이를 위해 우선 교육과정의 구성방법을 살펴보고, 교수방법에서 고려해야 할 사항들을 알아본다. 그리고 학생과 교사가 만나는 실제 수업에서의 장면을 구상해 보기로 한다.

1. 교육과정에의 적용

거시적 관점에서 볼 때, Whitehead의 3단계가 자연스럽게 일어나는 교육과정의 구성이 필요하다. 또한 미시적 관점에서 볼 때, 하나의 개념 습득에 있어서도 Whitehead의 3단계를 밟아나가는 내용의 구성이 필요하다. 이처럼 주기의 크기와 관계없이 Whitehead의 3단계는 반복되어야 하는데 이 때의 주기는 반복에 그칠 것이 아니라 더 높은 수준으로의 상승이 일어나야 한다. 즉 이전 주기의 일반화의 단계는 다음 주기의 로맨

스의 단계로 연계되면서 개념의 발달을 야기해야 한다. 이러한 생각은 Piaget와 Freudenthal, van Hieles 등에 의해 이미 논의된 바 있다.

Piaget는 수학적 사고가 반영적 추상화에 의해 구성된다고 본다. 반영적 추상화는 주체 자신의 행동이나 조작의 보다 높은 수준에의 반사와 그에 대한 반성으로 이루어지며, 반사된 내용은 반성에 의해 새로운 형식을 구성하게 된다. 따라서 반사와 반성이 교대로 나타나며 '내용 → 형식 → 보다 세련된 내용 → 새로운 형식'의 교대가 거듭된다. Freudenthal은 수학적 활동을 수학화 활동과 그 의식성의 현재화 활동으로 보며, '현상 → 정리수단인 본질 → 현상 → 보다 높은 차원의 본질'과 같이 교대가 일어나면서 인식 수준의 상승이 일어나는 불연속적인 과정으로 본다. van Hieles에 따르면 수학적 사고 활동이란 경험의 세계를 조직하는 활동이다. 따라서 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 의식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 'n-1수준의 수단 → n-1수준의 대상 → n수준의 수단 → n수준의 대상'을 반복한다(우정호, 2002).

위의 논의는 Whitehead의 3단계에 대한 논의와 유사하다. Piaget의 내용과 형식, Freudenthal의 현상과 본질, van Hieles의 수단과 대상이 교대, 반복되는 것처럼 Whitehead의 로맨스의 단계, 정밀화의 단계, 일반화의 단계가 교대, 반복되는 것이다. 그러나 Whitehead의 경우에는 학습자가 다루는 개념의 상태에 초점을 둔 것이 아니라 개념을 습득하는 과정에서의 학습자의 지성 발달 상태에 초점을 두고 있다는 점에서 차이가 있다.

Whitehead의 로맨스의 단계에서는 Piaget의 내용, Freudenthal의 현상, van Hieles의 수단을 다루는 단계라 할 수 있다. 따라서 자유로이 조작하고 사고하는 단계이어야 하고 수학적 내용은 구체적이어야 한다. Whitehead의 정밀화 단계에서는 Piaget의 형식, Freudenthal의 본질, van Hieles의 대상을 얻고자 하는 단계이다. 따라서 내성적 활동이 중요시되고 개념의 정착을 위해 애써야 하며 이를 통해 수학적 내용이 세련되어진다. Whitehead의 일반화 단계에서는 이전 단계에서의 Piaget의 형식, Freudenthal의 본질, van Hieles의 대상이 다음 수준으로 도약이 일어나게 된다.

<표 Ⅲ-1> Whitehead의 3단계에서의 연구대상

Whitehead의 단계	Piaget	Freudenthal	van Hieles
로맨스 단계	내용	현상	수단
정밀화 단계	형식	본질	대상
일반화 단계	형식→내용	본질→현상	대상→수단

이들의 논의와 관련지어가며 Whitehead의 3단계를 실현하기 위한 교육과정의 구성방안을 생각해 보기로 한다. 기존의 교육과정은 정밀화의 단계와 일반화의 단계에 치중하여 구성된 만큼 여기에서는 특히 로맨스의 단계를 중심으로 하여 구성 방법을 살펴본다.

삼각방정식의 해를 구하는 방법을 학습하는경우를 생각해 보자. 삼각방정식 $2sin^2x-3sin\,x+1=0$에서 $\sin x=t$라 치환하면 $2t^2-3t+1=0$ $(-1\leq t\leq 1)$이 된다. 이는 다름 아닌 이차방정식이다. 따라서 이차방정식 $2t^2-3t+1=0$의 해를 구하는 방법을 알고 있다면, t 대신 $\sin x$가 들어간 꼴의 삼각방정식에서도 그 해를 구할 수 있겠다는 생각을 품으면서 로맨스의 단계로 진입할 수 있다. 이는 지수방정식이나 로그방정식에서도 마찬가지이다. $2t^2-3t+1=0$에서 t 대신 각각 3^x, $\log x$가 들어가면 지수방정식 $2\cdot 3^{2x}-3^{x+1}+1=0$, 로그방정식 $2(logx)^2-3logx+1=0$의 꼴로 나타난다는 것을 감지하게 하여 새로운 로맨스 단계로의 진입을 시도할

수 있을 것이다.

기존의 교육과정 구성과의 차이점은 다음과 같다. 기존의 교과서는 이차방정식을 배운 후, 지수방정식 $2\cdot 3^{2x}-3^{x+1}+1=0$을 도입할 때, 3^x을 t로 치환하면 $2t^2-3t+1=0(t>0)$이 되어 이차방정식의 풀이방법을 이용할 수 있다고 설명하고, 이차방정식의 풀이방법을 상기하게 하여 풀이에 적용하게 한다. 이와 같은 내용의 전개 방식에서는 일반화된 이차방정식의 풀이방법을 자연스럽게 적용하는 게 아니라, 교사가 보여주는 치환한 모양에서 애써 이차방정식의 모양을 발견하여 교사의 지도 하에 이차방정식의 풀이방법을 적용하게 된다. 't 대신 3^x이 들어간 꼴의 방정식에서도 이차방정식의 풀이 방법을 적용할 수 있지 않을까'하는 낭만적인 정서를 품게 하는 것, 이것이 교육의 리듬을 살릴 수 있는 포인트가 된다.

유한집합의 부분집합의 개수를 구하는 경우를 생각해 보자. 「수학 7-가」에서는 A={a, b, c, d}의 부분집합의 개수를 구할 때에 원소가 0개인 것, 1개인 것, …, 4개인 것의 순서로 구한다. 「수학 8-나」에서는 원소 a, b, c, d가 각각 들어간 경우와 들어가지 않은 경우를 생각하여 $2\times2\times2\times2=2^4$으로 부분집합의 개수를 구한다. 이를 일반화하면 원소가 n개인 부분집합의 개수는 2^n이 된다. 「수학 I」에서는 집합 A의 원소 4개 중 0개를 고르는 경우의 수 ${}_4C_0$, 1개를 고르는 경우의 수 ${}_4C_1$, …, 4개를 고르는 경우의 수 ${}_4C_4$를 모두 더한 ${}_4C_0+{}_4C_1+\cdots+{}_4C_4$로 보고 이항정리의 활용인 ${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n=2^n$에서 2^4을 구한다.

이 과정을 돌아보면서 이항정리의 필요성과 그 활용을 위한 로맨스의 단계를 구성해 보자. 이항정리 $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_ra^{n-r}b^r$은 학생들에게 복잡하기만 한, 매력 없는 정리이다. 이 정리를 배우기에 앞서, 「수학 7-가」에서 다룬 유한집합 A의 부분집합의 개수를 구하는 방법을 상기시키고 원소가 0개인 것, …, 4개인 것의 경우의 수가 ${}_4C_0$, ${}_4C_1$, …, ${}_4C_4$로 표현하여 그 개수를 ${}_4C_0+{}_4C_1+\cdots+{}_4C_4$…㉠으로 나타나게 한다. 또, 「수학 8-나」에서 다룬 방법을 이용하여 2^4…㉡임을 상기시킨다면, ㉠, ㉡이 같다는 생각에 이를 것이다. 이 때에 ${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n=2^n$이 항상 성립할 수 있겠는가의 생각을 품게 하고 이를 증명하는 방법을 찾아보게 하는 것이다. 이 경우 「수학 7-가」, 「수학 8-나」에서 다루어 일반화의 단계에 이른 내용들이 다시 「수학 I」의 이항정리를 위한 로맨스의 단계가 되는 것이다.

이렇게 로맨스의 단계에서 싹튼 생각들은 정밀화 단계를 거쳐 일반화의 단계로, 다시 더 높은 수준의 로맨스의 단계로 이어지게 되는 것이다.

2. 교수방법에의 적용

여기에서는 자유와 규율의 의미와 가치를 알아보고 Whitehead의 3단계가 최적한 상태로 실현되기 위한 상황을 구안해 보기로 한다.

자유는 흔히 소극적 자유와 적극적 자유로 대별하여 '…으로부터의 자유'(freedom from)를 소극적 자유로, '…에로의 자유'(freedom to)를 적극적 자유로 구분한다(Fromm, 1992). 따라서 소극적 자유는 행위자의 의지를 구속하는 것이 없는 여건에서 얻게 되는 자유에 가까우며, 적극적 자유는 무엇인가를 할 수 있는 실질적인 능력의 자유에 가깝다. 교육상황에서 자유의 의미를 생각해 본다면, 소극적 자유는 학습하는 과정에서 학습자가 누리는 자유이며, 적극적 자유는 학습의 결과로 얻게 되는 자유이다.

Dewey(1980)는 내부적인 자유 못지않게 외양상의 자유를 중요시한다. 지성의 자유가 항구

적인 중요성을 띠고 있지만 이러한 사색과 욕망과 목적의 자유는 행동의 외부적인 면과 분리할 수 없다는 것이다. 전형적인 전통적 학교교실 에서 볼 수 있는 외면적인 행동에 과해진 구속이, 지적 또는 도덕적 자유에까지 과중한 속박을 가져온다는 것이다. 지적, 도덕적 자유에 속박을 가하지 않으려면 외면적인 행동을 구속하지 않아야 하는 것이다.

Dewey(1980)는 외양상 자유의 이점으로 두 가지를 들고 있다. 하나는 외양상 자유로 인해 학생들의 거짓 없는 내심을 알 수 있다는 것이고 다른 하나는 능동적인 학습과정의 성질과 부합한다는 것이다. 학습하는 과정 중 학생들의 자유로운 행동을 보면서 교사는 학생들의 속마음을 읽게 되고 각각의 학생에 알맞은 방식으로 학생을 대할 수 있고 수업방식을 조정할 수 있기 때문이다. 또한 능동적으로 학습이 이루어지는 과정 속에서는 자유로운 탐구 없이 학습이 지속되게 하기는 어렵기 때문이다. 물론 외양상 행동에 있어서의 자유는 어디까지나 수단이며 목적은 아니라고 말하지만 자연적 충동과 욕망이 없이는 지적 생장이란 있을 수 없기 때문에 자연적 충동과 욕망 또한 소중히 다루어야 하는 것이다. 이러한 자연적 충동과 욕망으로 로맨스의 단계의 자유로운 탐구가 가능해지는 것이다.

그러나 교육의 결과로서 우리가 추구해야 하는 자유는 능력의 자유일 것이다. Berlin(2002)은 이성을 사용하여 적극적 자유를 실현하는 것에 대한 예로, 수학을 배우던 학생 때의 자신의 경험을 제시한다. 처음에 수학적 진리들은 장애로 느껴지지만 기호의 사용, 공리, 변형규칙들을 이해하게 되면 수학적 진리들은 더 이상 장애가 아니며 오히려 자신의 이성적 활동을 자유롭게 해 주는 기능으로 작용한다는 것이다. 이성적 활동을 자유롭게 해 주는 자유, 이 자유가 일반화의 단계에서 얻게 되는 자유라고 할 수 있다.

곧 Dewey가 말하는 자유는 학습하는 과정에서 학습자가 누려야 할 소극적 자유이며, 이러한 자유를 로맨스 단계에서 충분히 누리게 해야 한다는 것이 Whitehead의 주장이다. 또한 Berlin이 말하는 자유는 학습하는 결과로 학습자가 누리게 되는 적극적 자유이며 이러한 자유는 일반화의 단계에서 얻게 된다고 Whitehead는 말한다.

그런데 로맨스 단계에서의 소극적 자유가 일반화 단계에서의 적극적 자유로 그 가치를 고양시키기 위해서는 규율이 필요하다고 Whitehead는 강조한다. 그러나 이 때의 규율은 자기규율이다. 진보의 기본 원리는 학습자의 내부에서 우러나오는 것이며 발견은 본인 스스로 해야 하고, 결실은 학습자의 주체적인 노력의 결과이기 때문이다. 이때 교사의 역할은 낭비를 피하기 위한 것으로 본다. 학습자 스스로 자기규율을 행사하기까지 교사의 역할은 꼭 필요한 것이며 매우 조심스러운 것이다. 학생에게 알맞은 권한을 주고 행사하게 해야 하며 그에 따른 책임을 지게 해야 할 것이다. 자율적인 태도란 학습으로 얻는 부산물이 아닌, 학습을 이끌어 가는 주도적인 것임을 알게 해야 할 것이다. 이처럼 규율은 특히 정밀화의 단계에 필요한 것으로 결실을 맺기 위한 노력을 하는 과정에서 학습자가 자신을 규율하는 형태로 나타나야 할 것이다.

「수학 8-가」에서 m, n이 자연수일 때, 지수법칙 $a^m \times a^n = a^{m+n}$을 학습하는 과정을 생각해 보자. $2^2 \times 2^3$의 값을 거듭제곱을 이용하여 나타낼 때, 학습자는 다양한 방법을 시도할 것이다. $2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2^5$으로 나타내거나 $2^2 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32 = 2^5$으로 나타낼 수 있을 것이다. 이와 같은 로맨스의 단계에서 필요한 것은 다양하고 자유로운 시도이다. 여러 방법을 시도해 보고 유사한 문제를 다루면서 $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$과 같이 수식을 이용하

여 세련된 표현으로 나아가게 된다. 이 때 필요한 것이 규율이다. 수학적으로 간결하면서도 핵심적인 표현을 하기까지에는 자신을 규율하면서 노력을 기울이는 과정이 필요하다. 이러한 정밀화의 단계를 거치면서 $a^m \times a^n = a^{m+n}$이라는 일반화에 이르게 된다. 이제 a가 어떤 수이든지 m, n이 자연수라면 항상 활용할 수 있는 지식을 습득하면서 학습자는 한 차원 높은 자유를 누리게 된다. 그리고 여기에서 그치는 것이 아니라, $(a^m)^n = a^m \times \cdots \times a^m = a^{m+\cdots+m} = a^{mn}$의 생각을 품으면서 다른 주기를 시작하게 되고, 다시 자유로운 생각과 접근 방법을 시도하게 되는 것이다.

그런데, 기존의 교실 수업에서는 캡슐화된 $a^m \times a^n = a^{m+n}$을 먼저 보여주고 그 예로 $2^2 \times 2^3 = (2\times2)\times(2\times2\times2) = 2^5$, $2^{2+3} = 2^5$이므로 $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3}$이 성립함을 보인 후, 공식이라고 외우게 하고, 기계적으로 적용하게 한다. 이와 같은 수업은 규율로만 점철된 수업이다. 그것도 학습자의 자기규율이 아닌 교사의 권위에 의한 규율이다. 이러한 규율로는 학습자의 자발적인 학습을 기대하기 어렵게 되어 이후에 있음직한 자발적인 진보와 점점 멀어지게 되며 생각지 못한 역효과를 유발할 수 있는 것이다. 이는 Whitehead(2004)의 다음 표현에서 여실히 나타난다.

> 인간 발달에 가장 필요하다는 한 기간을 그처럼 부당하게 연장시킨 결과로 드러난 것은 열등생을 양산한 것이었고, 끔찍한 희생을 강요당하면서도 그들의 자연스러운 관심사를 잃지 않았던 소수의 장학생을 만들어낸 것이었다.

Whitehead(2004)는 학생을 살아있는 정신을 지닌 성장하는 유기체로 보았다. 따라서 그가 보는 교육은 마음 속에서 이미 발효되고 있는 효소를 위해 준비되어야 하는 것이다. 그의 입장에서는 발효되고 있는 마음의 상태가 가장 중요하며 이는 자유로울 때 가능하다. 충분한 자유는 자연적인 성장을 위한 것이고 규율은 진정한 발전을 위한 것이다. 또한 자유와 로맨스의 정서 위에서 규율이 가능한 것이며, 이 때에 즐겁게 과제를 수행하는 습관이 길러진다 (Hendley, 1986). 따라서 자유와 규율 모두 소중하며 적시에 충분히 누려야 한다.

3. 실제 수업에의 적용

다음에 구성한 내용은 「수학 10-나」의 정점을 지나는 방정식에서 시작한다. 도형의 특성상 실제로 직선을 그려 보는 방법으로 접근할 수도 있고 'k의 값에 관계없이'에 유념하여 항등식 개념을 이용할 수도 있다. 자유로운 탐색 활동을 통해 직선을 도시하는 방법과 항등식 개념을 모두 적용해 보는 로맨스 단계는, 개념의 발효를 위한 필수불가결한 단계가 될 것이다. 이 단계는 한 번으로 그치는 것이 아니라 새로운 발효를 할 때마다 겪는 단계이며 교사의 적절한 발문과 학습자의 다양한 접근으로 더 많은 가능성을 품게 될 것이다.

여기에서는 유사한 구조를 갖지만 다양한 도형(2차원, 3차원, n차원)으로 확장해 가면서, 항등식 개념이 기본 아이디어임을 체득하게 하고자 문제를 구성하였다. 항등식 개념은 이후 확장되어 가는 과정에 계속 적용되어지는 것으로, 「수학 10-가」에서 배운 지식을 유용하게 사용할 수 있음을 적극적으로 보여주게 되며 시각화된 도형에서 그 의미가 풍부해진다. 이는 기본 아이디어를 중요시하고 그 기본 아이디어를 철저하게 가르쳐야 한다는 Whitehead의 주장에 따른 것이다. 또한 정련되고 일반화된 아이디어에서 시작하는 것을 실수라고 보는 Whitehead의 충고를 고려하여, 주기를 거듭하면서 개념이 발

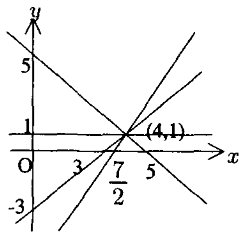
효되고 정련되는 데에 주안점을 둔 것이다.

1 관련 단원 - 항등식(수학10-가), 직선의 방정식(수학10-나), 원의 방정식(수학10-나), 직선과 평면의 방정식(수학Ⅱ)

2 학습 주제 - 두 직선의 교점과 다른 한 점을 지나는 직선의 방정식

3 학습 목표 - 항등식 개념을 이용하여 두 도형의 교점 또는 교선을 지나는 도형의 방정식을 구할 수 있다.

4 수업 전개

단계	교수-학습 활동	단계의 특성
로맨스의 단계	◈ 직선 $kx-y-4k+1=0$이 k의 값에 관계없이 지나는 점의 좌표가 있을까? 구해보자. (1) x절편 $4-\frac{1}{k}$, y절편 $-4k+1$의 이용 (2) 기울기 k, y절편 $-4k+1$의 이용 (3) k에 직접 값을 대입하여 여러 직선을 구하고 그려본다. $k=-1$: $x+y-5=0$ $k=\ 0$: $y-1=0$ $k=\ 1$: $x-y-3=0$ $k=\ 2$: $2x-y-7=0$ 항상 (4, 1)을 지남을 알 수 있다.  (4) 'k의 값에 관계없이'에 초점을 맞추어 항등식 개념을 상기하면, $(-y+1)+k(x-4)=0$ 에서 $x=4, y=1$ 즉 직선 $x=4, y=1$의 교점인 (4,1)을 지난다.	문제 제기 여러 가지 방법을 적용한 자유로운 탐색 활동 (1)~(4)
정밀화의 단계	• (1)~(4)를 비교하여 논의하면, (4)가 정련되고 수학적 아이디어를 살린 방법임을 알 수 있다.	규율 속에서 개념 정련
일반화의 단계	◉ $k(ax+by+c)+(dx+ey+f)=0$으로 정리하면 이 직선은 k의 값에 관계없이 두 직선 $ax+by+c=0$, $dx+ey+f=0$ 의 교점을 지난다. - 개념 ①	일반화된 개념으로부터 자유를 얻음
로맨스의 단계	◈ 그렇다면, 두 직선의 교점을 지나는 직선의 식을 k를 이용하여 $k(ax+by+c)+(dx+ey+f)=0$과 같이 나타낼 수 있지 않을까? 두 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$ 의 교점과 점 (-2,2)를 지나는 직선의 방정식을 구해보자. (1) $k(2x+y+1)+(x-y+2)=0$ …(*)은 두 직선의 교점을 지나는 무수히 많은 직선을 모두 표현하는 방정식이다. 이 때, 점 (-2,2)도 지나는 직선의 방정식은 이 직선의 식이 $x=-2$, $y=2$를 만족할 때이다. 따라서 (*)에 $x=-2$, $y=2$를 대입하면 $-k-2=0$ $k=-2$를 (*)에 대입하면 $x+y=0$ (2) 두 직선의 교점을 구하면 (-1,1) (-1,1)과 (-2,2)를 지나는 직선의 방정식은 $y=-x$	개념 ①에서 발효된 문제로 새로운 탐색 활동 (1), (2)
정밀화의 단계	• (1), (2)를 비교하면, (1)이 정련되고 수학적인 아이디어를 살린 방법임을 알 수 있다.	탐색 결과 (1)로 정련

단계	교수-학습 활동	단계의 특성
일반화의 단계	◉ 두 직선의 교점을 지나는 직선의 식을 k를 이용하여 $k(ax+by+c)+(dx+ey+f)=0$과 같이 나타낼 수 있다. -개념 ②	일반화된 개념 ②로 확장
로맨스의 단계	◈ 직선뿐만 아니라 임의의 평면도형에서도 두 도형 $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$의 교점을 지나는 도형의 식은 $k\cdot f(x,y)+g(x,y)=0$으로 나타낼 수 있지 않을까? 두 원 $x^2+y^2-x-y=0$, $x^2+y^2+x-3y=0$ 의 교점과 점 (0,2)를 지나는 원의 방정식을 구해보자. (1) 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은 다음과 같다. $k(x^2+y^2-x-y)+(x^2+y^2+x-3y)=0$ …(*) (*)에 $x=0, y=2$를 대입하면 $k=1$ (*)에 $k=1$을 대입하면 $x^2+y^2-2y=0$ (2) 두 원의 교점을 구하면 (0,0), (1,1) $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 세 점 (0,0), (1,1), (0,2)를 지나는 원의 방정식을 구하면 $x^2+y^2-2y=0$	개념 ②에서 발효된 문제로 새로운 탐색 활동 (1), (2)
정밀화의 단계	• (1), (2)를 비교하면 (1)이 더 정련되고 간결한 방법임을 알 수 있다.	탐색 결과 (1)로 정련
일반화의 단계	◉ 임의의 두 평면도형 $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$의 교점을 지나는 도형의 식은 $k\cdot f(x,y)+g(x,y)=0$으로 나타낼 수 있다. -개념 ③	일반화된 개념 ③으로 확장
로맨스의 단계	◈ 평면도형뿐만 아니라 공간도형에서도 두 도형 $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$의 교선을 포함하는 도형의 식은 $k\cdot f(x,y,z)+g(x,y,z)=0$으로 나타낼 수 있지 않을까? 두 평면 $x-y+z+2=0$, $2x+y-2z+1=0$의 교선 l을 포함하고 점 A(1,1,1)을 지나는 평면의 방정식을 구해보자. (1) $k(x-y+z+2)+(2x+y-2z+1)=0$ …(*) $x=1, y=1, z=1$을 이 식에 대입하면, $2+3k=0$ $k=-\frac{2}{3}$를 (*)에 대입하면 $4x+5y-8z-1=0$ (2) 교선 l의 방정식은 $x=\frac{y-5}{4}=\frac{z-3}{3}$, 구하는 평면의 방정식을 $a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0$ …(#)이라 하면 $(1,4,3)\cdot(a,b,c)=0$이고 (0,5,3)은 (#)위의 점이므로 $-a+4b+2c=0 \quad \therefore a:b:c=4:5:(-8)$ $\therefore 4x+5y-8z-1=0$	개념 ③에서 발효된 문제로 새로운 탐색 활동 (1), (2)
정밀화의 단계	• (1), (2)를 비교하면 (1)이 더 정련되고 간결한 방법임을 알 수 있다.	탐색 결과 (1)로 정련
일반화의 단계	◉ 임의의 두 공간도형 $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$의 교선을 포함하는 도형의 식은 $k\cdot f(x,y,z)+g(x,y,z)=0$으로 나타낼 수 있다. -개념 ④	일반화된 개념 ④로 확장
로맨스의 단계	◈ 평면도형(2차원 도형)과 공간도형(3차원 도형)뿐만 아니라 n차원 도형에서도 두 도형 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$, $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$의 공통 부분을 포함하는 도형의 방정식은 $k\cdot f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$으로 나타낼 수 있지 않을까?	개념 ④에서 발효된 문제를 n차원으로 확장

Ⅳ. 결론

이 논문은 Whitehead의 교육철학을 수학교육에 적용하는 방안을 모색하고자 한 것이다. 그의 형이상학적 철학을 토대로 교육철학과 수학교육에 대한 시사점, 그리고 그의 주된 이론인 '교육의 리듬'을 실제 수학 수업에 적용하는 방안을 구상해 보면서 다음의 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 자유가 주어지는 수학 수업에서 학생은 창의적 생각을 펼칠 수 있고 아이디어가 잉태될 수 있으며, 규율이 주어지는 수학 수업에서 학생은 그 아이디어들을 정련해갈 수 있다. 그리고 다시 자유로운 상황이 주어졌을 때 정련된 아이디어들이 새로운 국면을 맞이할 수 있다. 이렇게 아이디어들이 발효되고 정련되며 일반화를 거쳐 더 높은 단계에 이를 수 있게 하기 위해서는 시의적절하게 자유와 규율이 주어지는 상황이 필요하다. 이는 전적으로 교사의 몫이며, 습득해야 할 개념의 철저한 분석을 통하여 가능할 것이다. 학생들의 심리 상태를 고려한 자유와 규율의 적절한 조화가 학생들의 발전적인 도약을 가능하게 할 것이기 때문이다. 또한 학습자 개개인에 따라 각 단계에 걸리는 시간이 다르므로 개인의 특수성을 고려하는 교사의 배려가 필수적이다.

둘째, 학습자의 개념의 수준이 상승될 수 있도록 배려한 교육과정의 전개가 필요하다. 단순히 개념을 난이도 순으로 배열하거나 위계만을 파악하여 내용을 구성할 것이 아니다. 동기유발로 발효가 이루어지게 하고 정련되어 일반화된 아이디어가 다시 더 높은 수준에서의 발효의 상태에 있도록 하기 위해서는 그 다음 주기로 개념이 연결되게끔 구성되어야 한다.

셋째, 기존의 수학 수업에서는 정밀화 단계와 일반화 단계는 잘 이루어져 온 것 같다. 이에 반해 로맨스 단계를 소홀히 다루어졌기 때문에 학생들이 수학 수업에 그다지 흥미를 느끼지 않고 억지로 끌려가는 공부를 해왔다. 다양한 자료들과 실생활의 예들, 또 역사적인 기원들, 여러 가지 접근 방법들을 통해 수학적 개념에 대한 낭만적 정서를 품게 해야 할 것이다. 이 때에는 충분한 시간이 주어져서 주어진 자료들을 탐색하여 관념의 모험을 즐기게 해야 할 것이다. 이로써 얻게 되는 자유로운 사고는 이후의 장애들을 헤치고 일반화된 아이디어에 이르게 하는 데에 큰 힘이 될 것이다.

참고문헌

우정호(2002). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교 출판부.

최두찬(1985). **A. N. Whitehead의 교육사상에 관한 연구-교양교육을 중심으로**. 경상대학교대학원 석사학위논문.

최상균(1996). 화이트헤드의 유기체의 철학과 칸트의 선험철학. **동서철학, 13**, 77-94.

Berlin, Isaiah (2002). Two concepts of liberty. In H. Hardy (Ed.), *Incorporating four essays on liberty* (pp. 166-217). London: Oxford University Press.

Brumbaugh, R. S. (1982). *Whitehead, process philosophy, and education*. New York: State University of New York.

Dewey, John (1980). **경험과 교육**. (오천석, 역). 서울: 박영사.

Fromm, Erich (1992). **자유로부터의 도피**. (이상두, 역). 서울: 범우사. (영어 원작은 1941년 출판).

Hendley, B. P. (1986). *Dewey, Russell, Whitehead philosophers as educators*. IL: Southern Illinois University Press.

Whitehead, Alfred N. (1994). **화이트헤드의 수학에세이**. (오채환, 역). 수원: 청음사. (영어 원작은 1911년 출판).
Whitehead, Alfred N. (1998). **이성의 기능**. (김용옥, 역). 서울: 통나무.
Whitehead, Alfred N. (2004). **교육의 목적**. (오영환, 역). 파주: 궁리출판. (영어 원작은 1929년 출판).

The Rhythm of Education in Mathematics Education

Cha, Joo-Yeon (SNU High School)

Whitehead proposed that the education proceed through the rhythmic cycle on the basis of his metaphysical philosophy and educational philosophy. 'The Rhythm of Education' means that the intellectual levels of learners are elevated through the rhythmic cycles of stages of romance, precision, and generalization over and over again. As a result of these cyclic repetitions, the learners become truly free of inner prejudice.

This study is to seek a method to apply Whitehead's proposition to mathematics education. I devise the curriculum constructing methods to experience Whitehead's three stages meaningfully, the teaching methods interplaying freedom and discipline rhythmically, and the teaching examples which adopt all these.

* key words : rhythm of education(교육의 리듬), freedom(자유), discipline(규율), stage of romance(로맨스의 단계), stage of precision(정밀화의 단계), stage of generalization(일반화의 단계), mathematics education(수학교육)

논문접수 : 2005. 10. 31
심사완료 : 2005. 12. 2